T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN EŞİTSİZLİKLER VE BAZI UYGULAMALARI

Mehmet Emin TAMAR

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AĞUSTOS 2020

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN EŞİTSİZLİKLER VE BAZI UYGULAMALARI

Mehmet Emin TAMAR

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AĞUSTOS 2020

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN EŞİTSİZLİKLER VE BAZI UYGULAMALARI

Mehmet Emin TAMAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 25/08/2020 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof.Dr. İlham ALİYEV

Prof.Dr. Mehmet CENKCİ

Dr. Öğr. Üyesi Rahime DERE PAÇİN

ÖZET

KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN EŞİTSİZLİKLER VE BAZI UYGULAMALARI

Mehmet Emin TAMAR

Yüksek Lisans, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof.Dr. İlham ALİYEV
Ağustos 2020, 54 sayfa

Bu tez çalışmasında ilk olarak Konveks Analizin ünlü eşitsizliği olan Jensen eşitsizliğinin ve onunla ilintili olan Hermite-Hadamard eşitsizliğinin çeşitli kanıtları ve genellemeleri bir arada toplanarak sınıflandırılmıştır. Daha sonra, Riemann integral toplamları kullanılarak Hermite-Hadamard eşitsizliğinin yeni bir kanıtı verilmiştir ve bu eşitsizlik ile Hölder eşitsizliği birleştirilerek konveks fonksiyonların çarpımı için yeni bir eşitsizlik elde edilmiştir. Son olarak, türevleri konveks olan fonksiyonlar sınıfında Jensen ve Hermite-Hadamard eşitsizlikleri kullanılarak çok sayıda yeni eşitsizlikler kanıtlanmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Hermite-Hadamard eşitsizliği, Jensen eşitsizliği, Konveks fonksiyon, Riemann integral toplamları.

JÜRİ: Prof.Dr. İlham ALİYEV
Prof.Dr. Mehmet CENKCİ
Dr. Öğr. Üyesi Rahime DERE PAÇİN

ABSTRACT

INEQUALITIES FOR CONVEX FUNCTIONS AND SOME OF THEIR APPLICATIONS

Mehmet Emin TAMAR

MSc Thesis in MATHEMATICS
Supervisor: Prof. Dr. İlham ALİYEV
August 2020, 54 pages

In this thesis, firstly, we collect and classify various proofs and generalizations of Jensen's inequality, which is a well-known inequality in convex analysis, and the associated Hermite-Hadamard inequality. Then, using Riemann integral sums, we give a new proof of Hermite-Hadamard inequality. We combine Hermite-Hadamard inequality with the Hölder's inequality to obtain a new inequality for the product of convex fuctions. Finally, using the Jensen's and Hermite-Hadamard inequalities, we prove numerous inequalities for the class of functions whose derivatives are convex.

KEYWORDS: Convex functions, Jensen's inequality, Hermite-Hadamard inequality, Riemann integral sums.

COMMITTEE: Prof.Dr. İlham ALİYEV
Prof.Dr. Mehmet CENKCİ
Asst.Prof.Dr. Rahime DERE PAÇİN

ÖNSÖZ

Eşitsizlikler, matematik tarihi boyunca birçok matematikçi için önemli bir ilgi alanı olmuştur. Bu eşitsizliklerin ispatları, birbirleri ile olan ilişkileri ve değişik versiyonları, çağdaş matematiğin birçok dalında önemli rol oynamaktadır. Cauchy eşitsizliği, Chebyshev eşitsizliği, Minkowski eşitsizliği, Hölder eşitsizliği, Genel Ortalamalar eşitsizliği, Grönwall eşitsizliği, Hardy eşitsizliği, Hardy-Littlewood-Sobolev eşitsizliği, Hilbert eşitsizliği gibi ünlü eşitsizlikler bunlardan bazılarıdır. Konveks fonksiyonların sağladığı Jensen eşitsizliği ve buna bağlı olarak Hermite-Hadamard eşitsizliği bu tezin asıl konusunu oluşturmaktadır.

Bu tez çalışması esas olarak üç ana bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde, konveks fonksiyon kavramı ve buna bağlı olarak Jensen eşitsizliği tanıtılmıştır. Ayrıca, bu eşitsizliğin çeşitli kanıtlarından ve uygulamalarından bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, Jensen eşitsizliğinin önemli bir sonucu olan Hermite-Hadamard eşitsizliğinden bahsedilmiştir. Bunun yanında, bu eşitsizlikle ilgili çeşitli teoremler, kanıtlar ve uygulamalar verilmiştir.

Son bölümde, Hermite-Hadamard eşitsizliğinin yeni bir ispatı verilmiş ve Hermite-Hadamard ve Hölder eşitsizliklerinin birleşiminden oluşan yeni bir eşitsizlik elde edilmiştir. Ayrıca, türevi konveks olan fonksiyonların integralleri ile ilgili çeşitli eşitsizlikler elde edilmiştir.

Bu tez çalışması süresince, bana sürekli yol gösteren, bilgisini ve değerli zamanını benimle paylaşan danışmanım Sayın Prof. Dr. İlham ALİYEV'e şükranlarımı sunarım.

Son olarak, beni maddi ve manevi olarak daima destekleyen, yüreklendiren ve bana yol gösteren hocam Hayrullah AĞBAY'a, dostum Ersin YILMAZ'a ve kıymetli aileme minnetlerimi sunar, teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Konveks Fonksiyonlar için Eşitsizlikler ve Bazı Uygulamaları" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

25/08/2020

Mehmet Emin TAMAR

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$\mathbb{N}$	: Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Gerçel sayılar kümesi
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$	: $[a, b]$ aralığından reel sayılar kümesine etki eden f fonksiyonu
$\sum_{k=1}^{n} a_k$	: a_1, a_2,..., a_n sayılarının toplamı
$\overline{\lim}$	: Üst limit
$\underline{\lim}$	: Alt limit
f'	: f fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
f''	: f fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi

Kısaltmalar:

H-H	: Hermite-Hadamard
Sağ H-H	: Sağ Hermite-Hadamard
Sol H-H	: Sol Hermite-Hadamard
AGO	: Aritmetik-Geometrik Ortalama

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Çağdaş matematiğin hemen hemen tüm dallarında ve uygulamalarında çeşitli eşitsizlikler önemli rol oynamaktadır. Bu eşitsizliklerin bazıları özel eşitsizliklerdir. Örneğin, $|\sin x| \leq |x|$, $e^x \geq 1 + x$, $e^\pi > \pi^e$ gibi eşitsizlikler özel eşitsizliklerdir. Bazı eşitsizlikler ise genel eşitsizlikler olup matematiksel nesnelerin bir sınıfına (fonksiyonlar sınıfı, diziler sınıfı, dönüşümler sınıfı vs.) hitap ederler. Özellikle, son iki yüz yılda eşitsizlikler konusu birçok ünlü matematikçinin ilgi alanında olmuştur. Ünlü eşitsizliklerden bazılarını hatırlatalım: Cauchy eşitsizliği, Chebyshev eşitsizliği, Minkowski eşitsizliği, Hölder eşitsizliği, Genel Ortalamalar eşitsizliği, Grönwall eşitsizliği, Hardy eşitsizliği, Hardy-Littlewood-Sobolev eşitsizliği, Hilbert eşitsizliği, Jensen eşitsizliği, vd.

Eşitsizlikler üzerine çok sayıda makaleler ve kitaplar yazılmıştır. Bu kitaplardan bazıları şunlardır: Hardy vd. (1934); Beckenbach ve Bellman (1961); Mitrinović (1970); Mitrinović vd. (1993).

Klasik genel eşitsizliklerin en ünlülerinden biri Jensen eşitsizliğidir. Jensen eşitsizliğinin çok sayıda versiyonları vardır. Bunlar içinde en klasik olanı aşağıdakidir:

f fonksiyonu bir (a, b) aralığında konveks (dışbükey) olsun. Yani, sürekli olup her x, $y \in (a, b)$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

eşitsizliğini sağlasın. O halde, her x_1, x_2,..., $x_n \in (a, b)$ ve $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$ olan her pozitif α_1, α_2,..., α_n için

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n)$$

eşitsizliği sağlanır.

Jensen eşitsizliği ile sıkı bağlantılı olan (ve özünde, Jensen eşitsizliğinin bir sonucu olan) aşağıdaki Hermite-Hadamard eşitsizliği de ünlü eşitsizliklerden biridir:

f, $[a, b]$'de konveks olsun. O halde,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu tez çalışmasının esas konusu konveks fonksiyonların sağladığı Jensen ve Hermite-Hadamard eşitsizlikleri üzerinedir. Çalışma, Giriş ve Kaynaklar dışında üç esas bölümden ibarettir. Kaynak Taraması başlığı altında Jensen eşitsizliği ile ilgili bir derleme yapılmıştır. Burada, Jensen eşitsizliğinin çeşitli kanıtları ve uygulamaları verilmiştir. Bu kanıtların tek bir kaynakta toplanmasının bu alana ilgi duyan matematikçilere kolaylık sağlayacağını düşünmekteyiz. Tez çalışmasının diğer esas konusu da Hermite-Hadamard (H-H) eşitsizliğidir. Bu eşitsizlik, onun çeşitli versiyonları ve genellemeleri ile ilgili çok sayıda makale bulunmaktadır. Konu için önemli olduğunu düşündüğümüz bazı makalelere atıfta bulunarak, H-H eşitsizliği ile ilgili bilgileri Materyal ve Metod başlığı altındaki bölümde topladık. Çalışmanın Bulgular ve Tartışma bölümünde ise H-H eşitsizliğinin, Riemann integral toplamlarına dayanan yeni bir ispatını verdik ve bundan başka, H-H eşitsizliği ile Hölder eşitsizliğinin bir birleşiminden ortaya çıkan bir eşitsizlik elde ettik. Yine bu bölümde, türevi konveks olan fonksiyonların integralleri ile ilgili çeşitli eşitsizlikler elde ettik. Elde ettiğimiz bu eşitsizliklerin yeni olduğu düşüncesindeyiz.

Bu tez çalışmasının, konveks fonksiyonlar teorisinde ve eşitsizlikler konusunda çalışan matematikçiler için faydalı bir ek kaynak olacağını düşünmekteyiz.

2. KAYNAK TARAMASI

2.1. Konveks (Dışbükey) Fonksiyonlar, Jensen Eşitsizliği ve Çeşitli Uygulamaları

Bu bölümde, tek değişkenli konveks (dışbükey) fonksiyon kavramı tanıtılarak, bu fonksiyonların sağladığı klasik ve çok önemli bir eşitsizliğin kanıtları verilecektir. Jensen eşitsizliği olarak bilinen bu eşitsizlik, konveks analizde, optimizasyon teorisinde ve matematiğin farklı dallarında çeşitli uygulamalara sahiptir. Bundan başka, bu eşitsizlik yardımıyla ilginç olimpiyat problemleri oluşturulabilir. Jensen eşitsizliği ile ilgili çeşitli bilgiler, örneğin, Hardy vd. (1934); Beckenbach ve Bellman (1961); Mitrinović (1970); Mitrinović vd. (1993); Kazarinoff (2003); Steele (2004); Niculescu ve Persson (2018); kaynaklarında bulunabilir.

Bu bölümde verilen teorem ve ispatların hiçbiri bize ait olmayıp yukarıda verilmiş kitap ve makalelerin yanında başka kaynaklarda bulunabilir. Fakat bu bilgilerin tümünün bir kaynakta bulunması mümkün olmadığından bu bilgiler bir araya getirilerek konveks analiz alanında çalışanlar için faydalı bir ek kaynak oluşturulmuştur.

Tanım 2.1. *$\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olup, her x, $y \in (a, b)$, $x \neq y$ için,*

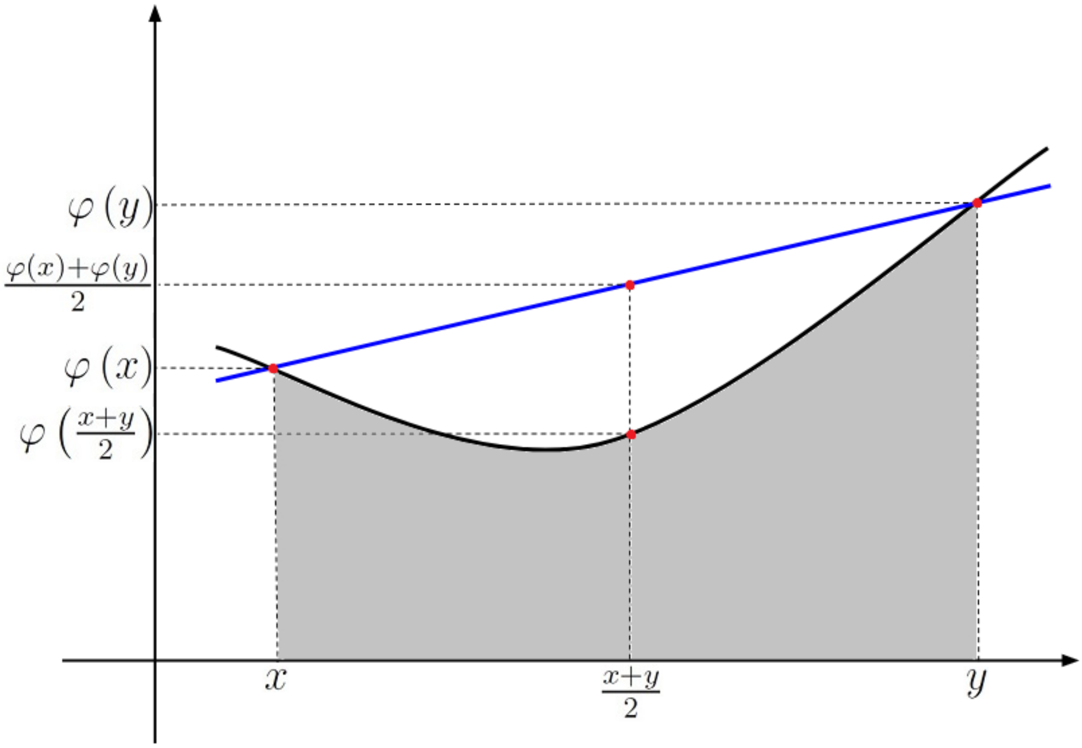
$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{1}{2}\left(\varphi(x) + \varphi(y)\right) \tag{2.1}$$

eşitsizliğini sağlarsa, (a, b) aralığında konveks olarak adlandırılır.

Not 2.2. *Yukarıdaki eşitsizlik, geometrik olarak Şekil 2.1'de bulunan eğri altındaki taralı alanın dik yamuğun alanından küçük olduğunu ifade eder.*

Not 2.3. *Bu tez çalışmasında "kesin konveks" fonksiyonlarla ilgilenilmektedir. Yani, (2.1) eşitsizliğinin, $x \neq y$ için eşitliğe dönüşmediği, başka bir ifadeyle, eğrinin hiçbir alt aralıkta doğru parçasına dönüşmediği varsayılmaktadır.*

Not 2.4. *Konveks fonksiyonlarla ilgili literatürün büyük çoğunluğunda konveks fonksiyonun tanımı şöyle verilmektedir: Her x, $y \in (a, b)$, $(x \neq y)$, ve $\alpha + \beta = 1$ olan her α, $\beta > 0$ için $\varphi(\alpha x + \beta y) < \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$ olursa, $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olarak adlandırılır. Bu tez çalışmasında bu tanım yerine Tanım 2.1 tercih edilmektedir. Bu iki tanımın denk olduğu aşağıda görülecektir.*



Şekil 2.1. Konveks Fonksiyon I

Lemma 2.5. *φ, (a,b) aralığında konveks olsun. Yani, her x, $y \in (a,b)$, $x \neq y$ için,*

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{1}{2}\left(\varphi(x)+\varphi(y)\right)$$

eşitsizliği sağlansın ve φ sürekli olsun. O halde, $\alpha+\beta=1$ olan her α, $\beta>0$ için

$$\varphi(\alpha x+\beta y) < \alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y) \tag{2.2}$$

sağlanır (eşitlik durumu, yalnız $x=y$ için sağlanır).

Kanıt Öncelikle, her $n=2^k$, $k\in\mathbb{N}$ ve $a<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n<b$ için

$$\varphi\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) < \frac{1}{n}\left(\varphi(x_1)+\cdots+\varphi(x_n)\right) \tag{2.3}$$

olduğunu gösterelim. Örneğin, $n=2^2=4$ için gösterelim.

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right) &= \varphi\left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2}\right)\\
&< \frac{1}{2}\left(\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\varphi\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)\right)\\
&< \frac{1}{4}\left(\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\varphi(x_3)+\varphi(x_4)\right)
\end{aligned}$$

olur. Tümevarımla, her $n = 2^k$ için

$$\varphi\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) < \frac{1}{n}\left(\varphi\left(x_1\right) + \cdots + \varphi\left(x_n\right)\right)$$

gösterilebilir. Şimdi de $n \neq 2^k$ olan n'ler için gösterelim. Bunun için Cauchy'nin "geriye tümevarım" metodunu kullanılacaktır:

Herhangi bir n için (2.3) eşitsizliğinin sağlandığını varsayarak, $(n-1)$ için kanıtlayalım (n olarak 2'nin herhangi bir kuvveti alınabilir).

$$\varphi\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}\right) = \varphi\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{n-1} + \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}}{n}\right)$$
$$\overset{(2.3)}{<} \frac{1}{n}\left(\varphi\left(x_1\right) + \cdots + \varphi\left(x_{n-1}\right) + \varphi\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}\right)\right)$$

olur. Buradan, gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\varphi\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}\right) < \frac{1}{n-1}\left(\varphi\left(x_1\right) + \cdots + \varphi\left(x_{n-1}\right)\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla, (2.3) eşitsizliği her $n \geq 2$ için doğrudur. Şimdi, herhangi bir rasyonel $\alpha \in (0,1)$ sayısını alalım: $\alpha = \frac{k}{n}$, $1 \leq k < n$ ve $x, y \in (a,b)$ için

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\alpha x + (1-\alpha) y\right) &= \varphi\left(\frac{k}{n}x + \left(1 - \frac{k}{n}\right) y\right) \\
&= \varphi\left(\frac{kx + (n-k) y}{n}\right) = \varphi\left(\frac{(x + \cdots + x) + (y + \cdots + y)}{n}\right) \\
&\leq \frac{k}{n}\varphi\left(x\right) + \left(\frac{n-k}{n}\right)\varphi\left(y\right) = \alpha\varphi\left(x\right) + (1-\alpha)\varphi\left(y\right),
\end{aligned}$$

ve sonuç olarak, her rasyonel $\alpha \in (0,1)$ için

$$\varphi\left(\alpha x + (1-\alpha) y\right) \leq \alpha\varphi\left(x\right) + (1-\alpha)\varphi\left(y\right)$$

olur (burada eşitlik durumu yalnız $x = y$ için sağlanır). Şimdi de $\alpha \in (0,1)$ herhangi bir irrasyonel sayı olsun. $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = \alpha$ olacak şekilde $\alpha_k \in (0,1)$, $k = 1$, 2,..., rasyonel sayı dizisini alalım. Her $k \in \mathbb{N}$ için,

$$\varphi\left(\alpha_k x + (1-\alpha_k) y\right) \leq \alpha_k\varphi\left(x\right) + (1-\alpha_k)\varphi\left(y\right) \tag{2.4}$$

eşitsizliği sağlanacaktır. (2.4) eşitsizliğinde, $k \to \infty$ için limite geçilir ve φ'nin sürekliliği kullanılırsa,

$$\varphi\left(\alpha x + (1-\alpha) y\right) \leq \alpha\varphi\left(x\right) + (1-\alpha)\varphi\left(y\right) \tag{2.5}$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuncu eşitsizlikte, eşitlik durumu yalnız $x = y$ için geçerlidir. □

Not 2.6. $(1-\alpha)=\beta$ *dersek, (2.5) eşitsizliği*

$$\varphi\left(\alpha x+\beta y\right)\leq\alpha\varphi\left(x\right)+\beta\varphi\left(y\right)$$

olarak yazılabilir. Burada, α, $\beta>0$ *ve* $\alpha+\beta=1$*'dir.*

Teorem 2.7. (Jensen Eşitsizliği Versiyon I) $\varphi:(a,b)\rightarrow\mathbb{R}$ *sürekli ve her* x, $y\in(a,b)$, $x\neq y$ *için*

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)<\frac{1}{2}\left(\varphi\left(x\right)+\varphi\left(y\right)\right)$$

eşitsizliği sağlansın. O halde, $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$ *olan her* α_1, α_2,..., $\alpha_n>0$ *ve her* x_1, x_2 ,..., $x_n\in(a,b)$ *için*

$$\varphi\left(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n\right)\leq\alpha_1\varphi\left(x_1\right)+\cdots+\alpha_n\varphi\left(x_n\right)\tag{2.6}$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt **1. yol:** Lemma 2.5'e göre, $\alpha+\beta=1$ olan her α, $\beta>0$ ve her $x,y\in(a,b)$ için

$$\varphi\left(\alpha x+\beta y\right)\leq\alpha\varphi\left(x\right)+\beta\varphi\left(y\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Bundan yararlanarak (2.6)'yı tümevarımla kanıtlayalım. Bunun için (2.6) eşitsizliğinin bir n için doğruluğunu kabul edip $(n+1)$ için kanıtlayalım ($n=2$ için (2.6)'nın doğruluğu Lemma 2.5'te kanıtlanmıştı).

β_1, β_2,..., β_n, $\beta_{n+1}>0$ olup $\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n+\beta_{n+1}=1$ olsun. Her x_1, x_2,..., $x_{n+1}\in(a,b)$ için

$$\varphi\left(\beta_1x_1+\cdots+\beta_{n+1}x_{n+1}\right)\leq\beta_1\varphi\left(x_1\right)+\cdots+\beta_{n+1}\varphi\left(x_{n+1}\right)$$

olduğunu göstermek istiyoruz.

$$\begin{aligned}&\varphi\left(\beta_1x_1+\beta_2x_2+\cdots+\beta_{n+1}x_{n+1}\right)\\=\;&\varphi\left(\beta_1x_1+(1-\beta_1)\left(\frac{\beta_2}{1-\beta_1}x_2+\cdots+\frac{\beta_{n+1}}{1-\beta_1}x_{n+1}\right)\right)\\\overset{\text{(Lemma 2.5)}}{\leq}\;&\beta_1\varphi\left(x_1\right)+(1-\beta_1)\,\varphi\left(\frac{\beta_2}{1-\beta_1}x_2+\cdots+\frac{\beta_{n+1}}{1-\beta_1}x_{n+1}\right).\end{aligned}\tag{2.7}$$

Şimdi, burada

$$\frac{\beta_2}{1-\beta_1}+\cdots+\frac{\beta_{n+1}}{1-\beta_1}=\frac{\beta_2+\cdots+\beta_{n+1}}{1-\beta_1}=\frac{1-\beta_1}{1-\beta_1}=1$$

olduğunu kullanırsak, tümevarım varsayımına göre

$$\varphi\left(\frac{\beta_2}{1-\beta_1}x_2+\cdots+\frac{\beta_{n+1}}{1-\beta_1}x_{n+1}\right)\leq\frac{\beta_2}{1-\beta_1}\varphi\left(x_2\right)+\cdots+\frac{\beta_{n+1}}{1-\beta_1}\varphi\left(x_{n+1}\right)$$

olur. Bunu (2.7)'de dikkate alırsak,

$$\varphi\left(\beta_1x_1+\cdots+\beta_{n+1}x_{n+1}\right)\leq\beta_1\varphi\left(x_1\right)+\cdots+\beta_{n+1}\varphi\left(x_{n+1}\right)$$

elde edilir ve tümevarım adımı tamamlanarak, (2.6) eşitsizliği her n için kanıtlanmış olur.

□

Lemma 2.5'in ispat tekniği kullanılarak (2.6) eşitsizliği şöyle de kanıtlanabilir:

2. yol: Lemma 2.5'in ispatında, her $n\in\mathbb{N}$ ve her x_1, x_2,..., $x_n\in(a,b)$ için

$$\varphi\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\leq\frac{1}{n}\left(\varphi\left(x_1\right)+\cdots+\varphi\left(x_n\right)\right) \tag{2.8}$$

eşitsizliği kanıtlanmıştı. $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$ olan herhangi rasyonel α_1, α_2,..., $\alpha_n\in(0,1)$ sayılarını alalım. Ortak paydaya getirilerek, $\alpha_1=\frac{k_1}{m}$, $\alpha_2=\frac{k_2}{m}$,..., $\alpha_n=\frac{k_n}{m}$ yazılabilir (burada k_1, k_2,..., k_n ve m tam sayılar olup k_1, k_2,..., $k_n<m$ sağlanır). Şimdi (2.8)'de k_1 tane t_1, k_2 tane t_2,..., k_n tane t_n $(t_1,t_2,...,t_n\in(a,b))$ alarak, şunlar yazılabilir:

$$\begin{aligned}
&\varphi\left(\alpha_1t_1+\alpha_2t_2+...+\alpha_nt_n\right)\\
=\;&\varphi\left(\underbrace{\frac{1}{m}t_1+...+\frac{1}{m}t_1}_{k_1\text{ tane}}+\underbrace{\frac{1}{m}t_2+...+\frac{1}{m}t_2}_{k_2\text{ tane}}+...+\underbrace{\frac{1}{m}t_n+...+\frac{1}{m}t_n}_{k_n\text{ tane}}\right)\\
\leq\;&\frac{1}{m}\left(k_1\varphi\left(t_1\right)+k_2\varphi\left(t_2\right)+...+k_n\varphi\left(t_n\right)\right)\\
=\;&\alpha_1\varphi\left(t_1\right)+\alpha_2\varphi\left(t_2\right)+...+\alpha_n\varphi\left(t_n\right).
\end{aligned}$$

Yani, $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$ olan her rasyonel α_1, α_2,..., $\alpha_n\in(0,1)$ ve her t_1, t_2,..., $t_n\in(a,b)$ için

$$\varphi\left(\alpha_1t_1+\cdots+\alpha_nt_n\right)\leq\alpha_1\varphi\left(t_1\right)+\cdots+\alpha_n\varphi\left(t_n\right) \tag{2.9}$$

eşitsizliği sağlanır. $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$ olan irrasyonel α_1, α_2,..., $\alpha_n\in(0,1)$ için de irrasyonel sayılara rasyonellerle yaklaşılarak ve φ'nin sürekliliği kullanılarak, (2.9) eşitsizliği elde edilir. Böylece, (2.9) eşitsizliği, $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$ eşitliğini sağlayan her reel α_1, α_2,..., $\alpha_n\in(0,1)$ ve her t_1, t_2,..., $t_n\in(a,b)$ için geçerlidir. □

Aşağıdaki teorem, türevlenen fonksiyonlar sınıfında konvekslik için bir yeterli koşul vermektedir.

Teorem 2.8. (Jensen Eşitsizliği Versiyon II) *f, (a,b) aralığında türevlenen ve türev fonksiyonu artan ise, f kesin konvekstir. Dolayısıyla, Jensen eşitsizliği sağlanır.*

Kanıt **1. yol:** f türevlenen olduğu için süreklidir. Ayrıca, her $x, y \in (a,b)$, $x \neq y$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{1}{2}\left(f(x) + f(y)\right)$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterirsek Tanım 2.1'e göre f'nin konveks olduğu sonucu çıkar. Örneğin, $x < y$ olsun. Şekil 2.2 için, Lagrange ortalama değer formülüne göre

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(x) = f'(\xi)\left(\frac{x+y}{2} - x\right) = f'(\xi)\left(\frac{y-x}{2}\right)$$

ve

$$f(y) - f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f'(\mu)\left(y - \frac{x+y}{2}\right) = f'(\mu)\left(\frac{y-x}{2}\right)$$

elde edilir. f' artan olduğundan $f'(\xi) < f'(\mu)$ olur. Ayrıca, $\frac{y-x}{2} > 0$ olduğundan

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(x) < f(y) - f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

ve buradan da

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{1}{2}\left(f(x) + f(y)\right)$$

bulunur. □

Bir diğer kanıt şöyledir:

2. yol: f' artan ise $\alpha + \beta = 1$ olan her $\alpha, \beta > 0$ ve her $u, v \in (a,b)$, $u \neq v$ için

$$f(\alpha u + \beta v) < \alpha f(u) + \beta f(v)$$

olduğunu gösterelim. $u, v \in (a,b)$ ve $u < v$ olsun. Şekil 2.3 için Lagrange ortalama değer formülüne göre $0 < \alpha < 1$ ve $t = \alpha u + (1-\alpha)v$ olmak üzere

$$f(t) - f(u) = f'(c)(t-u) \tag{2.10}$$

ve

$$f(v) - f(t) = f'(d)(v-t) \tag{2.11}$$

olacak şekilde $c \in (u,t)$ ve $d \in (t,v)$ vardır. Ayrıca,

$$t - u = (\alpha u + (1-\alpha)v) - u = (\alpha - 1)u + (1-\alpha)v = (1-\alpha)(v-u) \tag{2.12}$$

ve

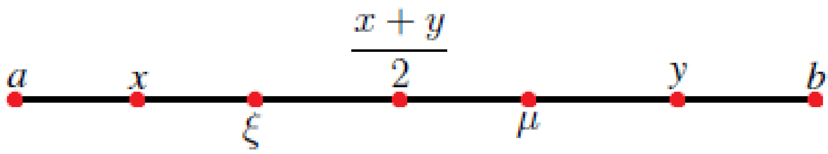
$$v - t = v - (\alpha u + (1 - \alpha) v) = -\alpha u + \alpha v = \alpha (v - u) \tag{2.13}$$

olur.

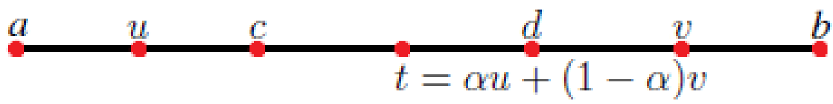
f' artan olduğundan $f'(c) < f'(d)$ sağlanır. (2.10) eşitsizliğini α ile ve (2.11) eşitsizliğini de $(1-\alpha)$ ile çarparak, $f'(c) < f'(d)$ eşitsizliğini de dikkate alarak

$$\begin{aligned} \alpha (f(t) - f(u)) &< (1-\alpha)(f(v) - f(t)) \Longleftrightarrow \\ f(t) &< \alpha f(u) + (1-\alpha) f(v) \Longleftrightarrow \\ f(\alpha u + (1-\alpha) v) &< \alpha f(u) + (1-\alpha) f(v) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve bu eşitsizlik yalnız $u = v$ için eşitliğe dönüşür. □



Şekil 2.2. (a, b) aralığındaki noktalar I



Şekil 2.3. (a, b) aralığındaki noktalar II

Sonuç 2.9. *Her $t \in (a, b)$ için $f''(t) > 0$ ise f konvekstir. Çünkü, her $t \in (a, b)$ için $f''(t) > 0$ ise f' fonksiyonu kesin artandır.*

Aşağıdaki teoremde, farklı bir kanıt yöntemi kullanılarak $f''(t) > 0$ olması durumunda f fonksiyonunun Jensen eşitsizliğini sağladığı gösterilmektedir.

Teorem 2.10. (Jensen Eşitsizliği Versiyon III) *f, (a,b) aralığında ikinci mertebeden türevlenen olup her $t \in (a,b)$ için $f''(t) > 0$ olsun. Bu durumda, $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$ olan her α_1, α_2,..., $\alpha_n \in (0,1)$ ve her x_1, x_2,..., $x_n \in (a,b)$ için*

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n)$$

eşitsizliği sağlanır ve eşitsizliğin eşitliğe dönüşmesi için gerek ve yeter koşul $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ olmasıdır.

Kanıt

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$\bar{x} = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ diyelim. $\bar{x} \in (a,b)$ olduğu açıktır. Taylor formülüne göre, her $k = 1$, 2,..., n için

$$f(x_k) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x_k - \bar{x}) + \frac{1}{2} f''(\xi_k)(x_k - \bar{x})^2 \tag{2.14}$$

sağlanacak şekilde ξ_k sayısı vardır (burada, ξ_k sayısı x_k ile $\bar{x}$ arasında bir sayıdır). (2.14) eşitliğini α_k ile çarparak $k = 1, 2,..., n$ için toplar ve $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$ olduğunu dikkate alırsak, $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) - \bar{x} = 0$ olacağından

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k) = f(\bar{x}) + 0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f''(\xi_k)(x_k - \bar{x})^2 \tag{2.15}$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f''(\xi_k)(x_k - \bar{x})^2 \geq 0$$

olduğuna göre

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k) \geq f(\bar{x}) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right)$$

eşitsizliği elde edilir ki, bu da Jensen eşitsizliğinden başka bir şey değildir. Eşitsizliğin eşitliğe dönüşmesi için gerek ve yeter koşul, her k için $x_k = \bar{x}$, yani, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ olmasıdır. $\square$

Not 2.4'te konveksliğin iki tanımının denk olduğu söylenmişti. Lemma 2.5'te (a,b) aralığında sürekli olup her x, $y \in (a,b)$, $(x \neq y)$ için

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(\varphi(x) + \varphi(y))$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyonun, $\alpha + \beta = 1$, $(\alpha, \beta \in (0,1))$ olmak üzere her x, $y \in (a,b)$, $(x \neq y)$ için

$$\varphi(\alpha x + \beta y) < \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) \tag{2.16}$$

eşitsizliğini de sağladığı kanıtlanmıştı.

Şimdi de $\alpha + \beta = 1$, $(\alpha, \beta \in (0,1))$ olmak üzere her $x, y \in (a,b)$, $(x \neq y)$ için (2.16) eşitsizliğini sağlayan $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim. Bunu gösterdikten sonra Not 2.4'te söylenen iddianın doğruluğu kanıtlanmış olacaktır.

Kanıt f, (a,b) aralığında konveks olsun. Herhangi $x_0 \in (a,b)$ alalım ve f'nin bu x_0'da sürekli olduğunu görelim. Öncelikle, Şekil 2.4'te görüldüğü gibi $a < x_0 < x < b$ olmak üzere

$$x = \frac{b-x}{b-x_0}x_0 + \frac{x-x_0}{b-x_0}b$$

yazılabilir. f konveks ve

$$\frac{b-x}{b-x_0} + \frac{x-x_0}{b-x_0} = 1$$

olduğundan

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \frac{b-x}{b-x_0}f(x_0) + \frac{x-x_0}{b-x_0}f(b) \Longrightarrow \\ f(x) - f(x_0) &< \left(\frac{b-x}{b-x_0} - 1\right)f(x_0) + \frac{x-x_0}{b-x_0}f(b) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $x \to x_0^+$ olmak üzere üst ve alt limitler alınırsa

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\lim\limits_{x\to x_0^+}} \left(f(x) - f(x_0)\right) \leq 0 \\ \underline{\lim\limits_{x\to x_0^+}} \left(f(x) - f(x_0)\right) \leq 0 \end{array} \right\} \tag{2.17}$$

olur. Şimdi de Şekil 2.5'te görüldüğü gibi $a < x < x_0 < b$ olsun.

$$x_0 = \frac{b-x_0}{b-x}x + \frac{x_0-x}{b-x}b$$

yazabiliriz.

Yine, f konveks ve

$$\frac{b-x_0}{b-x} + \frac{x_0-x}{b-x} = 1$$

olduğundan, Jensen eşitsizliğine göre

$$\begin{aligned} f(x_0) &\leq \frac{b-x_0}{b-x}f(x) + \frac{x_0-x}{b-x}f(b) \Longrightarrow \\ f(x_0) - f(x) &< \left(\frac{b-x_0}{b-x} - 1\right)f(x) + \frac{x_0-x}{b-x}f(b) \end{aligned}$$

olur ki, buradan da $x \to x_0^-$ üst ve alt limitler alınırsa

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\lim\limits_{x \to x_0^-}} \left(f\left(x_0\right) - f\left(x\right) \right) \leq 0 \\ \underline{\lim\limits_{x \to x_0^-}} \left(f\left(x_0\right) - f\left(x\right) \right) \leq 0 \end{array} \right\} \tag{2.18}$$

elde edilir. (2.17) ve (2.18)'den

$$\lim_{x \to x_0} f\left(x\right) = f\left(x_0\right)$$

olur. Yani, f, x_0'da süreklidir. □

Şekil 2.4. (a, b) aralığındaki noktalar III

Şekil 2.5. (a, b) aralığındaki noktalar IV

2.1.1. Jensen eşitsizliğinin birkaç önemli uygulaması

1. $f(x)=\ln(x)$, $(0 < x < \infty)$ konkavdır (çünkü türevi olan $\frac{1}{x}$ fonksiyonu kesin azalandır). O halde, Jensen eşitsizliğinden, $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$ olan her pozitif α_1, α_2,..., $\alpha_n \in (0, 1)$ ve her pozitif x_1, x_2,..., x_n için

$$\begin{aligned} \ln\left(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\right) &\geq \alpha_1 \ln x_1 + \cdots + \alpha_n \ln x_n \\ &= \ln x_1^{\alpha_1} + \cdots + \ln x_n^{\alpha_n} = \ln\left(x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}\right) \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \geq x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha 2} \cdots x_n^{\alpha_n} \tag{2.19}$$

elde edilir ki bu da genelleşmiş Aritmetik-Geometrik Ortalama (AGO) eşitsizliği olarak bilinir. Özel halde, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$ olursa, $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$ koşulundan dolayı $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \frac{1}{n}$ olur ve

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \tag{2.20}$$

şeklindeki klasik (ve çok ünlü) AGO eşitsizliği elde edilir. (2.19) ve (2.20) eşitsizlikleri yalnız $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ için eşitlik olur. $n = 2$ için, (2.19) eşitsizliği, α, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere her x, $y > 0$ için

$$\alpha x + \beta y \geq x^{\alpha} y^{\beta}$$

şeklini alır. x yerine $x^{\frac{1}{\alpha}}$ ve y yerine $y^{\frac{1}{\beta}}$ yazarsak

$$\alpha x^{\frac{1}{\alpha}} + \beta y^{\frac{1}{\beta}} \geq xy$$

elde edilir. Şimdi de $\alpha = \frac{1}{p}$, $\beta = \frac{1}{q}$ dersek $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq xy$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik, literatüründe Young eşitsizliği olarak bilinir. İyi bilindiği üzere Young eşitsizliği ünlü

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$$

Hölder eşitsizliğinin kanıtlanmasında temel rol oynar ve Hölder eşitsizliği de analizde Minkowski eşitsizliği (üçgen eşitsizliği) olarak bilinen aşağıdaki ünlü eşitsizliğin ispatında vazgeçilmez rol oynar:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, (1 \leq p < \infty). \tag{2.21}$$

$u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ olmak üzere, u'nun normu $\|u\|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |u_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ şeklinde tanımlanırsa (2.21) eşitsizliği daha kompakt bir şekilde

$$\|a + b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p, (1 \leq p < \infty)$$

biçiminde yazılabilir. Böylece, Minkowski eşitsizliği gibi çok temel bir eşitsizlik, Jensen eşitsizliğinin özel bir durumu olan (2.19) eşitsizliğinden (AGO'dan) bir sonuç olarak elde edilebilir.

2. Aşağıdaki fonksiyonlar, yanlarında bulunan aralıklarda konvek fonksiyonlardır ve bu aralıklarda Jensen eşitsizliği yazılabilir:

   a) $f(x)=e^x$, $(-\infty < x < \infty)$; **b)** $f(x) = x^{2n}$, $(-\infty < x < \infty)$;

   c) $f(x) = x^{2n+1}$, $(0 \leq x < \infty)$; **d)** $f(x) = -\sin x$, $(0 \leq x \leq \pi)$;

   e) $f(x) = -\cos x$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$; **f)** $f(x) = x^n e^x$, $(0 < x < \infty)$;

   g) $f(x) = -\ln(\sin x)$, $(0 < x < \pi)$ vs.

3. Şimdi de Jensen eşitsizliğinden bir başka ünlü eşitsizliğin nasıl elde edildiğini gösterelim.

   $a > 1$ herhangi bir reel sayı olmak üzere, $f(t) = t^a$, $(0 \leq t < \infty)$ fonksiyonu konvekstir. O halde, Jensen eşitsizliğine göre, $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$ olan her α_1, α_2,..., $\alpha_n > 0$ ve her t_1, t_2,..., $t_n > 0$ için

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k t_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(t_k) \iff \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k t_k\right)^a \leq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k t_k^a$$

   olur. Şimdi burada, $0 < p < q$ olmak üzere, $a = \frac{q}{p}$ ve t_k'ler yerine de t_k^p, $k = 1$, 2,..., n, yazılırsa

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k t_k^p\right)^{\frac{q}{p}} \leq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k t_k^q \iff$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k t_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k t_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.22}$$

   eşitsizliği elde edilir.

   Sabit tutulmuş α_1, α_2,..., α_n ve t_1, t_2,..., t_n için, $A(p) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k t_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$ fonksiyonu tanımlanırsa, (2.22) eşitsizliği, $A(p)$ fonksiyonunun azalmayan olduğunu söyler: Her $0 < p < q < \infty$ için $A(p) \leq A(q)$ olur.

Not 2.11. *$p < q$ için (2.22)'de eşitlik durumunun yalnız $t_1 = t_2 = \cdots = t_n$ sağlandığı gösterilebilir.*

Not 2.12. *(2.22) eşitsizliğinin,* $-\infty < p < q < \infty$ *koşulunu sağlayan her* p, q *için de geçerli olduğu gösterilebilir. Burada,* $A(0) = \lim_{p \to 0} A(p) = t_1^{\alpha_1}\, t_2^{\alpha_2} \cdots t_n^{\alpha_n}$ *olarak tanımlanır.*

Not 2.13. *(2.22) eşitsizliğine Genel Ortalama (Ağırlıklı Ortalama) eşitsizliği de denir. İyi bilinen aritmetik, geometrik, harmonik ve karesel ortalamalar*

$$A_{p=} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k t_k^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Genel Ortalamasının özel halleridir.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Jensen Eşitsizliğinin Önemli Bir Sonucu: Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği, bir $[a,b]$ aralığında konveks olan f fonksiyonunun ortalama değerini, yani $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$ sayısını, fonksiyonun a, b ve $\frac{a+b}{2}$ noktalarındaki değerlerinin yardımıyla alttan ve üstten tahmin etmekle ilgilidir. Söz konusu eşitsizliğin matematiksel ifadesi şöyledir: f, $[a,b]$ aralığında konveks ise

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.1}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, eşitlik durumu yalnız doğrusal fonksiyonlar için gerçekleşir.

Bu eşitsizlikle ilgili tarihsel bilgiler, çeşitli genellemeler ve eşitsizliğin uygulamaları ile ilgili gelişmeler Nikulescu ve Persson (2018) kitabında ve Nikulescu ve Persson (2003/2004) makalesinde ayrıntılı olarak verilmiştir.

Bu eşitsizlik ve onun çeşitli benzerleri, genellemeleri, versiyonları ve uygulamaları ile ilgili çok sayıda bilimsel makale yazılmıştır. Onlardan bazıları Azpeitia (1994); Agarval ve Dragomir (1996); Gill vd. (1997); Dragomir ve Wang (1997, 1998); Dragomir ve Agarval (1998); Dragomir ve Fitzpatrick (1999); Dragomir ve Pearce (2000); Dragomir(2002); Niculescu ve Persson (2003/2004); Bakula ve Pečarić (2004); Florea ve Niculescu (2007); Ion (2007); Kırmacı vd. (2007); Bakula vd. (2008); Amrahov (2010); Dahmani (2010); El Farissi (2010); Özdemir vd. (2010); Set vd. (2010) makaleleridir.

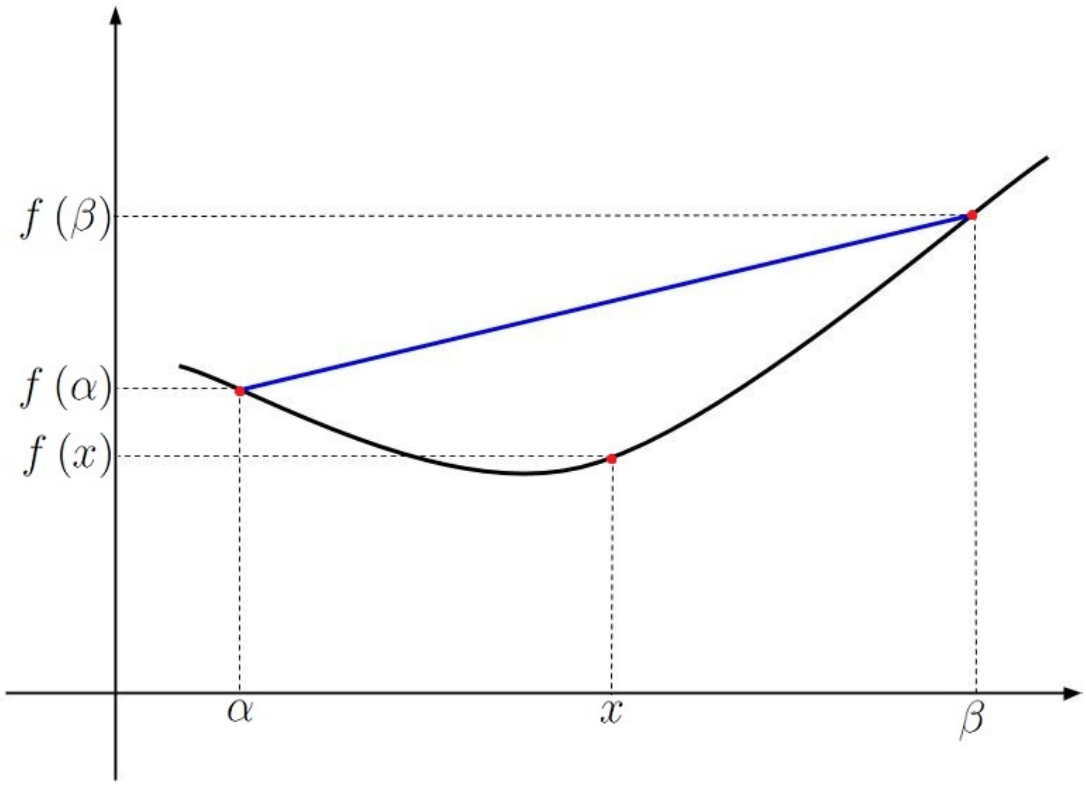
(3.1) eşitsizliğinin sağ ve sol taraflarına, Hermite ve Hadamard'ın baş harflerini kullanarak, Sağ H-H ve Sol H-H diyelim:

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad \text{(Sağ H-H)} \tag{3.2}$$

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad \text{(Sol H-H)} \tag{3.3}$$

Sağ H-H eşitsizliğine bazı kaynaklarda Hadamard eşitsizliği de denmektedir.

Sağ H-H ve Sol H-H eşitsizliklerinin bize göre en kısa ispatı Niculescu ve Persson (2003/2004) makalesinde verilmiştir. Bu ispat, Şekil 3.6'daki gibi bir konveks fonksiyonun geometrik yorumuna dayanmaktadır:



Şekil 3.6. Konveks Fonksiyon II

Her $x \in (\alpha, \beta)$ için grafiğin $(x, f(x))$ noktası, $(\alpha, f(\alpha))$ ve $(\beta, f(\beta))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının altında kalmaktadır. Bunu matematiksel olarak yazarsak

$$f(x) \leq f(\alpha) + \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha) \tag{3.4}$$

eşitsizliği elde edilir. Bundan yararlanarak Sol H-H ve Sağ H-H eşitsizlikleri kolayca kanıtlanır (bakınız Niculescu ve Persson 2003/2004):

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \; (a \leq x \leq b)$$

eşitsizliğinin her iki tarafının integrali alınırsa

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\leq f(a)(b-a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\int_a^b (x-a)\,dx \\ &= f(a)(b-a)+\frac{1}{2}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)^2 \\ &= (b-a)\frac{f(a)+f(a)}{2}\end{aligned}$$

ve buradan

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad \text{(Sağ H-H)}$$

elde edilir.

Şimdi de Sol H-H eşitsizliğini (3.4)'ten elde edelim. Bunun için her α, $\beta \in [a,b]$ için (3.4)'te $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ yazılırsa basit hesaplamalarla,

$$\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \geq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \tag{3.5}$$

elde edilir. O halde,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx\right] = \cdots$$

(integrallerde sırasıyla $x=\frac{1}{2}(a+b-t(b-a))$ ve $x=\frac{1}{2}(a+b+t(b-a))$ şeklinde değişken değiştiriliyor)

$$\cdots = \int_0^1 \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right)+f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right)\right]dt \geq \cdots$$

(burada da (3.5) eşitsizliği kullanılıyor)

$$\cdots \geq \int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right)dt = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

bulunur.

Yani,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad \text{(Sol H-H)}$$

olur.

İkinci türevi parçalı sürekli olan konveks fonksiyonlar sınıfında (3.1) eşitsizliğinden daha iyi olan bir eşitsizlik sağlanır (bakınız Niculescu ve Persson 2003/2004).

$\sup\limits_{[a,b]} f''(x) = M$ ve $\inf\limits_{[a,b]} f''(x) = m$ denirse

$$m\frac{(b-a)^2}{24} \leq \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq M\frac{(b-a)^2}{24} \tag{3.6}$$

ve

$$m\frac{(b-a)^2}{12} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \leq M\frac{(b-a)^2}{12} \tag{3.7}$$

sağlanır. Bu eşitsizlikler, aslında (3.2) ve (3.3)'ün sonucudur:

$$g_1(x) = f(x) - m\frac{x^2}{2}$$

ve

$$g_2(x) = M\frac{x^2}{2} - f(x)$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Her $x \in [a,b]$ için $g_1''(x) \geq 0$ ve $g_2''(x) \geq 0$ olduğundan g_1 ve g_2 konveks fonksiyonlardır. O halde bunlar için (3.1) eşitsizliği sağlanacaktır. g_1 ve g_2 için (3.1) eşitsizlikleri yazılıp basit düzenlemeler yapılırsa (3.6) ve (3.7) elde edilir.

(3.6) ve (3.7) eşitsizlikleri, f üzerine konvekslik dışında ek koşullar konulduğunda (3.1)'den daha iyi koşullar elde edilebileceğini göstermektedir: İkinci türevi parçalı sürekli olan konveks fonksiyonlar için (3.1)'den daha iyi olan (3.6) ve (3.7) sağlanır.

Şimdi de konveks f fonksiyonu Lipschitz sınıfında olsun:

$$\exists L > 0 \forall x, t \in [a,b] \text{ için } |f(x) - f(t)| \leq L|x-t|$$

.

Bu koşulu sağlayan konveks f için Ostrowski eşitsizliği olarak bilinen

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(t)dt \right| \leq \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{x - \frac{a+b}{2}}{b-a}\right)^2\right] M(b-a) \tag{3.8}$$

eşitsizliği basit hesaplamalarla kanıtlanabilir (örneğin, Niculescu ve Persson 2003/2004,

s. 669 kaynağına bakılabilir). Bu kısa ispatı verelim:

$$\begin{aligned}\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| &= \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b (f(x)-f(t))\,dt\right| \\ &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)-f(t)|\,dt \leq \frac{M}{b-a}\int_a^b |x-t|\,dt \\ &= \left[\frac{1}{4}+\left(\frac{x-\frac{a+b}{2}}{b-a}\right)^2\right]M(b-a)\end{aligned}$$

olur.

Ostrowski eşitsizliğinde $x=\frac{a+b}{2}$ yazılırsa

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \leq \frac{M}{4}(b-a)$$

elde edilir.

(3.1) eşitsizliğini $[a,b]$ aralığının alt aralıklarında uygulayarak ve ortaya çıkan eşitsizlikleri toplayarak (3.1)'den daha iyi olan eşitsizlikler elde edilebilir. Örneğin, Hermite-Hadamard eşitsizliğini $[a,b]$ aralığında değil de $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ ve $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ aralıklarına uygularsak

$$f\left(\frac{a+\frac{a+b}{2}}{2}\right) \leq \frac{1}{\frac{b-a}{2}}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx \leq \frac{1}{2}\left[f(a)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

ve

$$f\left(\frac{\frac{a+b}{2}+b}{2}\right) \leq \frac{1}{\frac{b-a}{2}}\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx \leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

olur. Taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+f\left(\frac{a+3b}{4}\right) &\leq \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx \\ &\leq \frac{1}{2}\left[f(a)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]\end{aligned} \tag{3.9}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, f konveks olduğuna göre her $u,v\in[a,b]$ için

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(u)+f(v))$$

sağlanır. $u = \frac{3a+b}{4}$ ve $v = \frac{a+3b}{4}$ yazarsak

$$f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}\right) \geq 2f\left(\frac{(3a+b)+(a+3b)}{8}\right) = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{3.10}$$

olur. (3.10) eşitsizliğini ve (3.9)'un sağ tarafında bulunan $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

eşitsizliğini (3.9)'da kullanırsak

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right] \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \\ &\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f(a)+f(b)}{2}\right] \leq \frac{1}{2}\left(f(a)+f(b)\right) \end{aligned} \tag{3.11}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.11)'in (3.1)'den iyi tarafı, (3.1) eşitsizliğindeki $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ ve $\frac{1}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$ öğeleri arasına yeni öğeler yerleştirilmesidir.

$[a,b]$ aralığını 2 yerine, 4, 8,... eşit parçalara bölünerek ve her parçaya (3.1) eşitsizliğini uyguladıktan sonra ortaya çıkan eşitsizlikler taraf tarafa toplanarak (3.11)'den daha iyi olan eşitsizlikler elde edilebilir. Yani, $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ ve $\frac{1}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$ öğeleri arasına daha fazla öğeler yerleştirilerek eşitsizlikler zinciri oluşturulabilir.

Farissi (2010) makalesinde (3.11)'den daha genel olan bir eşitsizlik elde etmiştir:

f, $[a,b]$ aralığında konveks ise, her $\lambda \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq l(\lambda) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq L(\lambda) \leq \frac{1}{2}\left(f(a)+f(b)\right) \tag{3.12}$$

sağlanır. Burada

$$l(\lambda) = \lambda f\left(\frac{(2-\lambda)a + \lambda b}{2}\right) + (1-\lambda) f\left(\frac{(1-\lambda)a + (1+\lambda)b}{2}\right) \tag{3.13}$$

ve

$$L(\lambda) = \frac{1}{2}\left(f\left((1-\lambda)a + \lambda b\right) + \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)\right) \tag{3.14}$$

olarak tanımlanır.

(3.12)'de $\lambda = \frac{1}{2}$ yazılırsa, (3.11) eşitsizliği ortaya çıkar.

Farissi (2010) ayrıca Hermite-Hadamard'ın (3.1) eşitsizliğinin basit bir kanıtını vermiştir:

$$\int_0^1 f((1-t)\,a+tb)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \tag{3.15}$$

ve

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)\,b)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \tag{3.16}$$

eşitlikleri, (3.15)'teki ilk integralde $(1-t)\,a+tb=x$ ve (3.16)'daki ilk integralde $ta+(1-t)\,b=x$ şeklinde değişken değiştirerek kolayca elde edilir. f konveks olduğuna göre her $t\in[0,1]$ için

$$f((1-t)\,a+tb) \le (1-t)\,f(a)+tf(b)$$

olur. Buradan

$$\int_0^1 f((1-t)\,a+tb)dt \le f(a)\int_0^1 (1-t)\,dt + f(b)\int_0^1 tdt = \frac{1}{2}\left(f\left(a\right)+f\left(b\right)\right)$$

olur. Bunu (3.15)'te dikkate alırsak (3.2) (Sağ H-H) elde edilir. Diğer taraftan, (3.15) ve (3.16) toplanırsa

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx &= \int_0^1 \frac{f((1-t)\,a+tb)+f(ta+(1-t)\,b)}{2}dt\\ &\ge \cdots\left(\frac{f\left(u\right)+f\left(v\right)}{2}\ge f\left(\frac{u+v}{2}\right)\text{ eşitsizliğini kullanıyoruz}\right)\cdots\\ &\ge \int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right)dt = f\left(\frac{a+b}{2}\right)\end{aligned}$$

olur. Yani, (3.3) (Sol H-H) elde edilir. (3.2) ile (3.3) birlikte, Hermite-Hadamard eşitsizliğini verir.

Ion (2007) yarı-konveks (quasi-convex) fonksiyon kavramını tanımlamış ve bu fonksiyonlar için H-H tipli eşitsizlikleri kanıtlamıştır.

Tanım 3.14. (Ion 2007) *Aşağıdaki eşitsizliği sağlayan* $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ *fonksiyonuna* $[a,b]$ *aralığında yarı-konveks (quasi-convex) denir: Her* x, $y\in[a,b]$ *ve her* $\lambda\in[0,1]$ *için*

$$\varphi((1-\lambda)\,x+\lambda y) \le \max\left\{\varphi(x),\varphi(y)\right\}.$$

Teorem 3.15. (Ion 2007) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *türevli ve* $|f'|$ *yarı-konveks olsun. O halde,*

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{b-a}{4} \max\{|f'(a)|, |f'(b)|\}$$

eşitsizliği sağlanır.

Park (2013) makalesinde ise logaritmik konveks fonksiyon kavramı tanımlanmış bu fonksiyonlar için H-H tipli eşitsizlikler kanıtlanmıştır.

Tanım 3.16. (Park 2013) $f : I \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu* $I \subset \mathbb{R}$ *olmak üzere her* x, $y \in I$ *ve her* $t \in [0,1]$ *için*

$$f(tx + (1-t)y) \leq |f(x)|^t |f(y)|^{1-t}$$

eşitsizliğini sağlarsa f fonksiyonuna $[a,b]$ *aralığında logaritmik konveks denir.*

Teorem 3.17. (Park 2013) $f : I \to \mathbb{R}$ *logaritmik fonksiyon olsun. O halde,* $I \subset \mathbb{R}$ *olmak üzere her* a, $b \in I$ *ve* $a < b$ *için*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a) + 4f(a)f(b) + f(b)}{6}$$

eşitsizliği sağlanır.

H-H eşitsizliğinin çok sayıda genellemeleri ve versiyonları vardır. Bu genellemelerin (versiyonların) elde ediliş yollarından bazıları aşağıdakilerdir:

a) Konvekslik kavramı genişletilir.

b) İntegral kavramı genişletilir (örneğin, integral yerine kesirsel integral alınır veya integrale bir ağırlık fonksiyonu eklenir).

c) Hem konvekslik hem de integral kavramları aynı anda genişletilir.

d) Çok değişkenli konveks fonksiyonlar için benzer problemler incelenir.

e) H-H'nin bazı versiyonlarında integrallenebilir fonksiyonların alt sınıfları (Lipschitz, türevlenen vb.) ele alınır ve konulan ek koşulların avantajları kullanılır.

Örneğin, Dragomir ve Fitzpatrick (1999) makalesinde, başka sonuçların yanı sıra, s-konveks fonksiyonlar için H-H eşitsizliğinin bir benzeri kanıtlanmıştır: $s \in (0,1]$ verilsin. $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $x, y \in [a,b]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)^s f(x) + \lambda^s f(y)$$

eşitsizliğini sağlarsa, f fonksiyonuna s-konveks fonksiyon denir.

Teorem 3.18. (Dragomir ve Fitzpatrick 1999) *$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ s-konveks olsun. O halde,*

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1}$$

olur ($s=1$ için klasik H-H eşitsizliği elde edilir).

Bu konuyla ilgili Kırmacı vd. (2007) makalesi de gösterilebilir.

Çeşitli "konvekslik" türleri ve/veya kesirsel integralin kullanıldığı H-H tipli eşitsizlikle ilgili çok sayıda makale vardır ve bunlardan bazıları şunlardır: Azpetia (1994); Gill vd. (1997); Dragomir ve Pearce (2000); Dragomir (2002); Bakula ve Pečarić (2004); Kırmacı vd. (2007); Bakula vd. (2008); Dahmani (2010); Özdemir ve Avci (2010); Set vd. (2010).

Örneğin, kesirsel integraller için H-H eşitsizliğinin bir versiyonu şöyledir:

Teorem 3.19. (Sarıkaya vd. 2013) *$f:(a,b) \to (0,\infty)$ konveks ve $f \in L_1(a,b)$ olsun. O halde,*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\left[J_{a+}^\alpha f(b) + J_{b-}^\alpha f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

olur. Burada, $0<\alpha<1$ olup $J_{a+}^\alpha f$ ve $J_{b-}^\alpha f$, f'nin Riemann-Liouville integralleridir:

$$J_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt, \quad (x>a)$$

ve

$$J_{b-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)\,dt, \quad (x<b)$$

olarak tanımlanır.

H-H eşitsizliğinin ağırlık fonksiyonu kullanılarak ortaya çıkarılan bir versiyonu Fejer eşitsizliği olarak bilinir (örneğin, Abramovich vd. 2008 kaynağına bakılabilir). Bu önemli eşitsizliği hatırlatalım:

f, $[a,b]$ aralığında konveks ve integrallenebilir bir $P : [a,b] \to [0,\infty)$ fonksiyonu $x = \frac{a+b}{2}$ noktasına göre simetrik olsun. Yani, her $x \in [a,b]$ için $P(a+b-x) = P(x)$ eşitliği sağlansın. O halde, Fejer eşitsizliği olarak bilinen aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b P(t)dt \le \int_a^b f(t)P(t)dt \le \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b P(t)dt.$$

$P(t) = 1$ alındığında, klasik H-H eşitsizliği elde edilir. Örneğin, $a = 0$, $b = 2$ ve $P(t) = (t-1)^2$ alınırsa,

$$\int_0^2 P(t)dt = \int_0^2 \left(t^2 - 2t + 1\right)dt = \frac{2}{3}$$

olduğundan, Fejer eşitsizliği şöyle olur:

$$\frac{2}{3}f(1) \le \int_0^2 f(t)(t-1)^2 dt \le \frac{1}{3}(f(0)+f(2))$$

veya

$$2f(1) \le 3\int_0^2 f(t)(t-1)^2 dt \le f(0)+f(2).$$

Not 3.20. *Yukarıda da söylediğimiz gibi, H-H eşitsizliğinin ve onun çeşitli versiyonlarının klasik konveks fonksiyonlar için değişik kanıtları bilinmektedir. Benzer problemler, konvekslik kavramının genellemeleri kullanılarak da incelenmiştir. Örneğin, yukarıda s-konveks fonksiyonun tanımı hatırlatılmıştı. Konveks fonksiyon kavramının bir genellemesi de h-konveksliktir (bakınız Varošanec 2007).*

h-konveksliğin tanımı şöyledir:

Tanım 3.21. $h : (0,1) \to (0,\infty)$ *fonksiyonu, her* $\lambda \in (0,1)$ *için* $h(1-\lambda) + h(\lambda) \ge 1$ *eşitsizliğini sağlasın.* $I \subset \mathbb{R}$ *herhangi bir aralık olsun.* $f : I \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu her* $x, y \in I$ *ve her* $\lambda \in (0,1)$ *için*

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \le h(1-\lambda) f(x) + h(\lambda) f(y)$$

eşitsizliğini sağlarsa, f *fonksiyonuna* h*-konvekstir denir.*

Örneğin, $h(\lambda) = \lambda^s$, $(0 < \lambda, s < 1)$; $h(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$; $h(\lambda) = 1$; $h(\lambda) = \lambda$, $(0 < \lambda < 1)$ fonksiyonları $h(1-\lambda) + h(\lambda) \geq 1$ özelliğine sahiplerdir.

Not 3.22. *Yukarıda bahsi geçen yarı-konveks (quasi-convex) fonksiyonlar aslında çok eskiden beri bilinmektedir. Sürekli yarı-konveks fonksiyonların parçalı monotonluk özellikleri vardır: Bir* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *fonksiyonunun yarı-konveks olması için gerek ve yeter koşul* f *fonksiyonu* $[a,c]$ *aralığında artmayan ve* $[c,b]$ *aralığında azalmayan olacak şekilde bir* $c \in [a,b]$ *sayısının varolmasıdır. Bu özellik, Martos (1975) kitabında bulunabilir.*

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Hermite-Hadamard Eşitsizliğinin Yeni Bir Kanıtı ve Konvekslik Kavramı ile İlintili Yeni Eşitsizlikler

Bu bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde, Riemann integral toplamları kullanılarak H-H eşitsizliğinin bir yeni kanıtı verilmiştir. İkinci alt bölümde, H-H ve Hölder eşitsizlikleri birleştirilerek yeni bir eşitsizlik elde edilmiştir. Nihayet, üçüncü alt bölümde türevi konveks olan fonksiyonların integralleri ile ilgili eşitsizlikler elde edilmiştir.

4.1.1. Hermite-Hadamard eşitsizliğinin Riemann integral toplamları yardımıyla bir kanıtı

Klasik H-H eşitsizliğini tekrar hatırlatalım:

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ konveks ise

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx\leq\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{4.1}$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu eşitsizliğin çeşitli kanıtları bilinmektedir. Burada, Riemann integral toplamları yardımıyla yeni bir kanıt verilecektir. Bu kanıt, H-H eşitsizliğinin bilinen kanıtlarından daha uzundur. Kanıtın orijinal tarafı, Riemann integral toplamları için eşitsizlikler elde edilerek limite geçilmesi ve böylece klasik H-H eşitsizliğine ulaşılmasıdır.

Kanıt Her $x\in[a,b]$ için $x=\frac{b-x}{b-a}a+\frac{x-a}{b-a}b$ yazılabilir. $\frac{b-x}{b-a}+\frac{x-a}{b-a}=1$ ve $b-x\geq 0$, $x-a\geq 0$ olduğundan, Jensen eşitsizliğine göre, her $x\in[a,b]$ için

$$f(x)\leq\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b) \tag{4.2}$$

olur.

Şimdi, $[a,b]$ aralığını n eşit parçaya bölüp ve bölüntü noktalarını x_k, $k=1,2,...,n$, ile gösterelim:

$$x_k=a+\frac{b-a}{n}k,\ k=1,2,...,n.$$

(4.2)'den

$$f(x_k)\leq\frac{b-x_k}{b-a}f(a)+\frac{x_k-a}{b-a}f(b)$$

olur. Eşitsizliğin her iki tarafı $k = 1$, 2,..., n için toplanırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right) &\leq \frac{f(a)}{b-a}\sum_{k=1}^{n}(b-x_k)+\frac{f(b)}{b-a}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)\\
&= \frac{f(a)}{b-a}\sum_{k=1}^{n}(b-a)\left(1-\frac{k}{n}\right)+\frac{f(b)}{b-a}\sum_{k=1}^{n}(b-a)\frac{k}{n}\\
&= f(a)\left[n-\frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2}\right]+f(b)\frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2}\\
&= f(a)\frac{n-1}{2}+f(b)\frac{n+1}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafı n ile bölünürse

$$\frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\leq\frac{1}{2}\left[f(a)\frac{n-1}{n}+f(b)\frac{n+1}{n}\right]$$

olur. Her iki taraftan $n \to \infty$ için limit alınır ve konveks fonksiyonun sürekli, dolayısıyla Riemann integrallenen olduğu kullanılırsa

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

elde edilir.

Şimdi de Riemann toplamlarını tekrar kullanarak

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

eşitsizliğini kanıtlayalım.

Bu defa Jensen eşitsizliğinin aşağıdaki özel versiyonu kullanılacaktır:

Her u_1, u_2,..., $u_n \in [a,b]$ için

$$f\left(\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}\right)\leq\frac{1}{n}\left(f(u_1)+f(u_2)+\cdots+f(u_n)\right)$$

eşitsizliği geçerlidir. Böylece,

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\\ &\geq f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\right)\\ &= f\left(\frac{1}{n}\left(na+\frac{b-a}{n}\frac{n(n+1)}{2}\right)\right)\\ &= f\left(\frac{1}{n}\frac{(n-1)a+(n+1)b}{2}\right)\\ &= f\left(\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)a+\left(1+\frac{1}{n}\right)b}{2}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi, $n\to\infty$ için limite geçilir ve konveks f fonksiyonunun sürekli olduğu dikkate alınırsa

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

elde edilir. □

Şimdi de H-H eşitsizliğinin bir uygulaması olarak aşağıdaki teoremleri kanıtlayalım.

Teorem 4.23. *$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ konveks olsun. O halde,*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\left[\ln\left(\frac{(b-a)^2}{(b-x)(x-a)}\right)-1\right]dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt Her $x\in(a,b)$ için, H-H eşitsizliğine göre,

$$f\left(\frac{a+x}{2}\right) \leq \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt \leq \frac{f(a)+f(x)}{2}.$$

Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafından $[a,b]$ aralığında integral alınırsa

$$\int_a^b f\left(\frac{a+x}{2}\right) \leq \int_a^b \frac{1}{x-a}\left(\int_a^x f(t)dt\right)dx \leq \int_a^b \frac{f(a)+f(x)}{2}dx \tag{4.3}$$

olur. Buradan

$$\int_a^b f\left(\frac{a+x}{2}\right)dx = 2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx;$$

$$\int_a^b \frac{1}{x-a}\left(\int_a^x f(t)dt\right)dx = \int_a^b f(t)\left(\int_t^b \frac{1}{x-a}dx\right)dt$$
$$= \int_a^b f(t)\left(\ln(b-a) - \ln(t-a)\right)dt$$
$$= \int_a^b f(t)\ln\left(\frac{b-a}{t-a}\right)dt$$

ve

$$\int_a^b \frac{f(a)+f(x)}{2}dx = \frac{f(a)}{2}(b-a) + \frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx$$

elde edilerek (4.3) eşitsizliği

$$2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx \leq \int_a^b f(t)\ln\left(\frac{b-a}{t-a}\right)dt \leq \frac{f(a)}{2}(b-a) + \frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx \tag{4.4}$$

haline gelir.

Yine, H-H eşitsizliği $[x,b]$ aralığı için yazılırsa

$$f\left(\frac{x+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-x}\int_x^b f(t)dt \leq \frac{f(x)+f(b)}{2}$$

bulunur. İntegral alınırsa

$$\int_a^b f\left(\frac{x+b}{2}\right)dx \leq \int_a^b \frac{1}{b-x}\left(\int_x^b f(t)dt\right)dx \leq \int_a^b \frac{f(x)+f(b)}{2}dx \tag{4.5}$$

elde edilir.

$$\int_a^b f\left(\frac{x+b}{2}\right)dx = 2\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx;$$

$$\int_a^b \frac{1}{b-x}\left(\int_x^b f(t)dt\right)dx = \int_a^b f(t)\left(\int_a^t \frac{1}{b-x}dx\right)dt = \int_a^b f(t)\ln\left(\frac{b-a}{b-t}\right)dt;$$

$$\int_a^b \frac{f(x)+f(b)}{2}dx = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx + \frac{f(b)}{2}(b-a)$$

olduğundan (4.5) eşitsizliği

$$2\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx \leq \int_a^b f(t)\ln\left(\frac{b-a}{b-t}\right)dt \leq \frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx + \frac{f(b)}{2}(b-a) \tag{4.6}$$

şeklinde yazılabilir. (4.6) ile (4.4)'ü taraf tarafa toplanırsa

$$2\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(t)\ln\left(\frac{(b-a)^2}{(b-t)(t-a)}\right)dt \leq \int_a^b f(x)dx + (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

olur. Buradan da sonuç olarak

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\left[\ln\left(\frac{(b-a)^2}{(b-t)(t-a)}\right)-1\right]dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

elde edilir. □

Not 4.24. *Görüldüğü gibi yukarıdaki eşitsizlik H-H eşitsizliğinin bir inceltmesidir.*

Teorem 4.25. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *konveks ise*

$$f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+f\left(\frac{a+3b}{4}\right) \leq \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{4.7}$$

olur.

Kanıt

$$f\left(\frac{a+x}{2}\right) \leq \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt \leq \frac{f(a)+f(x)}{2}$$

ve

$$f\left(\frac{x+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-x}\int_x^b f(t)dt \leq \frac{f(x)+f(b)}{2}$$

eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa ve $x=\frac{a+b}{2}$ yazılırsa istenen çıkar. □

Özel halde, $a=0, b=4$ için

$$2f(1)+2f(3) \leq \int_0^4 f(x)dx \leq f(0)+2f(2)+f(4)$$

olur.

Not 4.26. *(4.7) eşitsizliği, Niculescu ve Persson (2003/2004) makalesinde vardır. Bu eşitsizliğin burada verilme amacı, H-H eşitsizliğini arka arkaya kullanılarak yeni bir eşitsizliğin ortaya çıkabileceğini göstermektir. Jensen eşitsizliğinde,*

$$f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ve

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

olduğu kullanılırsa (4.7)'den

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right]\leq\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \\ &\leq \frac{2f(\frac{a+b}{2})+f(a)+f(b)}{4}\leq\frac{f(a)+f\left(b\right)}{2} \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da H-H'den daha iyi bir eşitsizliktir (bakınız Niculescu ve Persson 2003/2004, s. 670).

Aşağıdaki teorem $(0,\infty)$ aralığında konveks ve pozitif olan bir f fonksiyonunun integralini, f'in tam ve "buçuk" noktalardaki değerlerinin toplamı ile alttan ve üstten tahmin etmenin bir yolunu göstermektedir.

Teorem 4.27. $f:[0,\infty)\to(0,\infty)$ *konveks ve* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f\left(k\right)<\infty$ *olsun. O halde,*

$$\sum_{k=1}^{\infty}f\left(k-\frac{1}{2}\right)<\int\limits_0^{\infty}f(x)dx<\frac{1}{2}f(0)+\sum_{k=1}^{\infty}f\left(k\right)\tag{4.8}$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt İlk olarak, bir $[a,b]$ aralığında kesin konveks olan bir f fonksiyonu verildiğinde her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right) &< \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \\ &< \frac{1}{n}\left[\frac{f(a)+f\left(b\right)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right] \end{aligned}$$

eşitsizliğinin sağlandığını görelim.

$x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, ..., x_{k-1} = a + (k-1)\frac{b-a}{n}, x_k = a + k\frac{b-a}{n}, ..., x_n = a + n\frac{b-a}{n} = b$ olmak üzere, kesin konveks f için

$$f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right) < \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx < \frac{1}{2}\left[f\left(x_{k-1}\right) + f\left(x_k\right)\right]$$

eşitsizlikleri, $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ ve $\frac{x_{k-1}+x_k}{2} = a + \left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}$, $k = 1, 2, ..., n$, olduğu dikkate alınarak, taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right) &< \frac{n}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \\ &< \frac{1}{2}\left[f\left(x_0\right) + f\left(x_n\right) + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(x_k\right)\right] \\ &< \frac{1}{2}\left[f\left(a\right) + f\left(b\right) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f\left(x_k\right)\right] \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(a + \left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right) &< \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \\ &< \frac{1}{n}\left[\frac{f\left(a\right) + f\left(b\right)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right] \end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi, bu eşitsizlikte $a = 0$, $b = n$ olursa $[0, n]$ aralığında kesin konveks olan f fonksiyonu için

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(k - \frac{1}{2}\right) < \int\limits_0^n f(x)dx < \frac{f\left(0\right) + f\left(n\right)}{2} + \sum_{k=1}^{n} f(k) \tag{4.9}$$

olur. Şimdi de f fonksiyonunun pozitif değerli ve $[0, \infty)$ aralığında konveks olduğunu varsayalım. Bu durumda, (4.9) eşitsizliği her $n \in \mathbb{N}$ için geçerli olacaktır. (4.9)'da $n \to \infty$ için limite geçilirse, $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(n\right) = 0$ olduğundan,

$$\sum_{k=1}^{\infty} f\left(k - \frac{1}{2}\right) < \int\limits_0^\infty f\left(x\right)dx < \frac{1}{2}f\left(0\right) + \sum_{k=1}^{\infty} f\left(k\right)$$

eşitsizliği elde edilir. □

Örneğin, $f(x) = e^{-x}$ fonksiyonu için (4.8) eşitsizliği yazılırsa,

$$\frac{\sqrt{e}}{e-1} < 1 < \frac{1}{2} + \frac{1}{e-1} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{e} < e < \frac{e+3}{2}$$

elde edilir.

4.1.2. Hermite-Hadamard ve Hölder eşitsizliklerinin birleştirilmesiyle elde olunan bazı eşitsizlikler

Bir $[a,b]$ aralığında konveks olan f fonksiyonu için H-H eşitsizliğinin sağ kısmını ele alalım (önceden de söylediğimiz gibi buna, Hadamard eşitsizliği de denilmektedir):

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \le \frac{f(a) + f(b)}{2}. \tag{4.10}$$

$f(x) = u(x)\, v(x)$ çarpımı konveks bir fonksiyon ise (4.10)'dan

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b u(x)\, v(x)\, dx \le \frac{u(a)\, v(a) + u(b)\, v(b)}{2} \tag{4.11}$$

yazılabilir ve

$$u(a)\, v(a) + u(b)\, v(b) \le \sqrt{u^2(a) + u^2(b)}\sqrt{v^2(a) + v^2(b)}$$

(Cauchy-Schwarz eşitsizliği) kullanılırsa

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b u(x)\, v(x)\, dx \le \frac{1}{2}\sqrt{u^2(a) + u^2(b)}\sqrt{v^2(a) + v^2(b)} \tag{4.12}$$

elde edilir. Böylece (4.12) eşitsizliği, $u(x)\, v(x)$ çarpımı konveks olduğunda geçerli olur.

$u(x)$ ve $v(x)$ konveks olup, çarpımı konveks değilse (4.11) eşitsizliği genellikle sağlanmaz. Örneğin, $u(x) = x^2$, $v(x) = (1-x)^2$ fonksiyonarı $[0,1]$ aralığında konveks fonksiyonlardır ve bu fonksiyonların çarpımı için (4.11) eşitsizliği $[a,b] = [0,1]$ aralığında yön değiştirir. Bunun nedeni, $x^2(1-x)^2$ çarpımının $[0,1]$ aralığında konveks olmamasıdır (bakınız Amrahov 2010). Buna karşın, $x^2(1-x)^2$ çarpımı için (4.11)'den daha zayıf olan (4.12) eşitsizliğinin sağlandığı kolayca gösterilebilir. Doğal olarak, şöyle bir soru ortaya çıkar: $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları konveks ise (4.12) eşitsizliğinin sağlandığını söyleyebilir miyiz? Bu sorunun yanıtı aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 4.28. (Amrahov 2010) $u(x)$ *ve* $v(x)$ *fonksiyonları* $[a,b]$ *aralığında verilmiş konveks ve negatif olmayan fonksiyonlar ise (4.12) eşitsizliği sağlanır.*

Biz Amrahov teoreminin bir benzerini, iki yerine, n tane fonksiyonun çarpımı için verip ispatlayacağız.

Önce basit bir lemma ispatlayalım.

Lemma 4.29. $u > 0$ *fonksiyonu* $[a,b]$ *aralığında konveks ise her* $n \in \mathbb{N}$ *için* u^n *fonksiyonu da konvekstir.*

Kanıt u, ikinci mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon ise, $u'' \geq 0$ olduğundan $(u^n)'' \geq 0$ olduğu da kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla, $u > 0$ ve u konveks ise u^n de konvekstir. Bilindiği gibi, konveks fonksiyonlar her noktada türevlenmek zorunda değildir. Buna göre genel durum için başka bir ispat yolu bulalım. u^n'nin her n için konveks olacağını tümevarımla gösterelim. Bir n için u^n'nin konveks olduğunu kabul edip, u^{n+1}'in konveks olduğunu göstereceğiz.

$u > 0$ ve u^n konveks olsun. Yani, her $x, y \in [a,b]$ ve $\alpha + \beta = 1$ olan her $\alpha, \beta > 0$ için

$$u^n(\alpha x + \beta y) \leq \alpha u^n(x) + \beta u^n(y) \tag{4.13}$$

sağlansın.

$$u^{n+1}(\alpha x + \beta y) \leq \alpha u^{n+1}(x) + \beta u^{n+1}(y) \tag{4.14}$$

olduğunu göstermek istiyoruz.

$u > 0$ ve u fonksiyonunun konveks olduğunu dikkate alarak, (4.13) eşitsizliği ile $u(\alpha x + \beta y) \leq \alpha u(x) + \beta u(y)$ eşitsizliğini taraf tarafa çarparsak

$$u^{n+1}(\alpha x + \beta y) \leq (\alpha u(x) + \beta u(y))(\alpha u^n(x) + \beta u^n(y))$$

olur. Böylece,

$$(\alpha u(x) + \beta u(y))(\alpha u^n(x) + \beta u^n(y)) \leq \alpha u^{n+1}(x) + \beta u^{n+1}(y) \tag{4.15}$$

olduğunu gösterirsek (4.14) ispatlanmış olacaktır.

(4.15), aşağıdaki eşitsizliklere dönüşür:

$$\alpha(1-\alpha)u^{n+1}(x) + \beta(1-\beta)u^{n+1}(y) \geq \alpha\beta(u(x)u^n(y) + u(y)u^n(x)),$$

$$u^{n+1}(x) + u^{n+1}(y) \geq u(x)\,u^n(y) + u(y)\,u^n(x)\,,$$

$$u^n(x)\,(u(x) - u(y)) + u^n(y)\,(u(y) - u(x)) \geq 0,$$

$$(u(x) - u(y))\,(u^n(x) - u^n(y)) \geq 0.$$

Sonuncu eşitsizliğin doğru olduğu aşikardır. Böylece lemma kanıtlanmış olur. □

Not 4.30. *Lemma 4.29'daki önermenin tersi doğru değildir. Örneğin,* $[a,b] = [0,1]$ *aralığında* $u(x) = x^{\frac{1}{n-1}}$, $(n \geq 3)$ *fonksiyonu konkav ve* $u^n(x) = x^{\frac{n}{n-1}}$ *fonksiyonu konvekstir.*

Şimdi, bu alt bölümün esas sonucunu bir teorem şeklinde verip kanıtlayalım.

Teorem 4.31. $n \geq 2$ *tam sayısı verilsin ve* $u_1 \geq 0$*,* $u_2 \geq 0$*,...,* $u_n \geq 0$ *fonksiyonları* $[a,b]$ *aralığında konveks olsunlar. O halde,*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\prod_{k=1}^n u_k(x)\right) dx \leq \frac{1}{2}\prod_{k=1}^n \left(u_k^n(a) + u_k^n(b)\right)^{\frac{1}{n}} \tag{4.16}$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt $u_k > 0$, $k = 1, 2, ..., n$, fonksiyonları $[a,b]$ aralığında konveks olduklarından Lemma 4.29'a göre u_k^n, $k = 1, 2, ..., n$, fonksiyonları da aynı aralıkta konvekstirler. O halde, H-H eşitsizliğine göre, her $k = 1, 2, ..., n$ için

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b u_k^n(x)\,dx \leq \frac{u_k^n(a) + u_k^n(b)}{2}$$

sağlanır. Her $k = 1, ..., n$ için $u_k > 0$ olduğundan bu eşitsizlikler taraf tarafa çarpılabilir:

$$\frac{1}{(b-a)^n}\prod_{k=1}^n \left(\int_a^b u_k^n(x)\,dx\right) \leq \frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^n \left(u_k^n(a) + u_k^n(b)\right). \tag{4.17}$$

Diğer yandan, Hölder eşitsizliğinin bir sonucuna göre

$$\left(\int_a^b \left(\prod_{k=1}^n u_k(x)\right) dx\right)^n \leq \prod_{k=1}^n \left(\int_a^b u_k^n(x)\,dx\right) \tag{4.18}$$

sağlanır.

(4.17) ve (4.18) eşitsizlikleri bir arada düşünülürse

$$\begin{aligned}\frac{1}{(b-a)^n}\left(\int_a^b\left(\prod_{k=1}^n u_k(x)\right)dx\right)^n &\leq \frac{1}{(b-a)^n}\prod_{k=1}^n\left(\int_a^b u_k^n(x)\,dx\right)\\ &\leq \frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^n\left(u_k^n(a)+u_k^n(b)\right)\end{aligned}$$

ve sonuç olarak,

$$\frac{1}{(b-a)}\int_a^b\left(\prod_{k=1}^n u_k(x)\right)dx \leq \frac{1}{2}\prod_{k=1}^n\left(u_k^n(a)+u_k^n(b)\right)^{\frac{1}{n}}$$

elde edilir. □

Sonuç 4.32. ($n=3$ durumu) $u>0$, $v>0$, $w>0$ *fonksiyonları* $[a,b]$ *aralığında konveks olsunlar. O halde,*

$$\frac{1}{(b-a)}\int_a^b u(x)\,v(x)\,w(x)\,dx \leq \frac{1}{2}\sqrt[3]{u^3(a)+u^3(b)}\sqrt[3]{v^3(a)+v^3(b)}\sqrt[3]{w^3(a)+w^3(b)}$$

eşitsizliği sağlanır.

Uyarı: u, v, w konveks ise, uvw çarpımı konveks olmayabilir. Örneğin, $u(x)=x^2$, $v(x)=x^2$, $w(x)=(2-x)^2$ fonksiyonları $[0,2]$ aralığında konvekstir. Oysa, $f(x)=u(x)\,v(x)\,w(x)=x^4(2-x)^2$ fonksiyonu için $f''(1)<0$ olduğundan f fonksiyonu $[0,2]$ aralığında konveks değildir.

Not 4.33. $n=2$ *için Teorem 4.31'den, Amrahov (2010) makalesindeki teorem elde edilir.*

Not 4.34. *Ion (2011) makalesinde, Amrahov (2010) teoreminin L_p-versiyonu ve Orlicz uzayında bir versiyonu verilmiştir. Söz konusu makalede L_p terimlerinde verilmiş eşitsizlik şöyledir:* $1<p<\infty$ *ve* $q=\frac{p}{p-1}$ $\left(\text{yani, } \frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1\right)$ *olsun. Ayrıca,* $u\geq 0$, $v\geq 0$ *fonksiyonları için* u^p *ve* v^q *konveks olsun. Bu takdirde,*

$$\frac{1}{(b-a)}\int_a^b u(t)\,v(t)\,dt \leq \frac{1}{2}\left(u^p(a)+u^p(b)\right)^{\frac{1}{p}}\left(v^q(a)+v^q(b)\right)^{\frac{1}{q}}$$

sağlanır. $p=q=2$ *olursa, Amrahov (2010) teoremi elde edilir.*

Ek: Yukarıda, $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$,..., $u_n \geq 0$ fonksiyonları için Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan

$$\int_a^b u_1(x) \cdots u_n(x)\, dx \leq \prod_{k=1}^{n} \left(\int_a^b u_k^n(x)\, dx \right)^{\frac{1}{n}}$$

eşitsizliği kullanılmıştı. Okuyucuya kolaylık sağlamak için bu eşitsizliği, örneğin, $n = 3$ durumunda kanıtlayalım. Bunun için önce Hölder eşitsizliğini hatırlatalım:

$f, g \geq 0$ ise,

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leq \left(\int_a^b f^p(x)\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g^q(x)\, dx \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi, $u,\ v,\ w \geq 0$ olsun. $p = 3$ ve $q = \frac{3}{2}$ olmak üzere, Hölder eşitsizliğine göre,

$$\int_a^b u(x)\, v(x)\, w(x)\, dx \leq \left(\int_a^b u^3(x)\, dx \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_a^b v^{\frac{3}{2}}(x)\, w^{\frac{3}{2}}(x)\, dx \right)^{\frac{2}{3}} \tag{4.19}$$

olur.

$$\begin{aligned} \int_a^b v^{\frac{3}{2}}(x)\, w^{\frac{3}{2}}(x)\, dx &\leq \cdots \text{(Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanıyoruz)} \cdots \\ &\leq \left(\int_a^b v^3(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b w^3(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

olur. Bunu (4.19)'da yazarsak,

$$\int_a^b u(x)\, v(x)\, w(x)\, dx \leq \left(\int_a^b u^3(x)\, dx \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_a^b v^3(x)\, dx \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_a^b w^3(x)\, dx \right)^{\frac{1}{3}}$$

olur ki bu da $n = 3$ için istenen eşitsizliktir.

4.1.3. Türevi konveks olan fonksiyonlar için çeşitli eşitsizlikler

Bu alt bölümde, $[a, b]$ aralığında türevlenen f fonksiyonunun türevinin konveks olması durumunda bu fonksiyonun integrali ile ilgili çeşitli eşitsizlikler ifade edilip ispatlanmaktadır.

Teorem 4.35. *$0 \leq a < b < \infty$ olmak üzere, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ türevlenen olup, türev fonksiyonu f' konveks olsun. O halde,*

$$\begin{aligned} & \left(\frac{b}{b-a}f(b) - \frac{a}{b-a}f(a)\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\ \leq\; & \frac{1}{b}\left((2a+b)f'(a) + (a+2b)f'(b)\right) \end{aligned} \tag{4.20}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, $f(x) = c(x-a)^2$ fonksiyonu için eşitsizlik eşitliğe dönüşür $\big($her iki tarafın değeri, $\frac{c}{3}(b-a)(a+2b)$ olur$\big)$.

Kanıt Kısmi integralleme formülü "tersten" okunursa

$$\begin{aligned} & (bf(b) - af(a)) - \int_a^b f(x)\,dx \\ =\; & \int_a^b xf'(x)\,dx \\ =\; & \cdots (x = (1-t)a + tb \text{ şeklinde değişken değiştirelim}) \cdots \\ =\; & (b-a)\int_0^1 ((1-t)a+tb)\, f'((1-t)a+tb)\,dt \\ =\; & \cdots ((1-t)a + tb \geq 0 \text{ ve } f' \text{ fonksiyonunun konveks olduğu kullanılıyor}) \cdots \\ \leq\; & (b-a)\int_0^1 ((1-t)a+tb)\,((1-t)f'(a) + tf'(b))\,dt \\ =\; & (b-a)\left(f'(a)\int_0^1 (1-t)((1-t)a+tb)\,dt + f'(b)\int_0^1 t((1-t)a+tb)\,dt\right) \\ =\; & (b-a)\left(f'(a)\int_0^1 \left(\left(t^2-2t+1\right)a - t^2 b + tb\right)dt + f'(b)\int_0^1 \left(t^2(b-a) + ta\right)dt\right) \\ =\; & (b-a)\left(f'(a)\left(\left(\frac{1}{3}-1+1\right)a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}b\right) + f'(b)\left(\frac{1}{3}(b-a) + \frac{1}{2}a\right)\right) \\ =\; & \frac{(b-a)}{b}\left(f'(a)(2a+b) + f'(b)(a+2b)\right) \end{aligned}$$

bulunur.

Basit hesaplamalarla, $f(x) = c(x-a)^2$ için eşitsizliğin eşitliğe dönüştüğü görülebilir. □

Teorem 4.36. *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ türevlenen ve türevi konveks olan bir fonksiyon olsun. O halde,*

$$\int_a^b xf(x)\,dx - \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{(b-a)^3}{24}\left(f'(a)+f'(b)\right) \tag{4.21}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, $f(x) = c(x-a)^2$ için eşitlik elde edilir.

Kanıt

$$\begin{aligned}
& \int_a^b (x-a)(b-x) f'(x)\,dx \\
= & \int_a^b (x-a)(b-x)\,df(x) \\
= & (x-a)(b-x) f(x)\big|_a^b - \int_a^b f(x)\left((x-a)(b-x)\right)'dx \\
= & -\int_a^b f(x)\left[(b-x)-(x-a)\right]dx \\
= & 2\int_a^b xf(x)\,dx - (a+b)\int_a^b f(x)\,dx
\end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned}
& 2\int_a^b xf(x)\,dx-(a+b)\int_a^b f(x)\,dx \\
= & \int_a^b (x-a)(b-x)f'(x)\,dx \\
= & \cdots (x=(1-t)a+tb,\ 0\le t\le 1 \text{ şeklinde değişken değiştirelim}) \cdots \\
= & (b-a)^3\int_0^1 t(1-t)f'((1-t)a+tb)\,dt \\
\le & (b-a)^3\int_0^1 t(1-t)\left[f'(a)(1-t)+f'(b)t\right]dt \\
= & (b-a)^3\left[f'(a)\int_0^1 t(1-t)^2\,dt+f'(b)\int_0^1 t^2(1-t)\,dt\right] \\
= & (b-a)^3\left[f'(a)\int_0^1 t\left(t^2-2t+1\right)dt+f'(b)\int_0^1\left(t^2-t^3\right)dt\right] \\
= & (b-a)^3\left[f'(a)\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)+f'(b)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right] \\
= & (b-a)^3\frac{1}{12}\left(f'(a)+f'(b)\right)
\end{aligned}$$

bulunur.

Buradan, istenen (4.21) eşitsizliği elde edilir.

$f(x)=c(x-a)^2$ fonksiyonu için (4.21) eşitsizliğinin sağ ve sol tarafının $c\frac{(b-a)^4}{12}$ sayısına eşit olduğu, yani $f(x)=c(x-a)^2$fonksiyonu için (4.21) eşitsizliğinin eşitliğe dönüştüğü basit hesaplamalarla görülür. □

Teorem 4.37. *$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için türev fonksiyonu f' konveks ise*

$$f(b)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\le\frac{b-a}{b}\left(f'(a)+2f'(b)\right) \tag{4.22}$$

ve

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-f(a)\le\frac{b-a}{b}\left(2f'(a)+f'(b)\right) \tag{4.23}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Ayrıca, $f(x)=c(x-a)^2$ için her iki eşitsizlik de eşitliğe dönüşür.

Kanıt

$$\begin{aligned}\int_a^b (x-a) f'(x)\,dx &= \int_a^b (x-a)\,df(x) \\ &= (x-a) f(x)\big|_a^b - \int_a^b f(x)\,dx \\ &= (b-a) f(b) - \int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned}& f(b) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\ = \;& \frac{1}{b-a}\int_a^b (x-a) f'(x)\,dx \\ = \;& \cdots \left(x = (1-t)a + tb \text{ şeklinde değişken değiştiriyoruz}\right) \cdots \\ = \;& (b-a)\int_0^1 t f'((1-t)a + tb)\,dt \\ \leq \;& (b-a)\left[f'(a)\int_0^1 t(1-t)\,dt + f'(b)\int_0^1 t^2 dt\right] \\ = \;& (b-a)\left[\frac{1}{6} f'(a) + \frac{1}{3} f'(b)\right] = \frac{b-a}{6}\left(f'(a) + 2f'(b)\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece (4.22) eşitsizliği kanıtlanmış oldu.

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\int_a^b (b-x) f'(x)\,dx &= \int_a^b (b-x)\,df(x) \\ &= (b-x) f(x)\big|_a^b + \int_a^b f(x)\,dx \\ &= \int_a^b f(x)\,dx - (b-a) f(a)\end{aligned}$$

formülünden

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - f(a) = \frac{1}{b-a}\int_a^b (b-x)\,f'(x)\,dx$$

elde edilir ve burada $x = (1-t)\,a + tb$, $0 \leq t \leq 1$ şeklinde değişken değiştirerek ve sonra da

$$f'((1-t)\,a + tb) \leq (1-t)\,f'(a) + tf'(b)$$

eşitsizliğini kullanarak (4.23) eşitsizliğini elde ederiz.

$f(x) = c\,(x-a)^2$ fonksiyonu için (4.22) ve (4.23) eşitsizliklerinin eşitliğe dönüştüğü basit hesaplamalarla çıkar. □

Sonuç 4.38. *f' fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{1}{2}\left(f'(a)+f'(b)\right) \tag{4.24}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu sonuncu eşitsizlik, (4.22) ve (4.23) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanarak elde edilir (aslında sağ H-H eşitsizliği konveks f' fonksiyonuna uygulanarak (4.24) eşitsizliği elde edilebilir).

Örnek 4.39. *$f(x) = \ln x$, $0 < a < x < b$ için $f'(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konvekstir ve bu durumda, (4.24) eşitsizliğine göre,*

$$\frac{\ln b - \ln a}{b-a} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\ln\frac{b}{a} \leq \frac{b^2-a^2}{2ab}$$

eşitsizliği elde edilir.

Örnek 4.40. *$0 \leq a \leq x \leq b$ olmak üzere $f(x) = -e^{-x}$ fonksiyonunun türevi $f'(x) = e^{-x}$ konveks fonksiyondur. O halde, (4.24)'e göre*

$$\frac{\left(-e^{-b}\right)-\left(-e^{-a}\right)}{b-a} \leq \frac{1}{2}\left(e^{-a}+e^{-b}\right) \Longleftrightarrow$$

$$2\left(e^{-a}-e^{-b}\right) \leq (b-a)\left(e^{-a}+e^{-b}\right) \Longleftrightarrow$$

$$2\left(e^b - e^a\right) \le (b-a)\left(e^b + e^a\right)$$
$$\Rightarrow \frac{e^b - e^a}{e^b + e^a} \le \frac{b-a}{2}$$

olur. Özel halde, $b = 2a$ için

$$\frac{e^a - 1}{e^a + 1} \le \frac{a}{2}$$

olur.

Yukarıdaki teoremlerde, $[a, b]$ aralığında konveks kabul edilen $f'(x)$ fonksiyonu için Jensen eşitsizliği kullanarak, f'nin $[a, b]$ üzerinden integrali için çeşitli eşitsizlikler elde edilmiştir.

Şimdi de konveks f' için H-H eşitsizliğini kullanarak f'nin integrali için eşitsizlikler elde edelim.

f' fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks olsun. O halde, H-H eşitsizliğine göre her $x \in (a, b)$ için

$$\frac{f'(a) + f'(x)}{2} \ge \frac{1}{x-a}\left(f(x) - f(a)\right) \ge f'\left(\frac{a+x}{2}\right) \tag{4.25}$$

ve

$$\frac{f'(x) + f'(b)}{2} \ge \frac{1}{b-x}\left(f(b) - f(x)\right) \ge f'\left(\frac{x+b}{2}\right) \tag{4.26}$$

eşitsizlikleri sağlanacaktır (yukarıda f' fonksiyonunun konveks olmasından ötürü sürekli olması ve dolayısıyla,

$$\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a) \;\text{ ve }\; \int_x^b f'(t)\,dt = f(b) - f(x)$$

eşitlikleri kullanılmaktadır).

(4.25)'ten

$$\frac{1}{2}f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f'(x)(x-a) \ge f(x) - f(a) \ge f'\left(\frac{a+x}{2}\right)(x-a)$$

olur. Yukarıdaki eşitsizlik terim-terim integrallenirse,

$$\frac{1}{2}f'(a)\int_a^b (x-a)\,dx + \frac{1}{2}\int_a^b f'(x)(x-a)\,dx$$
$$\ge \int_a^b f(x)\,dx - f(a)(b-a) \ge \int_a^b f'\left(\frac{a+x}{2}\right)(x-a)\,dx \tag{4.27}$$

elde edilir.

$$\frac{1}{2}f'(a)\int_a^b (x-a)\,dx = \frac{1}{2}f'(a)\frac{1}{2}(x-a)^2\,|_a^b$$
$$= \frac{1}{4}f'(a)(b-a)^2\,; \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_a^b f'(x)(x-a)\,dx &= \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)\,df(x)\\ &= \frac{1}{2}\left[(x-a)f(x)\,|_a^b - \int_a^b f(x)\,dx\right]\\ &= \frac{1}{2}(b-a)f(b) - \frac{1}{2}\int_a^b f(x)\,dx \end{aligned} \tag{4.29}$$

ve

$$\begin{aligned} &\int_a^b f'\left(\frac{a+x}{2}\right)(x-a)\,dx\\ =\ &\cdots\left(\frac{a+x}{2} = t \Longleftrightarrow x = 2t-a;\ dx = 2dt,\ a \le t \le \frac{a+b}{2}\right)\cdots\\ =\ &\int_a^{\frac{a+b}{2}} f'(t)(2t-2a)\,2dt = 4\int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a)\,df(t)\\ =\ &4\left((t-a)f(t)\,|_a^{\frac{a+b}{2}} - \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)\,dt\right)\\ &= 4\frac{b-a}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right) - 4\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)\,dt \end{aligned} \tag{4.30}$$

olduğundan

(4.28), (4.29) ve (4.30) formülleri (4.27)'de dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}f'(a)(b-a)^2+\frac{1}{2}(b-a)f(b)-\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\,dx \\ \geq\ & \int_a^b f(x)\,dx-f(a)(b-a) \\ \geq\ & 2(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)-4\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx \end{aligned}$$

olur.

Yukarıdaki eşitsizlikler zinciri aşağıdaki iki eşitsizlik şeklinde yazılabilir:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{1}{3}(2f(a)+f(b))+\frac{1}{6}f'(a)(b-a) \tag{4.31}$$

ve

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx+\frac{4}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx \geq f(a)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right). \tag{4.32}$$

Şimdi de benzer işlemleri (4.26) eşitsizliğine uygulayalım: (4.26)'nın her tarafı $(b-x)>0$ ile çarpılıp integral alınırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\int_a^b (b-x)f'(x)\,dx+\frac{1}{2}f'(b)\int_a^b (b-x)\,dx \\ & \geq f(b)(b-a)-\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b f'\left(\frac{x+b}{2}\right)(b-x)\,dx \end{aligned} \tag{4.33}$$

olur.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\int_a^b (b-x)f'(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_a^b (b-x)\,df(x) \\ = & \frac{1}{2}\left((b-x)f(x)\big|_a^b+\int_a^b f(x)\,dx\right)=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\,dx-\frac{1}{2}(b-a)f(a); \end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f'(b)\int_a^b (b-x)\,dx &= -\frac{1}{4}f'(b)(b-x)^2\big|_a^b \\ &= \frac{1}{4}f'(b)(b-a)^2 \end{aligned} \tag{4.35}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f'\left(\frac{x+b}{2}\right)(b-x)\,dx \\
&= \quad ...\left(\frac{x+b}{2}=t \Leftrightarrow x=2t-b;\, dx=2dt;\, \frac{a+b}{2}\leq t\leq b\right)... \\
&= \quad \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f'(t)\,2\,(b-t)\,2dt = 4\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(b-t)\,df(t) \\
&= \quad 4\left((b-t)\,f(t)\,|_{\frac{a+b}{2}}^{b} + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(t)\,dt\right) \\
&= 4\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(t)\,dt - 2(b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad (4.36)
\end{aligned}$$

olduğundan

(4.34), (4.35) ve (4.36)'ı (4.33)'te dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}(b-a)\,f(a) + \frac{1}{4}f'(b)\,(b-a)^2 \\
&\geq f(b)\,(b-a) - \int_a^b f(x)\,dx \geq 4\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)\,dx - 2(b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad (4.37)
\end{aligned}$$

olur. (4.37) eşitsizlikler zincirini aşağıdaki iki eşitsizlik biçiminde yazarsak

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \geq \frac{1}{3}\left(f(a)+2f(b)\right) - \frac{1}{6}f'(b)\,(b-a) \qquad (4.38)$$

ve

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx + \frac{4}{b-a}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)\,dx \leq f(b) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad (4.39)$$

olur.

(4.31) ve (4.38)'den

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{1}{3}\left(2f(a)+f(b)\right) + \frac{1}{6}f'(a)\,(b-a) \\
\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \geq \frac{1}{3}\left(f(a)+2f(b)\right) - \frac{1}{6}f'(b)\,(b-a)
\end{array}\right\} \qquad (4.40)$$

elde edilir. Benzer şekilde, (4.32) ve (4.39)'dan

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx + \frac{4}{b-a}\int\limits_{a}^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx \geq f(a) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ \frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx + \frac{4}{b-a}\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)\,dx \leq f(b) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{array} \right\} \tag{4.41}$$

olur.

(4.41) eşitsizlikleri birleştirilerek, aşağıdaki gibi (daha estetik şekilde) yazılabilir:

$$\begin{aligned} f(b) - \frac{4}{b-a}\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)\,dx &\geq \frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &\geq f(a) - \frac{4}{b-a}\int\limits_{a}^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.41. *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ türevlenen olup türevi konveks ise aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur:*

a)

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\left(f(a) + 2f(b)\right) - \frac{1}{6}f'(b)(b-a) &\leq \frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx \\ &\leq \frac{1}{3}\left(2f(a) + f(b)\right) + \frac{1}{6}f'(a)(b-a). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f(a) - \frac{4}{b-a}\int\limits_{a}^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx &\leq \frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &\leq f(b) - \frac{4}{b-a}\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)\,dx. \end{aligned}$$

Ayrıca, $f(x) = c(x-a)^2$ için eşitsizliklerin tamamı eşitlik haline döner.

Örnek 4.42. *$[a,b] = [1,e]$ ve $f(x) = \ln x$ olsun. $f'(x) = \frac{1}{x}$ konveks fonksiyondur. O halde, yukarıdaki teoremin a) bendinde $a = 1$, $b = e$, $f(x) = \ln x$ ve $f'(x) = \frac{1}{x}$ yazılırsa basit hesaplamalarla,*

$$3 + \frac{1}{e} < \frac{6}{e-1} < e + 1$$

eşitsizliği elde edilir ki hesap makinesinde hesaplandığında bu eşitsizlik

$$0,561313... < 0,58197... < 0,61971...$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek 4.43. *$f(x) = e^x$ alırsak Teorem 4.41'in a) bendi kullanılarak basit hesaplamalarla aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:*

$$e^b(2 + a - b) < 6\frac{e^b - e^a}{b-a} - 2\left(e^a + e^b\right) < e^a(2 - a + b).$$

Sonuç 4.44. *(4.41) eşitsizlikleri taraf tarafa çıkarılırsa*

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)\,dx - \int_{a}^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx \leq \frac{1}{4}(b-a)(f(b) - f(a))$$

olur. Örneğin, $0 < a \leq x \leq b < \infty$ olmak üzere, $f(x) = \ln x$ alınırsa basit hesaplamalarla,

$$a^{\frac{3a+b}{4(a+b)}} b^{\frac{a+3b}{4(a+b)}} \leq \frac{a+b}{2}$$

elde edilir.

$\alpha = \frac{3a+b}{4(a+b)}$ ve $\beta = \frac{a+3b}{4(a+b)}$ için $\alpha + \beta = 1$ olduğundan, genelleşmiş AGO eşitsizliğine göre,

$$a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b = \frac{3a+b}{4(a+b)}a + \frac{a+3b}{4(a+b)}b$$

yazılabilir. Sonuç olarak elde ettiğimiz yukarıdaki eşitsizlikte ise, sağ tarafta $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ sayısı (a ve b'nin klasik aritmetik ortalaması) bulunmaktadır.

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, Jensen ve Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili kapsamlı derleme yapılmış olup Jensen eşitsizliğinin önemli sonuçlarından biri olan, $[a,b]$ aralığındaki konveks f fonksiyonu için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

şeklinde ifade edilen Hermite-Hadamard eşitsizliğinin yeni bir ispatı verilmiştir.

Ayrıca, bu eşitsizlik ile $f, g \geq 0$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leq \left(\int_a^b f^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g^q(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklinde ifade edilen Hölder eşitsizliğinin birleştirilmesiyle elde olunan, $n \geq 2$ tam sayısı ve $[a,b]$ aralığında konveks olan $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$,..., $u_n \geq 0$ fonksiyonları için,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\prod_{k=1}^{n} u_k(x)\right) dx \leq \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}\left(u_k^n(a)+u_k^n(b)\right)^{\frac{1}{n}}$$

şeklinde yeni bir eşitsizlik verilmiştir.

Son olarak, türevi konveks olan fonksiyonların integralleri ile ilgili şu eşitsizlikler elde edilmiştir:

1. $0 \leq a < b < \infty$, $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ türevlenen ve f' konveks olmak üzere

$$\begin{aligned}&\left(\frac{b}{b-a}f(b)-\frac{a}{b-a}f(a)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\\ \leq\ & \frac{1}{b}\left[(2a+b)\,f'(a)+(a+2b)\,f'(b)\right].\end{aligned}$$

2. $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ türevlenen ve f' konveks olmak üzere

$$\int_a^b xf(x)\,dx - \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{(b-a)^3}{24}\left(f'(a)+f'(b)\right).$$

3. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ türevlenen ve f' konveks olmak üzere

$$f(b)-\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx\leq\frac{b-a}{b}\left[f'(a)+2f'(b)\right]$$

ve

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx-f(a)\leq\frac{b-a}{b}\left[2f'(a)+f'(b)\right].$$

4. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ türevlenen ve f' konveks olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\left(f(a)+2f(b)\right)-\frac{1}{6}f'(b)(b-a) &\leq \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx\\ &\leq \frac{1}{3}\left(2f(a)+f(b)\right)+\frac{1}{6}f'(a)(b-a)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}f(a)-\frac{4}{b-a}\int\limits_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx &\leq \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\\ &\leq f(b)-\frac{4}{b-a}\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

5. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ türevlenen ve f' konveks olmak üzere

$$\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx-\int\limits_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx\leq\frac{1}{4}(b-a)\left(f(b)-f(a)\right).$$

6. KAYNAKLAR

Abramovich, S., Barić, J., Pexcxarixcx, J. 2008. Fejer and Hermite-Hadamard type inequalities for superquadratic functions. *J. Math. Anal. Appl., 344: 1048-1056.*

Agarwal, R.P. and Dragomir, S.S. 1996. An application of Hayashi's inequality for differentiable functions. *Computers Math. Applic*., 32 (6): 95-99.

Amrahov, Ş.H. 2010. A note on Hadamard inequalities for the product of the convex functions. *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences Series,* 38 (1): 92-95.

Azpeitia, A.G. 1994. Convex functions and the Hadamard inequality. *Revista Colombiana Mat*., 28: 7–12.

Bakula, M.K. and Pečarić, J. 2004. Note on some Hadamard-type inequalities. *J. Ineq. Pure Appl. Math.*, 5 (3): Article 74.

Bakula, M.K., Özdemir M.E. and Pečarić, J. 2008. Hadamard tpye inequalities for m-convex and (α,m)-convex functions. *J. Ineq. Pure Appl. Math.*, 9 (4): Art. 96.

Beckenbach, E.F. and Bellman, R. 1961. Inequalities. Springer-Verlag, New York/Berlin.

Dahmani, Z. 2010. On Minkowski and Hermite–Hadamard integral inequalities via fractional integration. *Ann. Funct. Anal.,* 1 (1): 51–58.

Dragomir, S.S. and Agarwal, R.P. 1998. Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula. *Appl. Math. Lett.,* 11 (5): 91-95.

Dragomir, S.S. and Fitzpatrick, S. 1999. The Hadamard inequalities for s-convex functions in the second sense. *Demonstr. Math.*, 32 (4): 687–696.

Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M. 2000. Selected topics on Hermite–Hadamard inequalities and applications. RGMIA Monographs, Victoria University.

Dragomir, S.S. 2002. On some new inequalities of Hermite–Hadamard type for m-convex functions. *Tamkang J. Math.,* 3 (1).

Dragomir, S.S. and Wang, S. 1997. An inequality of Ostrowski-Grüss type and its applications to the estimation of error bounds for some special means and for some numerical quadrature rule. *Computers Math. Applic.,* 33 (11): 15-20.

Dragomir, S.S. and Wang, S. 1998. Applications of Ostrowski's inequality to the estimation of error bounds for some special means and for some numerical quadrature rule. *Appl. Math. Lett.,* 11 (1): 105-109.

El Farissi, A. 2010. Simple proof and refinement of Hermite-Hadamard inequality. J Math. Inequal, 4 (3): 365-369.

Florea, A. and Niculescu, C. P. 2007. A Hermite-Hadamard inequality for convex-concave symmetric functions. *Bull. Soc. Sci. Math. Roum.*, 50 (98): No. 2, 149-156.

Gill, P.M., Pearce, C.E.M. and Pečarić, J. 1997. Hadamard's inequality for r-convex functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 215 (2): 461–470.

Hadamard, J. 1893. Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considerée par Riemann, *J. Math. Pures et Appl.*, 58: 171–215.

Hardy, G.H., Littlewood, J.E. and Polya, G. 1934. Inequalities. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK.

Hermite, Ch. 1883. Sur deux limites d'une intégrale dé finie, *Mathesis*, 3: 82.

Ion, D. A. 2007. Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions. Annals of University of Craiova, *Math.Comp.Sci.Ser.*, 34: 82-87.

Ion, D. A. 2011. On an inequality due to Amrahov. Annals of the University of Craiova, *Mathematics and Computer Science Series*, 38 (1): 92-95.

Kazarinoff, N. D. 2003. Analytic Inequalities. Dover Publications, New York.

Kırmacı, U.S., Bakula, M.K., Özdemir, M.E. and Pečarić, J. 2007. Hadamard-tpye inequalities for s-convex functions. *Appl. Math. Comput.* 193: 26–35.

Martos, B. 1975. Nonlinear Programming, Theory and Methods. American Elsevier Publishing Company, New York.

Mitrinović, D.S. 1970. Analytic Inequalities. Springer-Verlag, New York/Berlin.

Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M. 1993. Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic, Dordrecht.

Niculescu, C. P. and Persson, L.-E. 2003/2004. Old and new on the Hermite-Hadamard inequality. *Real Anal. Exchange*, 29: 663-686.

Niculescu, C. P. and Persson, L.-E. 2018. Convex Functions and Their Applications. A Contemporary Approach., Springer-Verlag, New York.

Özdemir M.E., Avci, M. and Set, E. 2010. On some inequalities of Hermite–Hadamard type via m-convexity. *Appl. Math. Lett.,* 23 (9): 1065–1070.

Park, J. 2013. Some Hermite-Hadamard-like Type Inequalities for Logarithmically Convex Functions. *Int. Journal of Math. Analysis*, Volume 7, no. 45: 2217-2233.

Sarıkaya, M.Z., Set, H., Yaldız, H. and Başak, N. 2013. Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities. *Math. Comput. Model*, 57: 2403-2407.

Set, E., Özdemir M.E. and Dragomir, S.S. 2010. On the Hermite–Hadamard inequality and other integral inequalities involving two functions. *J. Inequal. Appl.*, 9. Article ID 148102.

Steele, J. M. 2004. The Cauchy-Schwarz Master Class. Cambridge University Press, New York.

Varošanec, S. 2007. On h-convexity. *J. Math. Anal. Appl.*, Volume 326, Issue 1, 303-311.

ÖZGEÇMİŞ

MEHMET EMİN TAMAR

mehmetemin.tamar@agu.edu.tr

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Lisans:	Dokuz Eylül Üniversitesi
2011-2017	Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, İzmir
Yüksek Lisans:	Akdeniz Üniversitesi
2017-devam	Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Araştırma Görevlisi:	Abdullah Gül Üniversitesi
2020-devam	Bilgisayar Bilimleri Fakültesi, Uygulamalı Matematik Bölümü, Kayseri