T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

HARDY-LITTLEWOOD MAKSİMAL FONKSİYONUN SINIRLILIĞI VE UYGULAMA ALANLARI ÜZERİNE

Rümeysa ARGIN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS

HAZİRAN 2021

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

HARDY-LITTLEWOOD MAKSİMAL FONKSİYONUN SINIRLILIĞI VE UYGULAMA ALANLARI ÜZERİNE

Rümeysa ARGIN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS

HAZİRAN 2021

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARDY-LITTLEWOOD MAKSİMAL FONKSİYONUN SINIRLILIĞI VE UYGULAMA ALANLARI ÜZERİNE

Rümeysa ARGIN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS

Bu tez 25/06/2021 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN (Danışman)
Doç. Dr. Sinem SEZER EVCAN Sezer S
Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

ÖZET

HARDY-LITTLEWOOD MAKSİMAL FONKSİYONUN SINIRLILIĞI VE UYGULAMA ALANLARI ÜZERİNE

Rümeysa ARGIN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN
Haziran 2021; 54 sayfa

Bu tezimizde

$$M(f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|\, dy, \;\; x \in \mathbb{R}^n$$

ile tanımlanan Fourier harmonik analizinin önemli operatörlerinden biri Hardy-Littewood Maksimal operatörünü ve Fourier-Bessel harmonik analizinde genelleşmiş kayma tarafından doğrulan

$$M_\nu f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,r)|_\nu} \int\limits_{B(0,r)} T^y |f(x)| y_n^{2\nu} dy, \;\; x \in \mathbb{R}_+^n, \; \nu > 0$$

maksimal fonksiyonu göz önüne alacağız. Lebesque ve ağırlıklı Lebesque uzaylarında bu fonksiyonların sınırlılığını ve uygulama alanlarını inceleyeceğiz.

ANAHTAR KELİMELER: Maksimal fonksiyon, Maksimal operatör, Lebesque uzayları, İnterpolasyon , Genelleşmiş kayma, Ağırlıklı Lebesque uzayları.

JÜRİ: Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN
Doç. Dr. Sinem SEZER EVCAN
Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

ABSTRACT

ON THE BOUNDEDNESS OF THE HARDY-LITTLEWOOD MAXIMAL FUNCTION AND ITS APPLICATION AREAS

Rümeysa ARGIN

MSc Thesis in MATHEMATICS
Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN
June 2021; 54 pages

In the thesis, we will consider Hardy-Littlewood Maxsimal operator, which is one of the important operators in Fourier harmonic analysis, defined by

$$M(f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|\, dy, \;\; x \in \mathbb{R}^n$$

and Maxsimal function

$$M_\nu f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,r)|_\nu} \int\limits_{B(0,r)} T^y |f(x)| y_n^{2\nu} dy, \;\; x \in \mathbb{R}^n_+, \; \nu > 0$$

generated by generalized translation in Fourier-Bessel harmonic analysis. We investigate the boundedness and the application areas of these operators on Lebesque and weighted Lebesque spaces.

KEYWORDS: Maxsimal function, Maksimal operator, Lebesque spaces, Interpolation, Generalized translation, Weighted Lebesque spaces.

COMMITTEE: Assoc.Prof.Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN
Assoc.Prof.Dr. Sinem SEZER EVCAN
Asst.Prof.Dr. Zafer ŞANLI

ÖNSÖZ

Fourier harmonik analizinin önemli operatörlerinden biri olan Laplace diferansiyel operatörü ile ilişkilendirilen Hardy-Littlewood maksimal operatörü, fonksiyon uzaylarında birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Hardy-Littlewood maksimal operatörü hem birçok operatörün noktasal yakınsama probleminin incelenmesinde kullanılmış hem de bu operatörün Lebesque uzaylarında, ağırlıklı-Lebesque uzaylarında, Morrey, Sobolev, Orlicz gibi birçok fonksiyon uzaylarında sınırlılığı incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında öncelikle Fourier harmonik analizindeki Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunun Lebesque uzaylarındaki sınırlılığını interpolasyon teoremlerini kullanarak ve daha sonra Fourier-Bessel harmonik analizinde tanımlanan maksimal operatörün ağırlıklı Lebesque uzaylarında sınırlılığı ve uygulama alanlarını araştırıp, ifade edeceğiz.

Çalışmamız boyunca kıymetli zamanını ve değerli bilgilerini benden esirgemeyen danışmanım Sayın Doç. Dr. Simten Bayrakçı Doğan'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans olarak sunduğum "Hardy-Littlewood Maksimal Fonksiyonunun Sınırlılığı ve Uygulama Alanları Üzerine" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

25/06/2021

Rümeysa ARGIN

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$\mathbb{R}^n$	: n-boyutlu Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n_+$	: Sonuncu değişkeni pozitif, n-boyutlu Reel sayılar kümesi
$B(x,r)$	: $x-$merkezli, $r>0$ yarıçaplı yuvar
$\|E\|$	: E kümesinin Lebesque ölçümü
$\|E\|_\nu$	: E kümesinin ağırlıklı Lebesque ölçümü
$f * g$	: f ile g 'nin girişimi
$f \otimes g$	: f ile g 'nin genelleşmiş girişimi

Kısaltmalar:

$h.h.y$	: Hemen hemen her yerde
$\liminf\limits_{n\to\infty}$	: Alt limit
$\partial\Omega$	: Ω'nın sınırı
$f^\wedge$	: f'nin Fourier dönüşümü
L_∞	: $L_{\infty,\nu}$

1. GİRİŞ

Fourier harmonik analizinin teknik araçlarından biri de maksimal fonksiyonlardır. Maksimal fonksiyonların en önemlisi Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonudur.

Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$M(f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|\, dy, \;\; x \in \mathbb{R}^n$$

biçiminde tanımlanır. Fourier-Bessel harmonik analizinde genelleşmiş kaymanın doğurduğu maksimal fonksiyon ise

$$M_\nu f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,r)|_\nu} \int\limits_{B(0,r)} T^y |f(x)| y_n^{2\nu} dy, \;\; x \in \mathbb{R}^n_+, \; \nu > 0$$

şeklindedir.

Maksimal fonksiyonlar, fonksiyonların diferansiyellenebilme özelliklerinin incelenmesinde, fonksiyon uzaylarında bazı operatörlerin yakınsama problemlerinde önemli rol oynamaktadır. Hardy ve Littlewood maksimal fonksiyonu kullanılarak Lebesque, ağırlıklı-Lebesque, Morrey, Sobolev-Morrey, Orlicz, Orlicz-Morrey gibi birçok fonksiyon uzaylarında operatörlerin sınırlılığı, ters bulma problemleri ve daha birçok çalışma Hardy, Littlewood, Calderon, Zygmund, Muckenhoupt, Stein, Weiss, Coifman, Fefferman, Torchinsky, Gadjiev, Aliyev, Guliyev, Bayrakci ve birçok matematikçi tarafından yapılmış ve halen çalışmalar devam etmektedir.

Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu, bir boyutta Hardy ve Littlewood tarafından 1930 yılında, n-boyutta Wiener tarafından 1939 yılında tanımlanıp Lebesque uzaylarında sınırlılığı incelenmiştir.

Çalışmanın amacı, öncelikle Fourier harmonik analizinde Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonun Lebesque uzaylarında sınırlılığını gösteren Hardy-Littlewood-Wiener tarafından kanıtlanan teoremi ifade etmek ve uygulandığı alanları görmektir.

Bunun için öncelikle Lebesque uzayları detaylı bir şekilde incelenmiştir. Lebesque uzaylarında bazı önemli eşitsizlikleri ispatları ile verdik. Ayrıca fonksiyon uzaylarında operatörlerin sınırlığını göstermek için oldukça önemli olan interpolasyon teoremlerini, Riesz-Thorin ve Marcinkiewicz interpolasyon teoremini ifade edip, ispatlarını verdik dahası onların uygulama alanlarını inceledik. Marcinkiewicz interpolasyon teoremini kullanarak Hardy-Littlewood maksimal operatörün sınırlığını gösterildi.

Ardından Fourier-Bessel harmonik analizinde tanımlanan Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunun sınırlılığını ve uygulama alanlarını, literatürdeki bazı çalışmaları özetledik.

Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunun hem Lebesque hem de ağırlıklı Lebesque uzaylarında sınırlılığını inceleyerek, interpolasyon yöntemlerini öğrenerek hem bir sonraki akademik çalışmamız için bilgi birikimi oluşturduk hem de bu konuda çalışma yapmak isteyen bilim insanlarına Türkçe kaynak sunduk.

2. KAYNAK TARAMASI

2.1. Reel Analizin Bazı Temel Tanım ve Teoremleri

Çalışmamızın bu kısmında ileride bizim için gerekli olacak reel analizin bazı temel tanım ve teoremlerini ifade edeceğiz. Teoremlerin ispatlarına yanlarında verilen kaynaklardan ulaşabiliriz. Temel tanımlar için Folland (1984) ve Grafakos $(2008-2009)$ kaynaklarına bakılabilir.

Tanım 2.1. *n-boyutlu Öklid uzayı*

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$$

ve $E \subset \mathbb{R}^n$ ölçülebilir kümesinin Lebesque ölçümü $|E|$ olsun.

$\mathbb{R}^n$ de $x-$merkezli $r > 0$ yarıçaplı (açık) yuvar

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\}$$

ile tanımlanır. Ayrıca $\mathbb{R}^n$ de f ve g Lebesque ölçülebilir fonksiyonları için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) \neq g(x)\}| = 0$$

ise f ile g fonksiyonlarına hemen hemen heryerde eşit fonksiyonlar denir.

$$f = g \ \ h.h.x \in \mathbb{R}^n$$

ile gösterilir.

Tanım 2.2. *$\mathbb{R}^n$ 'de local(yerel) integrallenebilen fonksiyonlar kümesi*

$$L^1_{loc} = L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \int\limits_K |f(x)|\, dx < \infty, \forall K \subset \mathbb{R}^n, \ \ K \text{ kompakt} \right\}$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.3. *(Folland (1984)) (Fubini Teoremi) $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ve $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ $\sigma-$sonlu ölçüm uzayları, $\mu \times \nu$ ise $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ üzerinde μ ve ν nin çarpımı olsun. Eğer $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mu \times \nu$ ölçümüne göre integrallenebilir ise $h.h.x \in X$ için $\int\limits_Y f(x,y)d\nu(y)$ ve $h.h.y \in Y$ için $\int\limits_X f(x,y)d\mu(x)$ integralleri sonludur ve*

$$\int\limits_{X \times Y} f(x,y)d(\mu \times \nu) = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x,y)d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x,y)d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.4. *(Folland (1984)) (İntegraller İçin Minkowski Eşitsizliği)*

$(X,\mathcal{M},\mu)$ *ve* $(Y,\mathcal{N},\nu)$ $\sigma-$*sonlu ölçüm uzayları ve* $\varphi(x,y)$, $\mathcal{M}\times\mathcal{N}$ *ölçülebilir fonksiyon ve* $p\geq 1$ *olmak üzere integraller için Minkowski eşitsizliği*

$$\left(\int\limits_X\left(\int\limits_Y\left|\varphi(x,y)\right|d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\leq\int\limits_Y\left(\int\limits_X\left|\varphi(x,y)\right|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} d\nu(y)$$

biçimindedir.

Teorem 2.5. *(Folland (1984)) (Lebesque baskın yakınsama teoremi)* $(X,\mathcal{M},\mu)$ *ölçüm uzayında* $\{f_n\}$ *ölçülebilir fonksiyonlar dizisi ve* f *fonksiyonu verilmiş olsun.*

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\ h.h.x\in X$$

ve

$$|f_n(x)|\leq\varphi(x),\ \ \forall n$$

olacak şekilde X *de integrallenebilir* φ *fonksiyonu var olsun. Bu durumda* f *fonksiyonu* X *de integrallenebilirdir ve*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X f_n(x)\,dx=\int\limits_X f(x)\,dx$$

dir.

Teorem 2.6. *(Folland (1984)) (Monoton yakınsama teoremi)* $(X,\mathcal{M},\mu)$ *ölçüm uzayında negatif olmayan ve azalmayan* $f_n:X\to[0,\infty]$ *ölçülebilir fonksiyonlar dizisi verilmiş olsun. Yani,* $\forall x\in X$, $\forall n\geq 1$ *için*

$$0\leq f_1(x)\leq f_2(x)\leq...\leq f_{n-1}(x)\leq f_n(x)\leq\infty.$$

Ayrıca

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\ h.h.x\in X$$

olsun. Bu durumda f *fonksiyonu* X *de ölçülebilirdir ve*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X f_n(x)\,dx=\int\limits_X f(x)\,dx$$

dir. Burada f , X *de Lebesque integrallenebilir olmak zorunda değildir. İntegral sonsuz da olabilir.*

Teorem 2.7. *(Folland (1984)) (Fatou Lemması)* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *ölçüm uzayında negatif olmayan* f_n *ölçülebilir fonksiyonlar dizisi verilmiş olsun. Bu durumda*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n(x)d\mu(x) \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)d\mu(x)$$

dir.

2.2. L_p Uzayları

Bu bölümde analizinin önemli fonksiyon uzaylarından biri olan L_p, $1 \le p \le \infty$ Lebesque uzaylarını detaylı çalışıp, araştıracağız. Temel kavramlar için Folland (1984) ve Grafakos $(2008 - 2009)$ kaynaklarına bakılabilir. Diğer özel kavramlar için detaylı bilgiler yanlarında verilen kaynaklarda mevcuttur.

Tanım 2.8. $\mathbb{R}^n$ *'de ölçülebilir fonksiyonların Lebesque uzayı* L_p

$$L_p = L_p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \|f\|_{L_p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 \le p < \infty \right\}$$

ile tanımlanır. Burada $dx = dx_1 dx_2 ... dx_n$ *şeklindedir.*

Ayrıca $p = \infty$ *için* L_∞ *uzayı*

$$L_\infty = L_\infty(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \|f\|_{L_\infty} < \infty \right\}$$

dir. Burada

$$\|f\|_{L_\infty} = ess \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)| = \inf \{\lambda > 0 : |\{x : |f(x)| > \lambda\}| = 0\}$$

dir.

Öncelikle L_p, $1 \le p < \infty$ Lebesque uzayının lineer uzay olduğunu görelim. Bunun için $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\forall f, g \in L_p$ olmak üzere

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\alpha f(x)|^p \, dx = |\alpha|^p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx < \infty$$

eşitliğinden $\alpha f \in L_p$ dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^p &\le (|f(x)| + |g(x)|)^p \le (2 \max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p \\ &= 2^p \max\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\} \\ &\le 2^p \{|f(x)|^p + |g(x)|^p\} \end{aligned}$$

eşitsizliğinden

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)+g(x)|^p\,dx \le 2^p \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p\,dx \right) < \infty$$

elde edilir. Yani $f+g \in L_p$ dir. Böylece $L_p, 1 \le p < \infty$ lineer uzaydır. $L_p,\ 1 \le p < \infty$ Lebesque uzayı üzerinde

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

fonksiyonunun norm olduğunu yani $L_p,\ 1 \le p < \infty$ uzayının normlu uzay olduğunu görelim.

Teorem 2.9. *(Folland (1984)) L_p, $1 \le p < \infty$ normlu uzaydır.*

İspat Herhangi $f \in L_p, 1 \le p < \infty$ için

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}} \ge 0$$

olduğu açıktır. Ayrıca

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

eşitliğinden $f = 0$, $h.h.x \in \mathbb{R}^n$ elde edilir. Tersine $f = 0$ ise $\|f\|_{L_P} = 0$ dir. Yani, L_p den olan fonksiyonlar denklik sınıflarıdır. Bundan başka herhangi $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\|\alpha f\|_{L_p} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\alpha f(x)|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha|\,\|f\|_{L_p}$$

bulunur. Böylece norm olmanın ilk iki koşulu sağlanmaktadır. Norm olmanın üçüncü koşulu olan Üçgen Eşitsizliği ileride göreceğimiz Minkowski Eşitsizliğinin

$$\|f+g\|_{L_p} \le \|f\|_{L_p} + \|g\|_{L_p}\,, 1 \le p < \infty$$

bir sonucudur. Bundan önce p ’nin aralığını $0 < p < \infty$ şeklinde alalım ve

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

fonksiyonunun norm belirtmediğini görelim. Bunun için $0 < p < 1$ için üçgen eşitsizliğinin sağlanmadığını görmek yeterli olacaktır.

Öncelikle $0 < p < 1,\ a, b > 0,\ \forall t > 0$ için

$$\begin{aligned} t^{p-1} > (a+t)^{p-1} \quad &\Rightarrow \quad \int_0^b t^{p-1} dt > \int_0^b (a+t)^{p-1} dt \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{p} b^p > \frac{1}{p}(a+b)^p - \frac{1}{p} a^p \\ &\Rightarrow \quad a^p + b^p > (a+b)^p \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde edelim. $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$ ölçülebilir kümeler , $|E| < \infty,\ \ |F| < \infty$ ve $E \cap F = \varnothing$ olmak üzere

$$a = |E|^{\frac{1}{p}} \text{ ve } \ b = |F|^{\frac{1}{p}}$$

diyelim. Ayrıca E ve F kümelerinin karakteristik fonksiyonları da sırasıyla $\chi_{_E}(x)$ ve $\chi_F(x)$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} \|\chi_E + \chi_F\|_{L_p} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_E(x) + \chi_F(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_E(x)|^p \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_F(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_E 1dx + \int_F 1dx \right)^{\frac{1}{p}} = (|E| + |F|)^{\frac{1}{p}} \\ &= (a^p + b^p)^{\frac{1}{p}} > a + b = |E|^{\frac{1}{p}} + |F|^{\frac{1}{p}} = \|\chi_E\|_{L_p} + \|\chi_F\|_{L_p} \end{aligned}$$

bulunur ki bu bize $0 < p < 1$ için $\|f\|_{L_p}$ fonksiyonunun norm için üçgen eşitsizliğini sağlamadığını gösterir. □

Şimdi $1 \leq p < \infty$ olmak üzere norm için üçgen eşitsizliğini veren Minkowski eşitsizliği göreceğiz. Bunun için öncelikle aşağıdaki Young ve Hölder eşitsizliklerini ifade edip kanıtlarını verelim.

Teorem 2.10. ***(Young Eşitsizliği)*** *(Folland (1984)) $a, b \geq 0$, $1 \leq p \leq \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ eşitliğini sağlayan p ve q sayılarına ***eşlenik sayılar*** *denir. Örneğin $p = 1$ için $q = \infty$ dir.*

İspat Young Eşitsizliğini birkaç yolla ispatlayabiliriz. Aşağıdaki ispat konveks fonksiyonlar için iyi bilinen **Jensen eşitsizliği** kullanılarak yapılmıştır.

Jensen eşitsizliği şöyledir: " f konveks fonsiyon olmak üzere $p_1,\ p_2,...,p_n \geq 0$ ve $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$ için

$$f(x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n) \geq p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + ... + p_nf(x_n)$$

dir.

Şimdi f fonksiyonu olarak $f(x) = \ln x$ konveks fonksiyonunu $p_1 = (1-\lambda)$ ve $p_2 = \lambda$ alalım. Jensen eşitsizliğine göre $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$\ln((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq (1-\lambda)\ln x_1 + \lambda \ln x_2$$

olur ve bu eşitsizlikte $x_1 = a^p$, $x_2 = b^q$ ve $\lambda = \frac{1}{q}$ alırsak $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} \ln(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}) &\geq \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q = \ln ab \\ \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} &\geq ab \end{aligned}$$

şeklinde Young eşitsizliğini elde ederiz. □

Teorem 2.11. ***(Hölder Eşitsizliği)*** *(Folland (1984))* $f \in L_p$, $g \in L_q$, $1 \leq p,q < \infty$ *ve* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *olsun. Bu durumda*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

dir.

İspat Young Eşitsizliğini kullanarak ispatlayacağız. Bunun için Young eşitsizliğinde

$$a = \frac{|f(x)|}{\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}} \text{ ve } b = \frac{|g(x)|}{\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}}$$

alalım. Buradan

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

olduğundan

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^q\,dx}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafından integral alırsak

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

biçiminde Hölder eşitsizliğini elde ederiz. □

Artık Minkowski eşitsizliğini ifade edip ispatını verebiliriz. Böylece yukarıda tanımlanan

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

fonksiyonunun norm olduğunu da görmüş olacağız.

Teorem 2.12. ***(Minkowski Eşitsizliği)*** *(Folland (1984))* f *ve* $g \in L_p$, $1 \leq p < \infty$ *olsun. Bu durumda*

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

dir.

İspat $p = 1$ için $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ olduğundan

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)+g(x)|\,dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x)|\,dx$$

olur. Şimdi $p > 1$ olsun. Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)+g(x)|^p\,dx &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)+g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx \\
&\leq \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $(p-1)\,q=p$ dir.

Bu son eşitsizliği tekrar düzenlersek

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|g(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

biçiminde Minkowski eşitsizliği elde edilir. □

Minkowski eşitsizliği ile görülür ki $1\leq p<\infty$ için

$$\|f\|_{L_p}=\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

fonksiyonu norm belirler. Böylece $L_p, 1\leq p<\infty$ lineer uzayı, normlu lineer uzaydır.

Tanım 2.8. de verdiğimiz

$$L_\infty=L_\infty(\mathbb{R}^n)=\left\{f:\|f\|_{L_\infty}<\infty\right\}$$

uzayının normlu lineer uzay olduğunu aşağıdaki teoremle ifade edelim.

Teorem 2.13. *(Folland (1984))*

$$L_\infty=\left\{f:\|f\|_{L_\infty}=ess\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|<\infty\right\}$$

Lebesque uzayı normlu lineer uzaydır.

İspat Herhangi $f,g\in L_\infty$ ve $\alpha\in\mathbb{R}^n$ için

$$ess\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\alpha f(x)+g(x)|\leq|\alpha|\;ess\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|+ess\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|g(x)|$$

eşitsizliğinden L_∞ lineer uzaydır. Ayrıca $\|f\|_{L_\infty}\geq 0$ ve $\|f\|_{L_\infty}=0$ olması için gerek ve yeter koşul $f=0\;\;h.h.x\in\mathbb{R}^n$ dir. Yukarıdaki eşitsizlik

$$\|f+g\|_{L_\infty}\leq\|f\|_{L_\infty}+\|g\|_{L_\infty}$$

norm için üçgen eşitsizliğidir. Dolayısıyla L_∞ normlu lineer uzaydır. □

Ayrıca Hölder eşitsizliği $p=\infty$ için de sağlanır. Bu durumda $q=1$ olur ve eşitsizlik

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x)g(x)|\,dx &\leq ess\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|\int\limits_{\mathbb{R}^n}|g(x)|\,dx\\ &= \|f\|_{L_\infty}\|g\|_{L_1}\end{aligned}$$

biçimindedir. $p = \infty$ için Minkowski eşitsizliği ise yukarıdaki

$$\|f + g\|_{L_\infty} \leq \|f\|_{L_\infty} + \|g\|_{L_\infty}$$

eşitsizliğidir.

Bu kesimi L_p , $1 \leq p \leq \infty$ uzayının Banach uzayı olduğunu ifade ederek bitireceğiz. Yani, L_p , $1 \leq p \leq \infty$ tam normlu uzaydır. Bu teoremin birkaç yolla ispatı yapılmıştır. Biz burada tam normlu uzaylar teorisinde iyi bilinen "her mutlak yakınsak serinin yakınsak olmasıdır" teoremini kullanarak ispatı vereceğiz.

Teorem 2.14. *(Grafakos (2008-2009))* $1 \leq p \leq \infty$ *için* L_p *uzayı tam normlu uzaydır. Yani, Banach uzayıdır.*

İspat L_p, $1 \leq p < \infty$ uzayındaki her mutlak yakınsak serinin yakınsak olduğunu göstereceğiz. $\{f_n\}$ dizisini L_p uzayından alalım. Kabul edelim ki $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L_p}$ serisi yakınsak olsun. $B = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L_p} < \infty$ diyelim. Şimdi $G_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |f_k|$ ve $G = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k|$ diyelim.

$$\|G_n\|_{L_p} = \left\| \sum_{k=1}^{n} |f_k| \right\|_{L_p} \leq \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_{L_p} \leq B, \ \ \forall n$$

olduğundan monoton yakınsama teoremine göre

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |G_n|^p dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \lim_{n\to\infty} |G_n|^p dx$$

olur. Yani,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |G|^p dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |G_n|^p dx$$

var ve sonludur. Buradan $G \in L_p$ dir. Böylece $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k|$ serisi yakınsaktır, yani $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ mutlak yakınsaktır. Şimdi $F = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ diyelim.

$$|F| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| = G$$

ve $G \in L_p$ olduğundan $F \in L_p$ dir. Ayrıca

$$\left\| F - \sum_{k=1}^{n} f_k \right\|_{L_p}^{p} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |F - \sum_{k=1}^{n} f_k|^p dx$$

eşitliğinden limite geçersek Lebesque baskın yakınsama teoremine göre

$$\lim_{n\to\infty}\left\|F-\sum_{k=1}^{n}f_k\right\|_{L_p}^{p}=0$$

dir. Bu son adım için

$$|F-\sum_{k=1}^{n}f_k|^p\leq\left(|F|+\sum_{k=1}^{n}|f_k|\right)^p\leq(2G)^p\quad\text{ve}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(2G)^p dx<\infty$$

sağlanmaktadır. $p=\infty$ için Folland (1984) kaynağına bakılabilir. □

2.3. L_p Uzaylarında Bazı Eşitsizlikler

Bu kısımda L_p uzaylarından bazı eşitsizlikler ifade edeceğiz. $1\leq p\leq\infty$ olmak üzere sonlu ölçümlü küme üzerinde tanımlanan L_p uzayları L_∞ uzayını kapsamaktadır. Aşağıdaki teorem bununla ilgilidir.

Teorem 2.15. *(Folland (1984)) $E\subseteq\mathbb{R}^n$ ve $|E|<\infty$ olmak üzere $L_\infty(E)\subseteq L_p(E)$, $1\leq p\leq\infty$ dir.*

İspat Herhangi $f\in L_\infty(E)$ alalım. Buradan

$$\int\limits_{\mathbb{E}}|f(x)|^p\,dx\leq\|f\|_{L_\infty(E)}^p\,\mu(E)<\infty$$

olduğundan $f\in L_p(E),\ 1\leq p\leq\infty$ dir. □

Teorem 2.16. *(Folland (1984)) $E\subseteq\mathbb{R}^n$ ve $|E|<\infty$ olmak üzere*

$$\lim_{p\to\infty}\|f\|_{L_p(E)}=\|f\|_{L_\infty(E)}$$

dir.

İspat $f\in L_\infty(E)$ alalım. Buradan

$$\left(\int\limits_{E}|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq\|f\|_{L_\infty(E)}|E|^{\frac{1}{p}}\tag{2.1}$$

dir. Şimdi herhangi $\varepsilon>0$ için

$$A=\left\{x\in E:|f(x)|>\|f\|_{L_\infty(E)}-\varepsilon\right\}$$

kümesini tanımlayalım. $|A| > 0$ dir. Buradan

$$\left(\int\limits_{E} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int\limits_{A} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\|f\|_{L_\infty(E)} - \varepsilon\right) |A|^{\frac{1}{P}}$$

elde edilir. Bu son eşitsizliği yukarıdaki (2.1) eşitsizliği ile birleştirirsek

$$\left(\|f\|_{L_\infty(E)} - \varepsilon\right) |A|^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int\limits_{E} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_{L_\infty} |E|^{\frac{1}{p}}$$

elde ederiz. Bu son eşitsizliğin her iki yanından $p \to \infty$ iken limite geçersek ve

$$\lim_{p\to\infty} |A|^{\frac{1}{p}} = \lim_{p\to\infty} |E|^{\frac{1}{p}} = 1$$

olduğundan, $\varepsilon > 0$ keyfi olmak üzere

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L_p(E)} = \|f\|_{L_\infty(E)}$$

bulunur. □

Teorem 2.17. *(Folland (1984))* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *,* $|E| < \infty$ *ve* $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *için*

$$L_q(E) \subseteq L_p(E)$$

dir.

İspat $f \in L_q(E)$ alalım. Hölder eşitsizliğinden $\frac{q}{p} \geq 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} \int\limits_{E} |f(x)|^p \, dx &\leq \left(\int\limits_{E} |f(x)|^{p\frac{q}{p}} \, dx\right)^{\frac{p}{q}} (\mu(E))^{1-\frac{p}{q}} \\ &= \|f\|_{L_q(E)} |E|^{1-\frac{p}{q}} \\ &< \infty \end{aligned}$$

elde edilir ki bu $f \in L_p(E)$ demektir. □

Sonsuz ölçümlü uzayda bu kapsama sağlanmayabilir. Aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

Örnek 1. $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R} \cup \{0\}$ da tanımlı

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x^2}, & x \geq 1 \end{cases}$$

fonksiyonunu alalım. Buradan

$$\int_0^\infty |f(x)|\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx < \infty$$

olduğundan $f \in L_1(\mathbb{R}^+)$ dir. Fakat $p \geq 2$ için $f \notin L_p(\mathbb{R}^+)$ dir.

Örnek 2. $\mathbb{R}$ de tanımlı

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < |x| < 1 \\ \frac{1}{|x|}, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

fonksiyonunu alalım. Buradan $f \notin L_1(\mathbb{R})$ fakat $p > 1$ için $\int_1^\infty \frac{1}{|x|^p}dx < \infty$ olduğundan $f \in L_p(\mathbb{R})$ dir.

Teorem 2.18. *(Folland (1984))* $1 < p < q < r \leq \infty$ *ise* $L_q \subseteq L_p + L_r$ *dir. Burada*

$$L_p + L_r = \{f : \quad f = f_1 + f_2; \;\; f_1 \in L_p, \;\; f_2 \in L_r\}$$

dir.

İspat $f \in L_q$ ve $r \neq \infty$ olsun.

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| > 1 \\ 0, & |f(x)| \leq 1 \end{cases} \quad \text{ve} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & |f(x)| > 1 \\ f(x), & |f(x)| \leq 1 \end{cases}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım.

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

olduğu açıktır. Buradan

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|^p\,dx = \int_{\{x:|f(x)|>1\}} |f(x)|^p\,dx \leq \int_{\{x:|f(x)|>1\}} |f(x)|^q\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q\,dx < \infty$$

ve

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_2(x)|^r\,dx = \int_{\{x:|f(x)|\leq 1\}} |f(x)|^r\,dx \leq \int_{\{x:|f(x)|\leq 1\}} |f(x)|^q\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q\,dx < \infty$$

olduğundan $f_1 \in L_p$, $f_2 \in L_r$ ve $f \in L_p + L_r$ dir.

$r = \infty$ için

$$\|f_2\|_{L_\infty} = ess \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f_2(x)| \leq 1 < \infty$$

dir. □

Teorem 2.19. *(Folland (1984))* $1 < p < q < r \leq \infty$ *olsun. Bu durumda* $L_p \cap L_r \subseteq L_q$ *dir. Ayrıca*

$$\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}, \quad \lambda \in (0,1)$$

olmak üzere

$$\|f\|_{L_q} \leq \|f\|_{L_p}^{\lambda} \|f\|_{L_r}^{1-\lambda}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat Öncelikle $r = \infty$ ve $\lambda = \frac{p}{q}$ alalım. Bu durumda herhangi $f \in L_p \cap L_r$ için

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q \, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, |f(x)|^{q-p} \, dx \leq \|f\|_{L_\infty}^{q-p} \|f\|_{L_p}^{p} < \infty$$

olur. Buradan

$$\|f\|_{L_q} \leq \|f\|_{L_\infty}^{1-\frac{p}{q}} \|f\|_{L_P}^{\frac{p}{q}} = \|f\|_{L_p}^{\lambda} \|f\|_{L_\infty}^{1-\lambda}$$

dir. Şimdi $r < \infty$ olsun. $1 = \frac{q\lambda}{p} + \frac{q(1-\lambda)}{r}$ olduğundan $\frac{p}{q\lambda}$ ile $\frac{r}{q(1-\lambda)}$ eşlenik sayılardır. Hölder eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q \, dx &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{\lambda q} \, |f(x)|^{(1-\lambda)q} \, dx \\
&\leq \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{\frac{(\lambda q)p}{\lambda q}} \, dx \right)^{\frac{\lambda q}{p}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{\frac{(1-\lambda)qr}{(1-\lambda)q}} \, dx \right)^{\frac{q(1-\lambda)}{r}} \\
&= \|f\|_{L_p}^{\lambda q} \|f\|_{L_r}^{q(1-\lambda)}
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Son olarak bu son eşitsizliğin her iki yanından q. dereceden kök alırsak

$$\|f\|_{L_q} \leq \|f\|_{L_p}^{\lambda} \|f\|_{L_r}^{1-\lambda}$$

buluruz. □

Teorem 2.20. *(Folland (1984))* ***(Chebishev Eşitsizliği)*** $f \in L_p,\ 1 \leq p < \infty$ *olsun.* $\forall \alpha > 0$ *için*

$$|\{x : |f(x)| \geq \alpha\}| \leq \left(\frac{\|f\|_{L_p}}{\alpha} \right)^p$$

dir.

İspat Herhangi $\alpha > 0$ alalım. Buradan

$$\|f\|_{L_p}^p = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \geq \int\limits_{\{x:|f(x)|\geq\alpha\}} |f(x)|^p \, dx \geq \alpha^p |\{x : |f(x)| \geq \alpha\}|$$

şeklinde Chebishev eşitsizliği elde edilir. □

$\mathbb{R}^n$ de Lebesque integrali tanımından açıktır ki $f = 0 \;\; h.h.x \in \mathbb{R}^n$ ise

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, dx = 0$$

dir. Bu önermenin tersinin de doğru olduğunu aşağıda Chebishev eşitsizliğinin bir sonucu olarak verelim.

Sonuç 2.21. *$f \in L_1$, yani f, $\mathbb{R}^n$ de Lebesque integrallenebilir olsun. Bu durumda*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, dx = 0 \;\; \textit{ise} \;\; f = 0 \; h.h.x \in \mathbb{R}^n$$

dir.

İspat Chebishev eşitsizliğine göre , $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \frac{1}{n} \right\} \right| \leq n \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, dx = 0$$

dir. Ayrıca

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x : |f(x)| \geq \frac{1}{n} \right\}$$

olduğundan

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \frac{1}{n} \right\} \right| = 0$$

elde edilir ki bu $f = 0 \;\; h.h.x \in \mathbb{R}^n$ demektir. □

2.4. L_p Uzaylarında Yakınsama

Aşağıda L_p uzayında yakınsama tanımını vereceğiz ve L_p uzayında yakınsama ile diğer yakınsama türleri arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

Tanım 2.22. *(Folland (1984))* $L_p, 1 \leq p \leq \infty$ *uzayında* $\{f_n\}$ *fonksiyon dizisi verilmiş olsun. Eğer*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L_p} = 0$$

ise $\{f_n\}$ *dizisi* $f \in L_p$ *fonksiyonuna* L_p *uzayında yakınsaktır denir.*

$$f_n \overset{L_p}{\to} f, \quad n \to \infty$$

ile gösterilir. L_∞ *uzayında yakınsama, sıfır ölçümlü küme dışında düzgün yakınsamadır.*

Sonlu ölçümlü $E \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinde tanımlı bir $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi için $L_\infty(E)$ uzayındaki yakınsamadan $L_p(E)$, $1 \leq p \leq \infty$ de yakınsama elde edilir.

Şöyle ki $f \in L_\infty(E)$ olmak üzere

$$\|f_n - f\|_{L_\infty(E)} = ess \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| < \infty$$

ve $f \in L_p(E)$ olduğundan

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{L_p(E)} &= \left(\int_E |f_n(x) - f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \leq \|f_n - f\|_{L_\infty(E)} \; |E|^{1/p} \\ &< \infty \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla sonlu ölçümlü E kümesinde düzgün yakınsamadan $L_p(E), 1 \leq p \leq \infty$ de yakınsama elde edilir.

Teorem 2.23. *(Folland (1984))* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *ve* $|E| < \infty$ *olsun.* $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *olmak üzere* $L_q(E)$ *uzayındaki yakınsamadan* $L_p(E)$ *uzayında yakınsama elde edilir.*

İspat $\{f_n\}$, $L_q(E)$ uzayında $f \in L_q(E)$ fonksiyonuna yakınsak bir dizi olsun. $\{f_n\}$ dizisinin $L_p(E)$ uzayında $f \in L_p(E)$ fonksiyonuna yakınsadığını göstermek istiyoruz. Hölder eşitsizliğine göre

$$\begin{aligned} \int_E |f_n(x) - f(x)|^p \, dx &\leq \left(\int_E |f_n(x) - f(x)|^{p \cdot \frac{q}{p}} \, dx \right)^{\frac{p}{q}} \left(|E|^{\frac{q}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{q}} \\ &\leq \left(\int_E |f_n(x) - f(x)|^q \, dx \right)^{\frac{p}{q}} \left(|E|^{\frac{q}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{q}} < \infty \end{aligned}$$

yazarız. Buradan $\|f_n - f\|_{L_p(E)} < \infty$ dir. Ayrıca bu son eşitsizliğin her iki yanından limite geçersek

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L_p(E)} = 0$$

elde ederiz. Bundan başka norm için üçgen eşitsizliğine göre

$$\|f\|_{L_p(E)} \leq \|f_n - f\|_{L_p(E)} + \|f_n\|_{L_p(E)} < \infty$$

dir. Bu son iki ifadeden $\{f_n\}$ dizisinin $L_p(E)$ uzayında $f \in L_p(E)$ fonksiyonuna yakınsadığını buluruz. □

Tanım 2.24. *(Folland (1984))* (X, M, μ) *ölçüm uzayında* $\mu-$*ölçümüne göre yakınsama*

$$\forall\sigma > 0 \text{ } \textit{için} \lim_{n\to\infty} \mu\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \sigma\} = 0$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.25. *(Folland (1984))* $L_p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty$ *uzayında yakınsamadan* $|.|$ *ölçüme göre yakınsama elde edilir. Burada* $|.|$ *ölçümü* $\mathbb{R}^n$ *deki Lebesque ölçümüdür.*

İspat $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi $L_p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty$ uzayında f fonksiyonuna yakınsak olsun. Chebishev eşitsizliği göz önüne alınarak $\forall\sigma > 0$ için

$$|\{x : |f_n(x) - f(x)| > \sigma\}| \leq \frac{1}{\sigma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_n(x) - f(x)|^p \, dx$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan her iki taraftan limite geçersek

$$\lim_{n\to\infty} |\{x \in \mathbb{R}^n : |f_n(x) - f(x)| > \sigma\}| = 0$$

buluruz. □

Bu kısmı aşağıdaki örnek ile bitireceğiz. Bu örnek ile göreceğiz ki L_p , $1 \leq p < \infty$ uzayındaki yakınsamadan noktasal yakınsama çıkmaz.

Örnek 3. Her k için $(0, 1]$ aralığında tanımlanmış k tane fonksiyonu göz önüne alalım.

$$f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, ..., f_k^{(k)}; f_i^{(k)}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \frac{i-1}{k} < x \leq \frac{i}{k} \\ 0, & di\breve{g}er \end{array} \right\}.$$

Bu k'lı blokları yan yana yeniden sıralayalım ve $f_n(x)$, $x \in (0,1]$ ile gösterelim.

$$f_n(x) = \left\{ f_1^1(x), f_1^2(x), f_2^2(x), f_1^3(x), f_2^3(x), f_3^3(x), ..., f_1^k(x), ..., f_k^k(x), ... \right\}.$$

Böylece $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_n(x) - 0|^p \, dx &= \int_{\frac{i-1}{k}}^{\frac{i}{k}} 1 dx = \frac{i}{k} - \frac{i-1}{k} \\ &= \frac{1}{k} \to 0, \quad k \to \infty \end{aligned}$$

olduğundan $\{f_n\}$ dizisi $f = 0$ fonksiyonuna $L_p\,(0,1]$ uzayında yakınsaktır.

Fakat $(0,1]$ aralığında $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $f = 0$ fonksiyonuna noktasal yakınsamaz. Çünkü yukarıdaki k'lı blokların en az biri 1 'e yakınsar.

3. MATERYAL VE METOT

Bu tez çalışmasında amacımız Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunu incelemek ve onun L_p , $1 \leq p \leq \infty$ uzaylarında sınırlılığını kanıtlamaktır.

Hardy-Littlewood Maksimal fonksiyonun sınırlılığının ispatlanmasında Marcinkiewicz interpolasyon teoremi de kullanılır.

Bu kısımda Fourier harmonik analizinde çok kullanışlı olan Riesz-Thorin ve Marcinkiewicz interpolasyon teoremlerini ifade edip ispatlarını vereceğiz. Ayrıca bazı uygulamalarını da göreceğiz.

3.1. Riesz-Thorin İnterpolasyon Teoremi ve Uygulamaları

İnterpolasyon teoremlerine geçmeden önce L_p uzaylarında lineer, yarı -lineer operatör tanımını, güçlü $(p, q)-$tipli ve zayıf $(p, q)-$tipli operatör kavramlarını ifade edeceğiz.

Tanım 3.26. *(Folland (1984))* $\mathbb{R}^n$ *de Lebesque ölçüm uzayını alalım.*

$$T : L_p \to L_q, \quad 1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty$$

operatörü verilsin. Herhangi $f, g \in L_p$ *ve* α *skaleri için*

$$T(\alpha f + g)(x) = \alpha T f(x) + T g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

ise L_p *uzayından* L_q *uzayına tanımlanan* T *operatörüne* ***lineer operatör*** *denir.*

$\forall f, g \in L_p$ *ve* α *skaleri için*

$$T(\alpha f + g)(x) \leq \alpha T f(x) + T g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

ise T *operatörüne* ***yarı-lineer operatör*** *denir.*

$\forall f \in L_p$ *için*

$$\|T f\|_{L_q} \leq c \|f\|_{L_p}$$

ise T *operatörüne* $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$***-tipli*** *(güçlü* (p, q)*-tipli) operatör denir.*

$\forall f \in L_p$ *için*

$$\mu \{x \in \mathbb{R}^n : |T f(x)| > \alpha\} \leq \left(\frac{A \|f\|_{L_p}}{\alpha} \right)^q, \quad q < \infty$$

ise T *operatörüne* ***zayıf***$(\mathbf{p}, \mathbf{q})$***-tipli*** *operatör denir.*

Teorem 3.27. *(Folland (1984)) T operatörü (p,q)-tipli ise zayıf (p,q)-tiplidir.*

İspat

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{L_q}^q &= \int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^q\,dx \\ &\geq \int_{\{x\in\mathbb{R}^n:\ |Tf(x)|>\alpha\}} |Tf(x)|^q\,dx \\ &\geq \alpha^p\,|\{x\in\mathbb{R}^n : |Tf(x)|>\alpha\}|\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. T operatörü (p,q) tipli olduğundan

$$\begin{aligned}|\{x\in\mathbb{R}^n : |Tf(x)|>\alpha\}| &\leq \frac{1}{\alpha^q}\|Tf\|_{L_q}^q \\ &\leq \frac{1}{\alpha^q}c^q\,\|f\|_{L_p}^q \\ &= \left(\frac{c\,\|f\|_{L_p}}{\alpha}\right)^q\end{aligned}$$

elde edilir. □

Riesz-Thorin İnterpolasyon teoremi kompleks analiz metodları ile kanıtlanmaktadır. Teoremin ispatına geçmeden önce aşağıdaki önteoremleri verelim. Birincisi Hadamard's Three-Line Lemma olarak bilinir.

Önteorem 3.28. *(Folland (1984)) $0\leq \mathrm{Re}\,(z)\leq 1$ şeridinde $f(z)$ sınırlı ve sürekli fonksiyonu analitik olsun. Ayrıca*

$$M_\theta = \sup_{y\in\mathbb{R}} |f\,(\theta+iy)|$$

diyelim. Bu durumda $0\leq\theta\leq 1$ için

$$M_\theta \leq M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat M_0 ve M_1 sayılarının pozitif olduğu açıktır. Aksi halde $f=0$ dir. $f=0$ için de ispat açıktır.

1. Durum. $M_0=M_1=1$ olsun. $f(z)$, $0\leq \mathrm{Re}\,(z)\leq 1$ şeridinde sınırlı olduğundan $|f(z)|\leq k$ olacak şekilde $k>0$ sayısı vardır. Herhangi $\varepsilon>0$ için

$$A_\varepsilon(z)=\frac{f(z)}{1+\varepsilon z}$$

sayısını tanımlayalım. Ayrıca

$$\Omega = \{z : \ \ 0 < \mathrm{Re}\,(z) < 1\}$$

şeridini ve

$$R = \left\{ z = x + iy : \ \ x \in [0,1]\,, \ \ y \in \left[-\frac{k}{\varepsilon}, \frac{k}{\varepsilon} \right] \right\}$$

kümesini alalım. Şimdi $z = x + iy,\ \Omega$ 'nın sınırından alınsın. Yani $z \in \partial\Omega$ olsun. Bu durumda ya $x = 0$ veya $x = 1$ dir.

$x = 0$ ise

$$\begin{aligned}
|A_\varepsilon(z)| &= \frac{|f(z)|}{|1+\varepsilon z|} \\
&= \frac{|f(z)|}{|1+\varepsilon iy|} \\
&= \frac{|f(z)|}{\sqrt{1+(\varepsilon y)^2}} \\
&\leq |f(z)| \leq M_0 = 1
\end{aligned}$$

dir.

$x = 1$ ise

$$\begin{aligned}
|A_\varepsilon(z)| &= \frac{|f(z)|}{|1+\varepsilon z|} \\
&= \frac{|f(z)|}{|1+\varepsilon+\varepsilon iy|} \\
&= \frac{|f(z)|}{1+\varepsilon} \\
&\leq |f(z)| \leq M_1 = 1
\end{aligned}$$

dir. Ayrıca şeridin içindeki herhangi z için

$$\begin{aligned}
|A_\varepsilon(z)| &= \frac{|f(z)|}{|1+\varepsilon z|} \\
&= \frac{|f(z)|}{|1+\varepsilon x+\varepsilon iy|} \\
&= \frac{|f(z)|}{\varepsilon |y|} \\
&\leq \frac{k}{\varepsilon |y|}
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \left|A_\varepsilon(x \pm i\frac{k}{\varepsilon})\right| &\leq \frac{\left|f(x \pm i\frac{k}{\varepsilon})\right|}{\varepsilon\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|} \\ &= \frac{\left|f(x \pm i\frac{k}{\varepsilon})\right|}{k} \\ &\leq \frac{k}{k} = 1 \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla herhangi sabit tutulmuş $\varepsilon > 0$ için R 'nin sınırında $|A_\varepsilon(z)| \leq 1$ dir. Kompleks analizde iyi bilinen maksimum modül teoremi gereğince

$$\max_{z\in R} |A_\varepsilon(z)| \leq 1$$

dir. Bundan başka $z = x + iy \in \overline{\Omega}\backslash R$ için $|y| > \frac{k}{\varepsilon}$ olduğundan yukarıdaki eşitsizliğe göre

$$|A_\varepsilon(z)| \leq \frac{k}{\varepsilon|y|} \leq \frac{k}{\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k} = 1$$

olur. Yani $\forall z \in \overline{\Omega}$ için $|A_\varepsilon(z)| \leq 1$ dir. Buradan

$$|f(z)| \leq |1 + \varepsilon z| \leq 1 + \varepsilon|z|$$

olur. Bu eşitsizlik $\forall\varepsilon > 0$ için doğru olduğundan $|f(z)| \leq 1$ olur. Böylece $0 \leq \theta \leq 1$ için $M_\theta \leq 1 = M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}$ dir.

2. Durum. $M_0, M_1 > 0$ olsun.

$$F(z) = \frac{f(z)}{M_0^{1-\mathrm{Re}(z)}M_1^{\mathrm{Re}(z)}}$$

diyelim. $M_0^{1-\mathrm{Re}(z)}$ ve $M_1^{\mathrm{Re}(z)}$ fonksiyonlarının ikisi de tam fonksiyon olduklarından $F(z)$, $0 \leq \mathrm{Re}\,(z) \leq 1$ şeridinde sürekli ve şeridin içinde analitiktir. Bundan başka $0 \leq \mathrm{Re}\,(z) \leq 1$ için

$$|F(z)| = \frac{|f(z)|}{M_0^{1-\mathrm{Re}(z)}M_1^{\mathrm{Re}(z)}} \leq \frac{k}{\min(1, M_0)\min(1, M_1)}$$

dir. Böylece $F(z)$, $0 \leq \mathrm{Re}\,(z) \leq 1$ şeridinde sınırlıdır. Ayrıca

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |F(iy)| = \sup_{y\in\mathbb{R}} \frac{|f(iy)|}{M_0} = \frac{M_0}{M_0} = 1$$

ve

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |F(1 + iy)| = \sup_{y\in\mathbb{R}} \frac{|f(1 + iy)|}{M_1} = \frac{M_1}{M_1} = 1$$

dir. Buradan 1.duruma göre $0 \leq \theta \leq 1$ için

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |F(\theta + iy)| \leq 1$$

olur. Yani

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} \frac{|f(\theta + iy)|}{M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}} \leq 1$$

bulunur. Böylece $M_\theta = \sup_{y\in\mathbb{R}} |f(\theta + iy)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$ dir. □

Önteorem 3.29. *(Folland (1984)) $f \in L_p$ ve $1 \leq p < \infty$ ise*

$$\|f\|_{L_p} = \sup_{\|g\|_{L_{p'}}=1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|\, dx, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

dir.

İspat Öncelikle Hölder eşitsizliğine göre

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|\, dx \leq \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_{p'}}$$

dir. Bu eşitsizliğin her iki yanından $\|g\|_{L_{p'}} = 1$ koşulunu sağlayan g fonksiyonları üzerinden supremum alırsak

$$\sup_{\|g\|_{L_{p'}}=1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|\, dx \leq \|f\|_{L_p}$$

olur. Şimdi ters eşitsizliği görelim. Bunun için

$$g(x) = \frac{e^{-i\arg f(x)} |f(x)|^{(p-1)}}{\|f\|_{L_p}^{p-1}}$$

diyelim.

$$\begin{aligned}
\|g\|_{L_{p'}}^{p'} &= \frac{1}{\|f\|_{L_p}^{(p-1)p'}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|e^{-i\arg f(x)}\right| |f(x)|^{(p-1)p'} dx \right) \\
&= \frac{1}{\|f\|_{L_p}^{(p-1)p'}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx = 1, \qquad (p-1)\, p' = p
\end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}
\sup_{\|g\|_{L_{p'}}=1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|\, dx &\geq \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{e^{-i\arg f(x)} |f(x)|^{(p-1)}}{\|f\|_{L_p}^{p-1}} dx \\
&= \frac{1}{\|f\|_{L_p}^{p-1}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)||f(x)|^{(p-1)} dx \\
&= \|f\|_{L_p}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $\square$

Böylece Riesz-Thorin İnterpolasyon teoremini ifade edip ispatlayabiliriz.

Teorem 3.30. ***(Riesz-Thorin İnterpolasyon teoremi)*** *(Folland (1984))*

$$1 \leq p_0,\ p_1, q_0,\ q_1 \leq \infty,\ p_0 \neq p_1,\ q_0 \neq q_1$$

olmak üzere

$$T : L_{p_0} \to L_{q_0} \ \textit{ve}\ T : L_{p_1} \to L_{q_1}$$

lineer operatörü sınırlı olsun. Yani,

$$\|Tf\|_{L_{q_0}} \leq M_0 \|f\|_{L_{p_0}},$$

$$\|Tf\|_{L_{q_1}} \leq M_1 \|f\|_{L_{p_1}}.$$

eşitsizliklerini sağlasın. Bu durumda

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \quad \theta \in (0,1)$$

olmak üzere T lineer operatörü L_p dan L_q ya sınırlıdır ve

$$\|Tf\|_{L_q} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{L_P}, \quad \theta \in (0,1)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat 1. Durum. $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 < \infty$ olsun. Herhangi $f \in L_p$ ve $\|f\|_{L_p} = 1$ alalım.

$$\|Tf\|_{L_q} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$$

olduğunu görmek istiyoruz. Kompakt supportlu, basit fonksiyonlar L_p de yoğun oldukları için öncelikle f fonksiyonunu basit ve kompakt supportlu alalım. Önteorem3.28 'e göre herhangi basit, kompakt supportlu g fonksiyonu için

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} Tf(t)g(t)dt \right| \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$$

olduğunu görmek istiyoruz. Şimdi $f(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{A_i}(t)$ olsun. $g(t) = \sum_{j=1}^{m} b_j \mathcal{X}_{B_j}(t)$ diyelim. Burada $a_i, b_j \in \mathbb{C}$ ve A_i , B_j kümeleri de ikişerli ayrık ölçülebilir altkümeler, $|A_i| < \infty$, $|B_j| < \infty, \forall i, j$ dir.

$$\alpha(z) = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1} \quad \text{ve} \quad \beta(z) = \frac{1-z}{q_0} + \frac{z}{q_1}$$

olsun. Herhangi $z = x + iy$, $0 \leq x \leq 1$ için

$$f_z(t) = |f(t)|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha(\theta)}} e^{i \arg f(t)}$$

ve

$$g_z(t) = |g(t)|^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta(\theta)}} e^{i \arg g(t)}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Ayrıca

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}^n} T f_z\,(t)\, g_z(t) dt$$

diyelim. Öncelikle $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$ şeridinde $F(z)$ nin analitik olduğunu görelim.

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{\mathbb{R}^n} T f_z\,(t)\, g_z(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} T \left(|a_i|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha(\theta)}} e^{i \arg a_i} \mathcal{X}_{A_i} \right) \left(|b_j|^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta(\theta)}} e^{i \arg b_j} \mathcal{X}_{B_j} \right) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(|a_i|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha(\theta)}} e^{i \arg a_i} T\left(\mathcal{X}_{A_i}\right) \right) \left(|b_j|^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta(\theta)}} e^{i \arg b_j} \mathcal{X}_{B_j} \right) dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_i|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha(\theta)}} |b_j|^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta(\theta)}} e^{i(\arg a_i + \arg b_j)} \int_{\mathbb{R}^n} T\left(\mathcal{X}_{A_i}\right) \mathcal{X}_{B_j} dt \end{aligned}$$

olduğundan $F(z)$ tam fonksiyondur ve $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$ şeridinde sınırlıdır. Ayrıca $\forall y \in \mathbb{R}$ için Hölder eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} |F(iy)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} T f_{iy}\,(t)\, g_{iy}(t) dt \right| \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |T f_{iy}\,(t)\,|^{q_0} dt \right)^{1/q_0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g_{iy}(t)|^{q_0'} dt \right)^{1/q_0'} , \quad \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0'} = 1 \\ &= \|T f_{iy}\|_{L_{q_0}} \|g_{iy}\|_{L_{q_0'}} \\ &\leq M_0 \|f_{iy}\|_{L_{p_0}} \|g_{iy}\|_{L_{q_0'}} \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada

$$\begin{aligned} \|f_{iy}\|_{L_{p_0}}^{p_0} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| |f(t)|^{\frac{\alpha(iy)}{\alpha(\theta)}} e^{i \arg f(t)} \right|^{p_0} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| |f(t)|^{\frac{\alpha(iy)}{\alpha(\theta)}} \right|^{p_0} dt \end{aligned}$$

eşitliğinde

$$\begin{aligned}\left| |f(t)|^{\frac{\alpha(iy)}{\alpha(\theta)}} \right|^{p_0} &= \left| |f(t)|^{\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha(iy)}{\alpha(\theta)}\right)} |f(t)|^{i\,\mathrm{Im}\left(\frac{\alpha(iy)}{\alpha(\theta)}\right)} \right|^{p_0} \\ &= |f(t)|^{\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha(iy)}{\alpha(\theta)}\right)p_0}\end{aligned}$$

ve

$$\left(\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{p}\right)^{-1} = p$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha(iy)}{\alpha(\theta)}\right) &= \mathrm{Re}\left[\left(\frac{1-iy}{p_0}+\frac{iy}{p_1}\right)\left(\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}\right)^{-1}\right] \\ &= \mathrm{Re}\left[\left(\frac{p_1-ip_1y+ip_0y}{p_0p_1}\right)p\right] \\ &= \frac{p_1p}{p_0p_1} \\ &= \frac{p}{p_0}\end{aligned}$$

yani

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha(iy)}{\alpha(\theta)}\right)p_0 = \frac{p}{p_0}p_0 = p$$

ve

$$\left| |f(t)|^{\frac{\alpha(iy)}{\alpha(\theta)}} \right|^{p_0} = |f(t)|^p$$

dir. Böylece

$$\|f_{iy}\|_{L_{p_0}}^{p_0} = \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^p dt = \|f\|_{L_p}^p = 1$$

bulunur. Benzer şekilde $\|g_{iy}\|_{L_{q_0'}} = 1$ ve $|F(iy)| \le M_0$ dir. Ayrıca $|F(1+iy)| \le M_1$ dir. Önteorem3.28 ' e göre $0 \le \theta \le 1$ için

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |F(\theta+iy)| \le M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}$$

olur. $f_\theta(t) = |f(t)|^{\frac{\alpha(\theta)}{\alpha(\theta)}} e^{i\arg f(t)} = f(t)$, $g_\theta(t) = g(t)$ ve $|F(\theta)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} Tf(t)g(t)dt\right|$ olduğundan Önteorem3.29 ' e göre

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} Tf(t)g(t)dt\right| \le \sup_{y\in\mathbb{R}} |F(\theta+iy)| \le M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}.$$

Şimdi $f \in L_p$ alalım. Kompakt supportlu basit fonksiyonlar L_p de yoğun olduklarından

$$|f_n| \leq |f| \quad \text{ve} \quad f_n \to f, \ h.h.y$$

olacak şekilde basit, kompakt supportlu (f_n) dizisi vardır. Ayrıca

$$E = \{x : \ |f(x)| > 1\}, \ \ g = f\, \mathcal{X}_E, \quad g_n = f_n\, \mathcal{X}_E$$

tanımlayalım. Dahası $h = f - g$ ve $h_n = f_n - g_n$ olsun. Genelliği bozmadan $p_0 < p_1$ kabul edebiliriz. Buradan

$$\begin{aligned}
\|g\|_{L_{p_0}}^{p_0} &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(t)|^{p_0} dt \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^{p_0} \mathcal{X}_E(t) dt \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^{p} \mathcal{X}_E(t) dt \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^{p} dt \\
&< \infty
\end{aligned}$$

olur. Yani $g \in L_{p_0}$ dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\|h\|_{L_{p1}}^{p1} &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(t) - g(t)|^{p_1} dt \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(t) - f(t)\ \mathcal{X}_E(t)|^{p_1} dt \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(1 - \mathcal{X}_E(t))|^{p_1} dt \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^{p_1} \mathcal{X}_{E^c}(t) dt \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^{p} \mathcal{X}_{E^c}(t) dt \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^{p} dt \\
&< \infty
\end{aligned}$$

olur. Böylece $h \in L_{p_1}$ dir. $|f_n| \leq |f|$ ve $f_n \to f$, $h.h.y$ olduğundan integral altında limite geçme ile ilgili Lebesque'in baskın yakınsama teoremine göre $\|f_n - f\|_{L_p} \to 0$ ve

$\|f_n\|_{L_p} \to \|f\|_{L_p}$, $n \to \infty$ dir. Benzer şekilde $\|g_n - g\|_{L_{p_0}} \to 0$ $\|h_n - h\|_{L_{p_1}} \to 0$ dir. T operatörü L_{p_0} dan L_{q_0} ve L_{p_1} dan L_{q_1} uzayına sınırlı olduğundan

$$\|T(g_n) - T(g)\|_{L_{p_0}} \to 0 \quad \text{ve} \quad \|T(h_n) - T(h)\|_{L_{p_1}} \to 0$$

olur. Bu ise $T(g_n)$ ve $T(h_n)$ dizilerinin sırasıyla $T(g)$ ve $T(h)$ fonksiyonlarına ölçüme göre yakınsak olması demektir. Böylece

$$T(g_{n_k}) \to T(g), \quad h.h.y \quad \text{ve} \quad T(h_{m_k}) \to T(h), \quad h.h.y$$

olacak şekilde $T(g_n)$ ve $T(h_n)$ dizilerinin $T(g_{n_k})$ ve $T(h_{m_k})$ altdizileri vardır. Böylece

$$T(f_n) = T(g_n) + T(h_n) \to T(g) + T(h) = T(f)$$

ve Fatou Lemmasına göre

$$\|T(f)\|_{L_q} \leq \lim \inf_{n \to \infty} \|T(f_n)\|_{L_q} \leq \lim \inf_{n \to \infty} M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f_n\|_{L_p} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{L_p}$$

elde edilir.

2. Durum. $p_0,\ p_1, q_0,\ q_1$ sayılarının bazılarının ∞ olması halinde yukarıdaki yönteme benzer yöntem uygulanır. Bu durumda L_∞ normu dikkate alınmalıdır. $\square$

Riesz-Thorin interpolasyon teoreminin uygulamalarını ifade edebilmek için öncelikle $\mathbb{R}^n$ de Fourier dönüşümü, girişim fonksiyonu ve özelliklerini görelim.

Tanım 3.31. ***(Fourier Dönüşümü)*** *(Folland (1984))* $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *olsun.* f *nin Fourier dönüşümü*

$$\mathcal{F} : L_1(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R},$$
$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = f^\wedge(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \lambda} dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}^n$$

şeklinde tanımlanır. Burada $dx = dx_1 dx_2 ... dx_n$ *ve* $x \cdot \lambda = x_1\lambda_1 + ... + x_n\lambda_n$ *dir.*

Bundan başka Girişim fonksiyonu ise şöyle tanımlanır.

Tanım 3.32. *(Girişim, Convolution) (Folland (1984))* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *ölçüm uzayı ve* $f, g \in L_1(X)$ *olsun.*

$$(f * g)(x) = \int_X f(y) g(x - y) dy = \int_X g(y) f(x - y) dy$$

ile tanımlanır.

Teorem 3.33. *(Fourier dönüşümünün özellikleri) (Folland (1984))*

1. Fourier dönüşümü lineer dönüşümdür. Yani,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\alpha f)(\lambda) &= \alpha\,\mathcal{F}(f)(\lambda), \quad \alpha \in \mathbb{R}\\ \mathcal{F}(f+g)(\lambda) &= \mathcal{F}(f)(\lambda) + \mathcal{F}(g)(\lambda).\end{aligned}$$

2. Fourier dönüşümü sınırlıdır.

3. Fourier dönüşümü Cauchy dizisini Cauchy dizisine götürür.

4. Fourier dönüşümü sürekli fonksiyondur.

5. $\tau_y f(x) = f(x-y)$ *olmak üzere*

$$\mathcal{F}(\tau_y f)(\lambda) = e^{-2\pi i y\cdot\lambda}\mathcal{F}(f)(\lambda).$$

6. $\delta_a f(x) = f(ax)$ *olmak üzere*

$$\mathcal{F}(\delta_a f)(\lambda) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}(f)(\frac{\lambda}{a}), \quad a \in \mathbb{R}.$$

7. $\tau_y(\mathcal{F}(f))(\lambda) = \mathcal{F}(e^{2\pi i x\cdot y} f)(\lambda).$

8. $n \in \mathbb{N}$ *olmak üzere* f *fonksiyonu* n*. mertebeden türevlenebilir ve*

$$f \in L_1,\ f'' \in L_1, ..., f^{(n)} \in L_1$$

olsun. Bu durumda

$$\mathcal{F}(f^{(n)})(\lambda) = (2\pi i\lambda)^n\,\mathcal{F}(f)(\lambda).$$

9. $f(x) \in L_1,\ xf(x) \in L_1, x^2 f(x) \in L_1, ..., x^n f(x) \in L_1,\ n \in \mathbb{N}$ *olsun. Bu durumda* f *fonksiyonunun Fourier dönüşümü* n *defa türevlenebilir ve*

$$\frac{d^n\mathcal{F}(f)(\lambda)}{d\lambda^n} = \mathcal{F}\left((-2\pi i x)^n f(x)\right)(\lambda).$$

10. Fourier dönüşümü girişimi çarpmaya dönüştürür. Yani,

$$\mathcal{F}((f * g))(\lambda) = \mathcal{F}(f)(\lambda)\mathcal{F}(g)(\lambda).$$

İspat 1. $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\alpha f + g)(\lambda) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\alpha f + g)(x) e^{-2\pi i x\cdot\lambda} dx\\ &= \alpha \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\lambda} dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-2\pi i x\cdot\lambda} dx\\ &= \alpha\mathcal{F}(f)(\lambda) + \mathcal{F}(g)(\lambda).\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(f)(\lambda)| &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, |e^{-2\pi i x\cdot\lambda}| dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx = \|f\|_{L_1} \end{aligned}$$

ve buradan

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(f)(\lambda)| \leq \|f\|_{L_1} < \infty.$$

3. $\{f_n\}\,,\ L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayında Cauchy dizisi olsun. Bu durumda verilen herhangi $\varepsilon > 0$ için öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki $\forall m, n \geq N$ için $\|f_n - f_m\|_{L_1} < \varepsilon$ dir. Buradan $\forall m, n \geq N$ için

$$\mathcal{F}(f_n)(\lambda) - \mathcal{F}(f_m)(\lambda) = \mathcal{F}(f_n - f_m)(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f_n(x) - f_m(x)) e^{-2\pi i x\cdot\lambda} dx$$

eşitliğinden

$$|\mathcal{F}(f_n)(\lambda) - \mathcal{F}(f_m)(\lambda)| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_n(x) - f_m(x)|\, |e^{-2\pi i x\cdot\lambda}| dx = \|f_n - f_m\|_{L_1} < \varepsilon$$

olur. Böylece

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(f_n)(\lambda) - \mathcal{F}(f_m)(\lambda)| < \varepsilon$$

olur ki bu $\{\mathcal{F}(f_n)\}$ dizisinin $C\left(\mathbb{R}^n\right)$ uzayında Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

4. $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\mathcal{F}(f)(\lambda)$ Fourier dönüşümünün sürekli fonksiyon olduğunu göstermek istiyoruz. Bunu $\mathbb{R}$ de yapalım. $\mathbb{R}^n$ de benzer şekilde yapılır. $\mathbb{R}$ de Fourier dönüşümü

$$\mathcal{F}(f)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i t x} dt$$

şeklinde olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(x+h) - \mathcal{F}(f)(x) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[e^{-2(x+h)\pi i t} - e^{-2\pi i t x}\right] dt \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i t x} \left[e^{-2h\pi i t} - 1\right] dt \end{aligned}$$

den

$$|\mathcal{F}(f)(x+h) - \mathcal{F}(f)(x)| \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \underbrace{|e^{-2\pi i t x}|}_{1} |e^{-2h\pi i t} - 1| dt$$

olur. Şimdi

$$\begin{aligned} |e^{-2h\pi it} - 1| &= |\cos(2\pi ht) - i\sin(2\pi ht) - 1| \\ &= \sqrt{(1-\cos(2\pi ht))^2 + \sin^2(2\pi ht)} \\ &= \sqrt{2(1-\cos(2\pi ht))} \\ &= \sqrt{4\sin^2(\pi ht)} \end{aligned}$$

olduğundan

$$|\mathcal{F}(f)(x+h) - \mathcal{F}(f)(x)| \leq 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,|\sin(\pi ht)|dt$$

elde ederiz. Şimdi $h \to 0$ için limite geçeceğiz. Lebesque'in baskın yakınsama teoremini uygulayacağız. Bunun için integral altındaki fonksiyonun mutlak değerinin integrallenebilir bir fonksiyon ile üstten sınırlı olması gereklidir. Şimdi onu kontrol edelim:

$$|f(t)|\,|\sin(\pi ht)| \leq |f(t)| \in L_1.$$

Böylece Lebesque baskın yakınsama teoremine göre limit içeriye girer ve

$$\lim_{h\to 0} |\mathcal{F}(f)(x+h) - \mathcal{F}(f)(x)| = 0$$

olur ki bu Fourier dönüşümünün sürekli olması demektir.

5.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\tau_y f)(\lambda) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \tau_y f(x) e^{-2\pi i x\cdot\lambda} dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y) e^{-2\pi i x\cdot\lambda} dx = (...t = x-y, dt = dx...) \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-2\pi i(t+y)\cdot\lambda} dt \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-2\pi i y\cdot\lambda} e^{-2\pi i t\cdot\lambda} dt \\ &= e^{-2\pi i y\cdot\lambda} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-2\pi i t\cdot\lambda} dt \\ &= e^{-2\pi i y\cdot\lambda} \mathcal{F}(f)(\lambda). \end{aligned}$$

6. $F(\delta_a f)(\lambda) = \frac{1}{|a|}F(f)(\frac{\lambda}{a}),\ \ a \neq 0$

$$\begin{aligned} F(\delta_a f)(\lambda) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta_a f(x) e^{-2\pi i x\cdot\lambda} dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(ax) e^{-2\pi i x \lambda} dx \\ &= ...t = ax, dt = adx... \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{cases} \frac{1}{a}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i t\cdot\frac{\lambda}{a}} f(t)dt, & a > 0 \\ -\frac{1}{a}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i t\cdot\frac{\lambda}{a}} f(t)dt, & a < 0 \end{cases} \\ &= \frac{1}{|a|}F(f)(\frac{\lambda}{a}). \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} \tau_y(\mathcal{F}(f))(\lambda) &= \mathcal{F}(f)(\lambda - y) \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x\cdot(\lambda - y)} dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\lambda} e^{2\pi i x\cdot y} dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (e^{2\pi i x y} f(x)) e^{-2\pi i x\cdot\lambda} dx \\ &= \mathcal{F}(e^{2\pi i x\cdot y} f)(\lambda). \end{aligned}$$

8. $\mathcal{F}(f^{(n)})(\lambda) = (2\pi i\lambda)^n\, \mathcal{F}(f)(\lambda)$ eşitliğini $n = 1$ için yapalım. Genel hali tümevarımdan elde edilir.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f')(\lambda) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f'(x) e^{-2\pi i x\cdot\lambda} dx \\ &= \cdots u = e^{-2\pi i x\cdot\lambda},\ du = -2\pi i\lambda e^{-2\pi i x\cdot\lambda} dx;\ \ dv = f'(x)dx,\ \ v = f(x) \\ &= \underbrace{\lim_{|x|\to\infty} e^{-2\pi i x\cdot\lambda} f(x)}_{=0} - \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,(-2\pi i\lambda)\, e^{-2\pi i x\cdot\lambda} dx \\ &= (2\pi i\lambda)\, \mathcal{F}(f)(\lambda). \end{aligned}$$

9.

$$\frac{d^n \mathcal{F}(f)(\lambda)}{d\lambda^n} = \mathcal{F}\left((-2\pi i x)^n f(x)\right)(\lambda)$$

eşitliğini de $n = 1$ için yapalım. Bu durumda $f(x) \in L_1,\ xf(x) \in L_1$ olsun. Yani,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty \ \text{ ve } \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x||f(x)| dx < \infty$$

dir.

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \lambda} dx$$

Fourier dönüşümünün türevlendiğini gösterelim.

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{F}(f)(\lambda)}{d\lambda} &= \lim_{|h|\to 0} \frac{\mathcal{F}(f)(\lambda+h) - \mathcal{F}(f)(\lambda)}{h} \\
&= \lim_{|h|\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \left(e^{-2\pi i x \cdot (\lambda+h)} - e^{-2\pi i x \cdot \lambda} \right) dx \\
&= \lim_{|h|\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \lambda} \left(\frac{e^{-2\pi i x \cdot h} - 1}{h} \right) dx \\
&= \lim_{|h|\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \lambda} \left(\frac{\cos(2\pi x \cdot h) - 1}{h} - i \frac{\sin(2\pi x \cdot h)}{h} \right) dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada Lebesque baskın yakınsama teoremi uygulanacaktır. Yani limit integral altına girecektir. Bunun için integral altındaki fonksiyonun $|h| \to 0$ iken limiti var ve bu fonksiyonun mutlak değerinin integrallenebilir bir fonksiyon ile üstten sınırlandırılması gereklidir. Bunu kontrol edelim.

$$\lim_{|h|\to 0} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \lambda} \left(\frac{\cos(2\pi x \cdot h) - 1}{h} - i \frac{\sin(2\pi x \cdot h)}{h} \right)$$

limitine bakalım.

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{\cos(2\pi x \cdot h) - 1}{h} = 0 \ \text{ ve } \lim_{|h|\to 0} \frac{\sin(2\pi x \cdot h)}{h} = 2\pi x$$

olduğundan

$$\lim_{|h|\to 0} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \lambda} \left(\frac{\cos(2\pi x \cdot h) - 1}{h} - i \frac{\sin(2\pi x \cdot h)}{h} \right) = -2\pi i x f(x) e^{-2\pi i x \cdot \lambda}$$

olur. Bundan başka

$$\left| f(x) e^{-2\pi i x \cdot \lambda} \left(\frac{\cos(2\pi x \cdot h) - 1}{h} - i \frac{\sin(2\pi x \cdot h)}{h} \right) \right| \leq 2|f(x)||x| \in L_1$$

olduğundan integral altında limite geçebiliriz. Böylece

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{F}(f)(\lambda)}{d\lambda} &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \lim_{|h|\to 0} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\lambda}\left(\frac{\cos(2\pi x\cdot h)-1}{h} - i\frac{\sin(2\pi x\cdot h)}{h}\right)dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} -2\pi i x f(x)e^{-2\pi i x\cdot\lambda}dx \\
&= \mathcal{F}\left((-2\pi i x)\, f(x)\right)(\lambda)
\end{aligned}$$

bulunur.

10. Fourier dönüşümünün girişimi çarpmaya dönüştürdüğünü görelim. Bunun için Fubini teoremini kullanacağız.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}((f*g))(\lambda) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x)e^{-2\pi i x\cdot\lambda}dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy\right)e^{-2\pi i x\cdot\lambda}dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)e^{-2\pi i x\cdot\lambda}dxdy \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)e^{-2\pi i x\cdot\lambda}dx\right)dy \\
&= ...z = x-y,\ \ dz = dx... \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(z)e^{-2\pi i (y+z)\cdot\lambda}dz\right)dy \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-2\pi i y\cdot\lambda}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(z)e^{-2\pi i z\cdot\lambda}dz\right)dy \\
&= \mathcal{F}(f)(\lambda)\mathcal{F}(g)(\lambda).
\end{aligned}$$

□

Bundan sonra aşağıda Riesz-Thorin interpolasyon teoreminin uygulamalarını göreceğiz. Öncelikle

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{L_q} \leq \|f\|_{L_p}, \ \ 1\leq p\leq 2,\ \ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

eşitsizliğini Riesz-Thorin interpolasyon teoremi ile gösterelim.

Bunun için $\mathbb{R}^n$ de yukarıda tanımladığımız $\mathcal{F}(f)$ Fourier dönüşümü tanımını tekrar göz önüne alalım. $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \lambda} dx$$

ve $x \cdot \lambda = x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + ... + x_n\lambda_n$ dir.

Fourier dönüşümü teorisinden bilinen Parseval eşitliğine göre

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{L_2} = \|f\|_{L_2}, \quad M_0 = 1$$

dir. Bundan başka

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(f)\|_{L_\infty} &= ess \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(f)(\lambda)| \\ &\leq ess \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \left|e^{-2\pi i x \lambda}\right| dx \\ &\leq \|f\|_{L_1}, \quad M_1 = 1 \end{aligned}$$

dir. Şimdi Riesz-Thorin interpolasyon teoremine göre,

$$\begin{array}{ccc} \bullet p_0 = 2 & \longrightarrow & \bullet q_0 = 2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet p_1 = 1 & \longrightarrow & \bullet q_1 = \infty \end{array}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} = \frac{1-t}{2} + t = \frac{1+t}{2} \\ \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1} = \frac{1-t}{2} \end{aligned}$$

olur. Buradan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ bulunur. Böylece

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{L_q} \leq \|f\|_{L_p}, 1 \leq p \leq 2, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

elde edilir.

Riesz-Thorin interpolasyon teoreminin bir diğer uygulaması da aşağıdaki Young eşitsizliğidir.

$f \in L_p(\mathbb{R}^n), \ g \in L_q(\mathbb{R}^n)$ ve $1 \leq p, q, r \leq \infty$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$ olmak üzere

$$\|f * g\|_{L_r} \leq \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q}.$$

Şimdi herhangi $g \in L_q$ olmak üzere

$$\begin{aligned} T_g : L_1(\mathbb{R}^n) &\rightarrow L_q(\mathbb{R}^n) \\ f &\rightarrow T_g(f)(x) = (f * g)(x) \end{aligned}$$

operatörünü tanımlayalım. İntegraller için Minkowski eşitsizliğine göre

$$\begin{aligned} \|T_g f\|_{L_q} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(f*g)(x)|^q dx \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||g(x-y)|dy \right)^q dx \right)^{1/q} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^q |g(x-y)|^q dx \right)^{1/q} dy \\ &= \|g\|_{L_q} \|f\|_{L_1} \end{aligned}$$

ve Hölder eşitsizliğine göre

$$\begin{aligned} \|T_g f\|_{L_\infty} &= ess \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |T_g f(x)| \\ &= ess \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||g(x-y)|dy \\ &\leq ess \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{q'} dy \right)^{1/q'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^q dy \right)^{1/q} \\ &= \|g\|_{L_q} \|f\|_{L_{q'}} \end{aligned}$$

elde edilir. Yani, T_g operatörü $(1, q)$ ve (q', ∞) tiplidir, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Böylece

$$\begin{array}{ccc} \bullet p_0 = 1 & \longrightarrow & \bullet q_0 = q \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet p_1 = q' & \longrightarrow & \bullet q_1 = \infty \end{array}$$

Riesz-Thorin interpolasyon teoremine göre,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} = 1 - t + \frac{t}{q'}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{1-t}{q}$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1-t+\frac{t}{q'}+\frac{1}{q}=1-t+t-\frac{t}{q}+\frac{1}{q}=1+\frac{1}{r}$$

ve

$$\|f*g\|_{L_r}\leq\|f\|_{L_p}\|g\|_{L_q}$$

olur.

3.2. Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoremi ve Uygulamaları

Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoremini ifade etmeden önce dağılım fonksiyonunu tanımlayacağız ve bizim için gerekli olacak bir teoremin ispatını vereceğiz.

Tanım 3.34. *(Kufner, John, Fucik (1977)) (Dağılım (Distribution) fonksiyonu)* (X,M,μ) *ölçüm uzayı olsun.*

$$\begin{aligned} d_f:(0,\infty) &\longrightarrow [0,\infty) \\ \alpha &\longrightarrow d_f(\alpha)=\mu\{x:|f(x)|>\alpha\} \end{aligned}$$

fonksiyonuna f 'nin ***dağılım fonksiyonu*** *denir.*

Dağılım fonksiyonunun ilk önemli özelliği azalan fonksiyon olmasıdır. Yani,

$$\alpha_1\leq\alpha_2 \text{ iken } d_f(\alpha_1)\geq d_f(\alpha_2)$$

dir. Bundan başka aşağıdaki teoremle dağılım fonksiyonunun bazı özelliklerini verelim.

Teorem 3.35. *(Kufner, John, Fucik (1977)) f ve g fonksiyonları (X,M,μ) ölçüm uzayında tanımlı ölçülebilir fonksiyonlar olsun.*

1) $|g(x)|\leq|f(x)|$, $h.h.x\in X$ ise $d_g(\alpha)\geq d_f(\alpha)$, $\alpha>0$ dir.

2) c bir skaler olmak üzere $d_{cf}(\alpha)=d_f(\frac{\alpha}{|c|})$ dir.

3) $d_{f+g}(\alpha+\beta)\leq d_f(\alpha)+d_g(\beta)$.

4) $d_{fg}(\alpha\beta)\leq d_f(\alpha)+d_g(\beta)$.

Teorem 3.36. *(Kufner, John, Fucik (1977)) (X,M,μ) ölçüm uzayı ve $f\in L_p(X)$, $1\leq p<\infty$ olsun. Bu durumda*

$$\|f\|_{L_p(X)}^p=\int_0^\infty p\alpha^{p-1}d_f(\alpha)\,d\alpha$$

dir.

İspat

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty p\alpha^{p-1}d_f(\alpha)\,d\alpha &= p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\mu\left\{x : |f(x)| > \alpha\right\}\,d\alpha \\
&= p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\left(\int_X \chi_{\{x:|f(x)|>\alpha\}}(x)dx\right)\,d\alpha \\
&= p\int_X \left(\int_0^\infty \alpha^{p-1}\chi_{\{x:|f(x)|>\alpha\}}(x)d\alpha\right)dx \\
&= p\int_X \int_0^{|f(x)|} \alpha^{p-1}d\alpha dx \\
&= p\int_X \frac{|f(x)|^p}{p}dx \\
&= \|f\|^p_{L_p(X)}.
\end{aligned}$$

□

Artık Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoremini ifade edip, ispatını ifade edebiliriz.

Teorem 3.37. *(Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoremi) (Folland (1984))* (X, M, μ) *ve* (Y, N, ν) *ölçüm uzayları ve*

$$1 \leq p_0,\ p_1,\ q_0,\ q_1 \leq \infty \quad p_0 \leq q_0, p_1 \leq q_1 \ \textit{ ve } \ q_0 \neq q_1$$

olsun. Ayrıca,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \ \textit{ve} \ \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$$

ve T *yarı-lineer operatörü* (p_0,q_0)*-zayıf ve* (p_1, q_1)*-zayıf tipli olsun. Böylece* T*,*(p, q)*-güçlü tiplidir. Yani,*

$$\|Tf\|_{L_q} \leq c\,\|f\|_{L_p}$$

olacak şekilde $c > 0$ *sabiti vardır.*

İspat $f \in L_p(X)$ alalım. Herhangi $\alpha > 0$ verilmiş olsun. Şimdi

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| > c\alpha \\ 0, & |f(x)| \leq c\alpha \end{cases}, \quad f_1(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leq c\alpha \\ 0, & |f(x)| > c\alpha \end{cases}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Burada c sabiti ileride belirlenecektir. Öncelikle

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x)$$

olduğu açıktır. Bundan başka

$$\begin{aligned} \int\limits_X |f_0(x)|^{p_0} dx &= \int\limits_{\{x:\,|f(x)|>c\alpha\}} |f(x)|^{p_0} dx \le (c\alpha)^{p_0} \int\limits_{\{x:\,|f(x)|>c\alpha\}} \left|\frac{f(x)}{c\alpha}\right|^{p_0} dx \\ &\le \frac{(c\alpha)^{p_0}}{(c\alpha)^p} \int\limits_X |f(x)|^p dx < \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int\limits_X |f_1(x)|^{p_1} dx &= \int\limits_{\{x:\,|f(x)|\le c\alpha\}} |f(x)|^{p_1} dx \le (c\alpha)^{p_1} \int\limits_{\{x:\,|f(x)|\le c\alpha\}} \left|\frac{f(x)}{c\alpha}\right|^{p_1} dx \\ &\le \frac{(c\alpha)^{p_1}}{(c\alpha)^p} \int\limits_X |f(x)|^p dx < \infty \end{aligned}$$

hesaplamalarından $f_0 \in L_{p_0}(X)$ ve $f_1 \in L_{p_1}(X)$ olur ve $f = f_0 + f_1 \in L_{p_0}(X) + L_{p_1}(X)$ olur. T yarı-lineer operatör olduğundan

$$|Tf(x)| = |T(f_0 + f_1)(x)| \le |T(f_0)(x)| + |T(f_1)(x)|$$

dir.

• $p_0 = q_0,\ \ p_1 = q_1 < \infty$ **durumu**.

Bu durumda $p = q$ olur. Şimdi $p_0 < p < p_1$ olmak üzere

$$\{x:\ |Tf(x)| > \alpha\} \subseteq \left\{x:\ |Tf_0(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\} \bigcup \left\{x:\ |Tf_1(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\}$$

ve

$$\mu\{x:\ |Tf(x)| > \alpha\} \le \mu\left\{x:\ |Tf_0(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\} + \mu\left\{x:\ |Tf_1(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\}$$

eşitsizliğinden

$$d_{Tf}(\alpha) \le d_{Tf_0}(\frac{\alpha}{2}) + d_{Tf_1}(\frac{\alpha}{2})$$

elde edilir. Bundan başka T , (p_0,p_0)-zayıf tipli ve T , (p_1,p_1)-zayıf tipli olduğundan sırasıyla

$$d_{Tf_0}(\frac{\alpha}{2}) \le \left(\frac{2A_1}{\alpha}\|f_0\|_{L_{p_0}}\right)^{p_0},\ \ d_{Tf_1}(\frac{\alpha}{2}) \le \left(\frac{2A_2}{\alpha}\|f_1\|_{L_{p_1}}\right)^{p_1}$$

eşitsizliklerini elde ederiz. Şimdi

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{L_p}^p &= \int_0^\infty p\alpha^{p-1} d_{Tf}(\alpha)\, d\alpha \\
&\leq \int_0^\infty p\alpha^{p-1} d_{Tf_0}(\frac{\alpha}{2}) d\alpha + \int_0^\infty p\alpha^{p-1} d_{Tf_1}(\frac{\alpha}{2})\, d\alpha \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

diyelim. Fubini teoremini kullanarak

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\infty p\alpha^{p-1} d_{Tf_0}(\frac{\alpha}{2}) d\alpha \leq \int_0^\infty p\alpha^{p-1} \left(\frac{2A_1}{\alpha}\right)^{p_0} \|f_0\|_{L_{p_0}}^{p_0}\, d\alpha \\
&= p\left(2A_1\right)^{p_0} \int_0^\infty \alpha^{p-p_0-1} \left(\int_X |f_0(x)|^{p_0} dx\right) d\alpha \\
&= p\left(2A_1\right)^{p_0} \int_0^\infty \alpha^{p-p_0-1} \left(\int_{\{x:\, |f(x)|>c\alpha\}} |f(x)|^{p_0} dx\right) d\alpha \\
&= p\left(2A_1\right)^{p_0} \int_0^\infty \alpha^{p-p_0-1} \left(\int_X \chi_{\{x:|f(x)|>c\alpha\}}(x) |f(x)|^{p_0} dx\right) d\alpha \\
&= p\left(2A_1\right)^{p_0} \int_X |f(x)|^{p_0} \left(\int_0^\infty \alpha^{p-p_0-1} \chi_{\{x:|f(x)|>c\alpha\}}(x) d\alpha\right) dx \\
&= p\left(2A_1\right)^{p_0} \int_X |f(x)|^{p_0} \left(\int_0^{|f(x)|/c} \alpha^{p-p_0-1} d\alpha\right) dx \\
&= p\left(2A_1\right)^{p_0} \int_X |f(x)|^{p_0} \frac{|f(x)|^{p-p_0}}{c^{p-p_0}} \frac{1}{p-p_0} dx = \frac{p\left(2A_1\right)^{p_0}}{c^{p-p_0}\left(p-p_0\right)} \|f\|_{L_p}^p \\
I_2 &= p\int_0^\infty \alpha^{p-1} d_{Tf_1}(\frac{\alpha}{2}) d\alpha \leq p\int_0^\infty \alpha^{p-1} \left(\frac{2A_2}{\alpha}\right)^{p_1} \|f_0\|_{L_{p_1}}^{p_1}\, d\alpha \\
&= p\left(2A_2\right)^{p_1} \int_0^\infty \alpha^{p-p_1-1} \left(\int_X |f_1(x)|^{p_1} dx\right) d\alpha
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= p\left(2A_2\right)^{p_1}\int_0^\infty \alpha^{p-p_1-1}\left(\int_{\{x:\,|f(x)|\le c\alpha\}}|f(x)|^{p_1}dx\right)d\alpha\\
&= p\left(2A_2\right)^{p_1}\int_0^\infty \alpha^{p-p_1-1}\left(\int_X \chi_{\{x:|f(x)|\le c\alpha\}}(x)|f(x)|^{p_1}dx\right)d\alpha\\
&= p\left(2A_2\right)^{p_1}\int_X |f(x)|^{p_1}\left(\int_0^\infty \alpha^{p-p_1-1}\chi_{\{x:|f(x)\le c\alpha\}}(x)d\alpha\right)dx\\
&= p\left(2A_2\right)^{p_1}\int_X |f(x)|^{p_1}\left(\int_{|f(x)|/c}^\infty \alpha^{p-p_1-1}d\alpha\right)dx\\
&= p\left(2A_2\right)^{p_1}\int_X |f(x)|^{p_1}\left(\lim_{t\to\infty}\frac{\alpha^{p-p_1}}{p-p_1}|_{|f(x)|/c}^{t}\right)dx\\
&= \frac{p}{p_1-p}\frac{\left(2A_2\right)^{p_1}}{c^{p-p_1}}\int_X |f(x)|^{p_1}|f(x)|^{p-p_1}dx\\
&= \frac{p}{p_1-p}\frac{\left(2A_2\right)^{p_1}}{c^{p-p_1}}\,\|f\|_{L_p}^p\,.
\end{aligned}
$$

olur. Böylece

$$\|Tf\|_{L_p}^p \le c\,\|f\|_{L_p}^p$$

bulunur..

- $p_0 = q_0,\ \ p_1 = q_1 = \infty$ **durumu**. Bu durumda

$$I_1 \le \frac{p\left(2A_1\right)^{p_0}}{c^{p-p_0}\left(p-p_0\right)}\,\|f\|_{L_p}^p$$

dir. $p_1 = \infty$ için $T : L_\infty(X) \to L_\infty(X)$ sınırlı olduğundan

$$||f_1||_{L_\infty(X)} = ess\sup_{x\in X}|f_1(x)| = ess\sup_{\{x:\,|f(x)|\le c\alpha\}}|f(x)| = c\alpha$$

dir.

$$||Tf_1||_{L_\infty(X)} \le A||f_1||_{L_\infty(X)}$$

olduğundan yukarıdaki c sabitini $c = \frac{1}{2A}$ seçelim. Bu durumda $||Tf_1||_{L_\infty(X)} \le \frac{\alpha}{2}$ ve $\mu\{x:\ |Tf_1(x)| > \frac{\alpha}{2}\} = 0$ olur. Yani, $d_{Tf_1}(\frac{\alpha}{2}) = 0$ dir. Buradan

$$\|Tf\|_{L_p} \le \left(\frac{pA_1^{p_0}}{(p-p_0)c^{p-p_0}}\right)^{1/q}\|f\|_{L_p}$$

olur. Genel hali, $p_0 < p_1,\ q_0 < q_1 < \infty$ (Folland 1984) kaynağındadır. □

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Hardy-Littlewood Maksimal Fonksiyonun L_p Uzaylarında Sınırlılığı

Tezin bundan sonraki kısmında amacımız olan Fourier harmonik analizinin en önemli operatörlerinden birisi olan Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunu tanımlayıp, L_p uzaylarında sınırlılığını ifade edilecektir. Teoremin ispatı Marcinkiewicz interpolasyon teoremi kullanılarak gösterilecektir.

Ayrıca Fourier-Bessel harmonik analizinde önemli bir teknik araç olan genelleşmiş kaymanın doğurduğu maksimal fonksiyonu tanımlayıp, bazı kullanıldığı yerleri vereceğiz.

Tanım 4.38. *(Stein (1971,1993)) $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere, $M : f \to Mf$,*

$$M(f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|\, dy$$

şeklinde tanımlanan operatöre Hardy-Littewood maksimal fonksiyonu denir. Burada supremum x-merkezli, $r > 0$ yarıçaplı tüm $B(x,r)$ yuvarları üzerinden alınır.

$M(f) = M(|f|) \geq 0$ olduğundan maksimal fonksiyon, pozitif operatördür. Bununla birlikte M operatörü lineer değil, yarı-lineer operatördür. Yani,

$$|M(f_1 + f_2)(x)| \leq |Mf_1(x)| + |Mf_2(x)|$$

$$|M(\alpha f)(x)| = |\alpha|\, |Mf(x)|$$

dir.

Maksimal fonksiyonu

$$M(f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,1)|r^n} \int\limits_{B(0,r)} |f(x-y)|\, dy$$

şeklinde de yazabiliriz. Buradan görüyoruz ki Hardy-Littewood maksimal fonksiyonu, klasik kayma operatörü ile ilişkilidir.

Maksimal fonskiyon, Fourier harmonik analizinde birçok operatörün noktasal yakınsama probleminde önemli rol oynamaktadır. İleride örnekler vereceğiz. Öncelikle Maksimal operatörün L_p uzaylarında sınırlılığını ifade edelim.

Şimdi şöyle bir gözlemde bulunalım. f fonksiyonu olarak $[a, b]$ aralığının karakteristik fonksiyonunu alalım. Bu durumda

$$Mf(x) = \begin{cases} \frac{|b-a|}{2|x-b|} & , \quad x \leq a \\ 1 & , \quad a < x < b \\ \frac{|b-a|}{2|x-a|} & , \quad x \geq b \end{cases}$$

olur ve buradan görülür ki $f \in L_1(\mathbb{R})$ iken Maksimal fonksiyon Mf , $L_1(\mathbb{R})$ uzayından değildir. Genel olarak, $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ iken $Mf \notin L_1(\mathbb{R}^n)$ dir. Bu ise Mf operatörünün $p = 1$ için sınırlı olmadığını gösterir.

Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu Lebesque uzaylarında zayıf-$(1, 1)$ etki gösterir. $1 < p \leq \infty$ için güçlü-(p, p) etki gösterir.

Bu teoremi $\mathbb{R}$ de Hardy-Littlewood, $n \geq 2$ için $\mathbb{R}^n$ de Wiener kanıtlamıştır. Zayıf $(1, 1)$ yakınsamanın ispatı Vitali Örtü lemmasına dayanır, öncelikle Vitali Örtü lemasını ardından Hardy-Littlewood-Wiener Teoremini ifade edelim.

Önteorem 4.39. *(Stein (1971,1993)) (Vitali Örtü Leması)* $\mathbb{R}^n$ *'de* $\{B_i, i \in I\}$ *biçiminde yarıçapları sonlu, keyfi yuvarlar topluluğunu göz önüne alalım. Bu takdirde bu ailenin,* $\{B_1, B_2, ..., B_k, ...\}$ *şeklinde ikişerli ayrık, öyle bir sayılabilir alt ailesi vardır ki*

$$\bigcup_{i \in I} B_i \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} 3B_k$$

dır. Burada $3B_k$ *yuvarının merkezi* B_k *ile aynıdır, yarıçapı* B_k *yuvarının yarıçapının* 3 *katıdır.*

Teorem 4.40. *(Stein (1971,1993)) (Hardy-Littlewood-Wiener Teoremi)*

a) $f \in L_1$ *olsun. Bu durumda* $\forall \alpha > 0$ *için*

$$|\{x : |Mf(x)| > \alpha\}| \leq \frac{c_1}{\alpha} \|f\|_{L_1}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde n *'ye bağlı* $c_1 > 0$ *sabiti vardır.*

b) $f \in L_p$ *ve* $1 < p \leq \infty$ *olsun. Bu durumda*

$$\|Mf(x)\|_{L_p} \leq c_2 \|f\|_{L_p}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde n *ve* p *'ye bağlı* $c_2 > 0$ *sabiti vardır.*

İspat a) $f \in L_1$ olsun. $\alpha > 0$ için

$$A_\alpha = \{x : |Mf(x)| > \alpha\}$$

diyelim. $\forall x \in A_\alpha$ için öyle bir $B(x, r_x),\ r_x > 0$ yuvarını seçelim ki

$$\frac{1}{|B(x, r_x)|} \int\limits_{B(x, r_x)} |f(y)|\, dy > \alpha$$

eşitsizliği sağlansın. Böylece A_α kümesini örten $\{B(x, r_x)\}_{x \in E_\alpha}$ yuvarlar ailesini elde ederiz. Vitali Örtü lemmasına göre bu ailenin ikişerli ayrık, sayılabilir

$$\{B(x_i, r_{x_i}), i = 1, 2, ...\}$$

alt ailesi vardır ki

$$A_\alpha \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, 3r_{x_i})$$

olur. Buradan yukarıdaki eşitsizliği kullanarak

$$\begin{aligned} |A_\alpha| &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |B(x_i, 3r_{x_i})| \\ &= 3^n \sum_{i=1}^{\infty} |B(x_i, r_{x_i})| \\ &< \frac{3^n}{\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{B(x_i, r_{x_i})} |f(y)|\, dy \\ &= \frac{3^n}{\alpha} \int\limits_{\bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_{x_i})} |f(y)|\, dy \\ &\leq \frac{3^n}{\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy \end{aligned}$$

elde edilir. Yani, $|\{x : |Mf(x)| > \alpha\}| \leq c_1 \|f\|_{L_1}$, $c_1 = \frac{3^n}{\alpha}$ olur.

b) $f \in L_\infty$ için

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy \leq \|f\|_{L_\infty}$$

dir ve eşitsizliğin her iki yanından ess sup alınırsa

$$\|Mf\|_{L_\infty} \leq \|f\|_{L_\infty}$$

elde edilir.

Şimdi $f \in L_p$ ve $1 < p \leq \infty$ olsun. $\alpha > 0$ olmak üzere f fonksiyonunun dağılım fonksiyonu adı verilen ve $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}$ kümesinin Lebesque ölçümü olarak tanımlanan $d_f(\alpha) = |E_\alpha|$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $d_f(\alpha)$ dağılım fonkiyonu ile $\|f\|_{L_p}$ arasında aşağıdaki eşitlik çok kullanışlıdır:

$$\|f\|_{L_p}^p = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} d_f(\alpha) d\alpha \tag{4.2}$$

Öncelikle bu eşitliği Fubini teoremini kullanarak gösterelim:

$$\begin{aligned}
p \int_0^\infty \alpha^{p-1} d_f(\alpha) d\alpha &= p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \left|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}\right| d\alpha \\
&= p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A_\alpha}(x) dx \right) d\alpha \\
&= p \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \alpha^{p-1} \chi_{A_\alpha}(x) d\alpha \right) dx \\
&= p \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{|f(x)|} \alpha^{p-1} d\alpha \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \\
&= \|f\|_{L_p}^p
\end{aligned}$$

Ayrıca $f \in L_p$, $1 < p \leq \infty$ fonksiyonunu

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad |f(x)| \geq \frac{\alpha}{2} \\ 0 & , \quad |f(x)| < \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

ve

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & , \quad |f(x)| \geq \frac{\alpha}{2} \\ f(x) & , \quad |f(x)| < \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

biçiminde parçalayalım. $x \in \mathbb{R}^n$ için $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ dir.

Kolayca görülür ki

$$f_2 \in L_\infty, \quad \|f_2\|_{L_\infty} < \frac{\alpha}{2}$$

ve

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|^{1-p}\,|f_1(x)|^p\,dx \\ &\leq \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1-p} \int_{\left\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|\geq\frac{\alpha}{2}\right\}} |f(x)|^p\,dx \\ &\leq \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1-p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx < \infty\end{aligned}$$

olduğundan $f_1 \in L_1$ dir. Ayrıca Hardy-Littlewood maksimal operatörü, yarı-lineer olduğundan

$$Mf(x) \leq Mf_1(x) + Mf_2(x)$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}\{x\in\mathbb{R}^n : |Mf(x)| > \alpha\} &\leq \left\{x\in\mathbb{R}^n : |Mf_1(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\right\} + \left\{x\in\mathbb{R}^n : |Mf_2(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\right\} \\ &= I_1 + I_2\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Şimdi I_1 ve I_2 tahminlerini hesaplayalım.

$f_2 \in L_\infty$ olduğundan

$$\|Mf_2(x)\| \leq \|Mf_2\|_{L_\infty} \leq \|f_2\|_{L_\infty} \leq \frac{\alpha}{2}$$

olur. Bu ise

$$I_2 = \left|\left\{x\in\mathbb{R}^n : |Mf_2(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\right\}\right| = 0$$

olması demektir. $f_1 \in L_1$ ve maksimal operatör zayıf $(1,1)$ tipli olduğundan

$$I_1 = \left|\left\{x\in\mathbb{R}^n : |Mf_1(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\right\}\right| \leq \frac{c}{\alpha}\,\|f_1\|_{L_1}$$

olur. Son olarak (2.6) eşitsizliğini maksimal fonksiyon Mf için yeniden yazarsak ve son bulduğumuz tahmini de kullanırsak

$$\begin{aligned}\|Mf\|_{L_p}^p &= p\int_0^\infty \alpha^{p-1} d_{Mf}(\alpha)d\alpha = p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\,|\{x\in\mathbb{R}^n : |Mf(x)| > \alpha\}|\,d\alpha \\ &\leq cp\int_0^\infty \alpha^{p-2}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|\,dx\right)d\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= cp\int\limits_0^\infty \alpha^{p-2}\left(\int\limits_{\left\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|\geq\frac{\alpha}{2}\right\}}|f(x)|\,dx\right)d\alpha \\
&= cp\int\limits_0^\infty \alpha^{p-2}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\,\chi_{\left\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|\geq\frac{\alpha}{2}\right\}}(x)dx\right)d\alpha \\
&= cp\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\left(\int\limits_0^\infty \alpha^{p-2}\chi_{\left\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|\geq\frac{\alpha}{2}\right\}}(x)d\alpha\right)dx \\
&= cp\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\left(\int\limits_0^{2|f(x)|}\alpha^{p-2}d\alpha\right)dx \\
&= c_1\,\|f\|_{L_p}^p
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Ayrıca Marcinkiewicz interpolasyon teoremini kullanarak da Maksimal foksiyonun $1<p<\infty$ için L_p den L_p 'ye sınırlılığını gösterebiliriz. Şöyle ki Maksimal fonksiyon $(1,1)$-zayıf ve (güçlü) $(\infty,\infty)-$tipli olduğundan Marcinkiewicz interpolasyon teoremine göre

$$\frac{1}{p}=1-t=\frac{1}{q}$$

eşitliğinden $p=q$ bulunur. Bu ise teoremden Maksimal foksiyonun (güçlü) $(p,p)-$ tipli olduğunu verir. Yani,

$$\|Mf\|_{L_p}\leq c\,\|f\|_{L_p}\,,\ \ 1<p\leq\infty$$

dir. □

Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunun uygulandığı alanlardan birini ifade edelim. ψ, $[0,\infty]$ aralığında tanımlı negatif olmayan , azalan fonksiyon olmak üzere

$$\varphi(t)=\psi(|t|)\ \text{ ve }\ \int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)dx=1$$

olsun. $\epsilon>0$ için $\varphi_\epsilon(x)=\epsilon^{-n}\varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ tanımlayalım. $f\in L_p, 1\leq p\leq\infty$ için

$$Mf(x)=\sup_{\epsilon>0}\left(f*\varphi_\epsilon\right)(x)=\sup_{\epsilon>0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(x-y)\varphi_\epsilon(y)dy$$

eşitliği Stein ve Weiss (2002, 2005) tarafından gösterilmiştir. Burada φ fonksiyonu olarak

$$\varphi(x) = \frac{c_n}{\left(|x|^2 + 1\right)^{(n+1)/2}}$$

alırsak,

$$\varphi_y(x) = y^{-n}\varphi\left(\frac{x}{y}\right) = c_n \frac{y}{\left(|x|^2 + y^2\right)^{(n+1)/2}},\ y > 0$$

fonksiyonuna **Poisson çekirdeği** denir ve $P(x, y) = \varphi_y(x)$ ile gösterilir. Ayrıca

$$u(x, y) = \left(f * P(., y)\right)(x),\ \ y > 0$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun **Poisson integrali** denir. Bununla ilgili aşağıdaki teorem Stein ve Weiss tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 4.41. *(Stein ve Weiss (1971, 1993))* $f \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$ *ve*

$$u(x, y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x - t)P(t, y)dt,\ \ y > 0$$

olmak üzere

$$|u(x, y)| \leq Mf(x)$$

dir.

Ayrıca bu teoremin tersini de görmek zor değildir.

Teorem 4.42. *(Stein ve Weiss (1971, 1993))* $f \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$ *ve*

$$u(x, y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x - t)P(t, y)dt,\ \ y > 0$$

olmak üzere

$$Mf(x) \leq A(n)\left\{\sup_{y>0} u(x, y)\right\}$$

dir. Burada $A(n)$ *sadece uzayın boyutu* n*'ye bağlı sabittir.*

4.2. Hardy-Littlewood Maksimal Fonksiyonun $L_{p,\nu}$ Uzaylarında Sınırlılığı

Tez çalışmamızın bundan sonraki kısmında Fourier-Bessel harmonik analizinin önemli operatörlerinden biri olan Laplace-Bessel diferansiyel operatörü Δ_ν

$$\Delta_\nu = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{2\nu}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}\right), \quad (\nu > 0,\ \ x_n > 0)$$

ile ilişkilendirilen

$$M_\nu f(x) = \sup_{r>o} \frac{1}{|B(0,r)|_\nu} \int\limits_{B(0,r)} T^y |f(x)| y_n^{2\nu} dy, \;\; x \in \mathbb{R}_+^n$$

Maksimal operatörünün ağırlıklı $L_{p,\nu}$,$1 \leq p \leq \infty$ uzaylarında sınırlılığını ve uygulandığı bazı alanları ifade edeceğiz. Burada $\mathbb{R}_+^n$ uzayı,

$$\mathbb{R}_+^n = \{x : x = (x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n, x_n \geq 0\}$$

ile tanımlanır.

Bu uzayda $x-$ merkezli $r > 0$ yarıçaplı yuvar, $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}_+^n : |x - y| < r\}$ ile gösterilir ve $E \subseteq \mathbb{R}_+^n$ olmak üzere $|E|_\nu = \int\limits_E x_n^{2\nu} dx, \; \nu > 0$ dir.

$\mathbb{R}_+^n$ uzayında Laplace-Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu genelleşmiş kayma operatörü

$$T_x^y f(x) = \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{1}{2})} \int\limits_0^\pi f\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right) \sin^{2\nu-1}\alpha \, d\alpha, \quad y \in \mathbb{R}_+^n$$

ile tanımlanır. Bu kayma operatör bir çeşit "hibrit" operatördür. Yani, ilk $n-1$ değişkene Laplace operatörünün doğurduğu klasik kayma (Öklid kayması) ve sonuncu değişkene de Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu Bessel kayması uygulanmıştır.

Öklid kayması ile Bessel kaymasının komposizyonu olan genelleşmiş kayma operatörü ile birçok matematikçi çalışmalar yapmış ve yapmaya devam etmektedir. Bunlardan bazıları Gadjiev ve Aliev (1994), Aliev ve Bayrakci (1998, 2002), Guliev (2003, 2006), Levitan (1951) Kipriyanov (1967), Klyuchantsev (1970), Lofstrom ve Peetre (1969), Lyakhov (1983), Stempak (1985), Trimeche (1997), vb.

$\mathbb{R}_+^n$ da tanımlı ölçülebilir fonksiyonların ağırlıklı Lebesque uzayı, $1 \leq p < \infty$ için

$$L_{p,\nu} \equiv L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n) = \left\{ f : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R} \text{ Lebesque ölçülebilir, } \quad \|f\|_{L_{p,\nu}} < \infty \right\}$$

ve

$$\|f\|_{L_{p,\nu}} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |f(x)|^p x_n^{2\nu} dx \right)^{1/p}$$

ile tanımlanmaktadır. $L_{p,\nu}$ uzayının normlu uzay olduğu açıktır. $p = \infty$ için $L_{\infty,\nu}$ uzayını ise L_∞ ile göstereceğiz ve $\|f\|_{L_\infty} = ess \sup |f(x)|, \; x \in \mathbb{R}_+^n$ şeklindedir.

Ayrıca $x_n^{2\nu}dx$ ölçümüne göre $\mathbb{R}_+^n$ da tanımlı local integrallenebilen fonksiyonların uzayını da $L_{1,\nu}^{loc} \equiv L_{1,\nu}^{loc}(\mathbb{R}_+^n)$ ile gösteriyoruz.

Genelleşmiş kayma operatörünün doğurduğu maksimal fonksiyonun ağırlıklı Lebesque uzaylarında sınırlılığı Guliyev (Guliyev 1998) tarafından kanıtlanmıştır. Aşağıda bu teoremi ispatsız vereceğiz.

Teorem 4.43. *(Guliyev 1998) $f \in L_{1,\nu}^{loc}$ olmak üzere*

$p = 1$ *için*

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n \ : \ |M_\nu f(x)| > \lambda\right\}\right|_\nu \leq c_2 \, \frac{||f||_{L_{1,\nu}}}{\lambda}, \qquad (\forall \lambda > 0)$$

ve $1 < p < \infty$ *için*

$$||M_\nu f||_{L_{p,\nu}} \leq c_1 \, ||f||_{L_{p,\nu}}$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu teorem de gösterir ki $M_\nu f$ maksimal operatörü de tıpkı Hardy-Littlewood maksimal operatöründe olduğu gibi, $1 < p \leq \infty$ için $(p,p)-$ tipli ve $p = 1$ için zayıf $(1,1)-$ tiplidir.

Fourier-Bessel analizinde Laplace-Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu Poisson çekirdeği Aliev ve Bayrakci (Aliev,Bayrakci 1998) tarafından

$$P_\nu\left(x;\alpha\right) = F_\nu\left(e^{-|y|}\right)(x) = \sqrt{c_\nu\left(n\right)} \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{\frac{n+2\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{n+2\nu+1}{2}\right) \frac{\alpha}{\left(|x|^2+\alpha^2\right)^{\frac{n+2\nu+1}{2}}}$$

eşitliği ile tanımlanmıştır. $f \in L_{p,\nu}$, $(1 \leq p \leq \infty)$ olmak üzere f fonksiyonu ile Poisson çekirdeğinin girişimi aşağıdaki

$$\left(V_\alpha f\right)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} f(y) \, T_x^y \left(P_\nu\left(x;\alpha\right)\right) y_n^{2\nu} dy$$

Poisson integralidir.

$$\sup_{\alpha>0} |\left(V_\alpha f\right)(x)| \leq M_\nu f(x)$$

eşitsizliği Aliev ve Bayrakci (Aliev,Bayrakci 1998) tarafından kanıtlanmıştır. Ayrıca Aliev ve Bayrakci Poisson integralinin noktasal yakınsama probleminde $M_\nu f$ maksimal operatörünü kullanmıştır.

5. SONUÇLAR

Teorem 5.44. *(Stein (1971,1993)) (Hardy-Littlewood-Wiener Teoremi)*

a) $f \in L_1$ olsun. Bu durumda $\forall\alpha > 0$ için

$$|\{x : |Mf(x)| > \alpha\}| \leq \frac{c_1}{\alpha} \|f\|_{L_1}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde n 'ye bağlı $c_1 > 0$ sabiti vardır.

b) $f \in L_p$ ve $1 < p \leq \infty$ olsun. Bu durumda

$$\|Mf(x)\|_{L_p} \leq c_2 \|f\|_{L_p}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde n ve p 'ye bağlı $c_2 > 0$ sabiti vardır.

Ayrıca Marcinkiewicz interpolasyon teoremini kullanarak da Maksimal foksiyonun $1 < p < \infty$ için L_p den L_p 'ye sınırlılığını gösterebiliriz. Şöyle ki Maksimal fonksiyon $(1,1)$-zayıf ve (güçlü) $(\infty,\infty)-$tipli olduğundan Marcinkiewicz interpolasyon teoremine göre

$$\frac{1}{p} = 1 - t = \frac{1}{q}$$

eşitliğinden $p = q$ bulunur. Bu ise teoremden Maksimal foksiyonun (güçlü) $(p,p)-$ tipli olduğunu verir. Yani,

$$\|Mf\|_{L_p} \leq c\,\|f\|_{L_p}, \;\; 1 < p \leq \infty$$

dir.

Teorem 5.45. *(Guliyev 1998) $f \in L_{1,\nu}^{loc}$ olmak üzere*

$p = 1$ için

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n \;:\; |M_\nu f(x)| > \lambda\right\}\right|_\nu \leq c_2 \,\frac{||f||_{L_{1,\nu}}}{\lambda}, \qquad (\forall\lambda > 0)$$

ve $1 < p < \infty$ için

$$||M_\nu f||_{L_{p,\nu}} \leq c_1 \;||f||_{L_{p,\nu}}$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu teorem de gösterir ki $M_\nu f$ maksimal operatörü de tıpkı Hardy-Littlewood maksimal operatöründe olduğu gibi, $1 < p < \infty$ için $(p,p)-$ tipli ve $p = 1$ için zayıf $(1,1)-$ tiplidir.

6. KAYNAKLAR

Aliev, I.A. and Gadjiev, A.D.1994. *Weighted estimates of multidimensional singular integrals generated by the generalized shift operator, Russian Acad .Sci .Sb. Math.*, 77(1): 37-55.

Aliev, I.A. and Bayrakci, S.1998. *On inversion of B-elliptic potential sassociated with the Laplace-Bessel differential operator, Fract. Calc. Appl. Anal.,* (4): 365-384.

Aliev, I.A. and Bayrakci, S.2002. *On inversion of Bessel potentials associated with the Laplace-Bessel differential operator, Acta Math.Hungar,* 95(1-2): 125-145.

Folland, G.B. 1984. *Real Analysis Modern Tecniquies and Their Applications. John Wiley and Sons, New York,* pp.350.

Guliev, V.S. 1998. *Sobolev theorems for B-Riesz potentials. Dokl. RAN,* 358 (4), 45-451.

Guliev, V.S. 2003. *On Maximal function and fractional Integral, associated with the Bessel differential operator, Mathematical Inequalities and Applications,* 6, 2, 317-330.

Guliev, E.V.2006. *Weighted inequality for fractional maximal functions and franctional integrals, associated with the Laplace-Bessel differential operator, Trans. of NAS of Azerbaijan,* 26(1): 71-80.

Grafakos, L.2008. *Classical Fourier Analysis, Second Edition, Springer, New York,* pp.491.

Grafakos, L.2009. *Modern Fourier Analysis, Second Edition, Springer , New York,* pp.507.

Klyuchantsev, M.I. 1970. *On singular integrals generated by the generalized shift operator, Sibirsk.Mat.Zh.*, (11): 810-821.

Kufner, A., John, O. and Fucik, S. 1977. *Function spaces, Noordhoff International Publishing , Leyden,The Netherlands,* pp.454.

Kipriyanov, I.A. 1997. *Singular elliptc boundary value problems,(In Russian), Nauka, Moscow*.

Levitan, B.M. 1951. *Bessel function expansions in series and Fourier integrals, Uspekhi Mat.Nauk.*, (6): 102-143.

Lofstrom, J. and Peetre, J. 1969. *Approximation Theorems connected with generalized translation , Math.Ann.,*(181): 255-268.

Lyakhov, L.N. 1983. *On classes of spherical functions and singular psedo differential operators, Dokl.Akad.Nauk,*(272): 781-784.

Stein, E.M. and Weiss, G. 1971. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton University Press, Princeton, New Jersey,* pp.297.

Stein, E.M. 1993. *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals, Princeton University Press, Princeton, New Jersey,* pp.695.

Stein, E.M.2005. *Real Analysis: Measure Theory, Integration, Hilbert spaces, Princeton Lectures in Analysis III ,Princeton University Press, Princeton, New Jersey,* pp.402.

Stein, E.M. and Shakarchi, R. 2002. *Fourier Analysis, Princeton Lectures in Analysis, Princeton University Press, Princeton, New Jersey,* pp.311

Stempak, K.1985. *The Littlewood-Paley theory for the Fourier- Bessel transform, Mathematical Institute University of Wroclaw (Poland), Preprint* No.45.

Trimeche, K.1997. *Inversion of the Lions transmutation operators using generalized wavelets, Appl.Comput.Harmon.Anal.*,(4): 97-112.

ÖZGEÇMİŞ

RUMEYSA ARGIN

rumeysa.rman@gmail.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2019-2021	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ABD, Antalya
Lisans 2012-2014	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

2020-Devam Ediyor	Matematik Öğretmeni Uğur Okulları Anadolu Lisesi, Antalya
2019-2020	Matematik Öğretmeni Kemer Koleji Lisesi, Antalya
2017-2019	Matematik Öğretmeni İlk Hedef Başarı Temel Lisesi, Adana