

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



**BAZI ÇEKİM TEORİLERİNDE ALAN DENKLEMLERİNİN SİMETRİLİ
ÇÖZÜMLERİ**

**Işıl BAŞARAN ÖZ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI
DOKTORA TEZİ**

**HAZİRAN 2018
ANTALYA**

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



BAZI ÇEKİM TEORİLERİNDE ALAN DENKLEMLERİNİN SİMETRİLİ
ÇÖZÜMLERİ

Işıl BAŞARAN ÖZ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI
DOKTORA TEZİ

HAZİRAN 2018
ANTALYA

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI ÇEKİM TEORİLERİNDE ALAN DENKLEMLERİNİN SİMETRİLİ
ÇÖZÜMLERİ**

Işıl BAŞARAN ÖZ

FİZİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

**Bu tez T.C. Akdeniz Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP) Koordinasyon
Birimi tarafından FDK-2018-2987 nolu proje ile desteklenmiştir.**

HAZİRAN 2018

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÇEKİM TEORİLERİNDE ALAN DENKLEMLERİNİN SİMETRİLİ
ÇÖZÜMLERİ

Işıl BAŞARAN ÖZ
FİZİK ANABİLİM DALI
DOKTORA TEZİ

Bu tez 29/06/2018 tarihinde jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

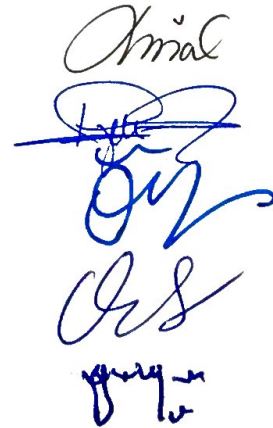
Prof.Dr. Nuri ÜNAL (Danışman)

Prof.Dr. Rıza ERDEM

Prof.Dr. Özlem YEŞİLTAŞ

Doç.Dr. Özcan SERT

Dr.Öğr.Üyesi Yusuf KÜÇÜKAKÇA



ÖZET

BAZI ÇEKİM TEORİLERİNDE ALAN DENKLEMLERİNİN SİMETRİLİ ÇÖZÜMLERİ

Işıl BAŞARAN ÖZ

Doktora Tezi, Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Nuri ÜNAL

Haziran 2018, 62 sayfa

Einstein genel çekim teorisi, evrenin yapısını ve gelişimini açıklayan en iyi çekim teorisi olmakla birlikte bazı yeni gözlemleri açıklamakta yetersiz kalmaktadır. Bu yüzden limit durumunda Einstein çekim teorisini veren ve fakat yeni gözlemleri de açıklayabilen bazı yeni çekim teorileri ortaya çıkmıştır. Bu tez çalışmasında, öncelikle $f(R)$ çekim teorisi çerçevesinde, küresel simetrik, silindirik simetrik ve düzlem simetrik uzay-zamanlar ele alınacaktır. Daha sonra skaler alanlı çekim teorisi çerçevesinde LRS Bianchi tip I uzay-zaman ele alınacaktır. Her bir durumda oluşturulan evren modelleri için kesin çözüm bulma çalışmaları yapılacak ve bu amaçla Noether simetrisi yaklaşımı kullanılacaktır.

ANAHTAR KELİMELELER: Noether simetrisi, $f(R)$ kütle çekim teorisi, Skaler tensör kütle çekim teorisi, Küresel simetrik uzay-zaman, Silindirik simetrik uzay-zaman, Düzlem simetrik uzay-zaman, LRS Bianchi tip I uzay-zaman.

JÜRİ: Prof.Dr. Nuri ÜNAL (Danışman)

Prof.Dr. Rıza ERDEM

Prof.Dr. Özlem YEŞİLTAŞ

Doç.Dr. Özcan SERT

Dr.Öğr.Üyesi Yusuf KÜÇÜKAKÇA

ABSTRACT

SOLUTIONS OF THE FIELD EQUATIONS FOR THE SOME EXTENDED THEORIES OF GRAVITY BY THE SYMMETRY APPROACH

Işıl BAŞARAN ÖZ

PhD Thesis in PHYSICS

Supervisor: Prof. Dr. Nuri ÜNAL

June 2018, 62 pages

Einstein's general theory of gravitation is the best theory of describing the development and evolution of the present universe. Nevertheless, it is insufficient to explain some of the new observations. Thus, some new theories of gravity have emerged, that gives the theory of Einstein's GRT in the case of limit, to explain new observations. In this thesis, firstly the $f(R)$ theory of gravity will be studied in the framework some sort of space-times such as spherical symmetric, cylindrically symmetric, and plane symmetric space-time. Then, the minimally coupled scalar tensor theory of gravity will be considered in the framework LRS Bianchi type I space-time. In each case, universe models will be constructed and Noether symmetry approach will be used to find exact solutions.

KEYWORDS: Noether symmetry, $f(R)$ theory of gravity, Scalar tensor theory of gravity, Spherically symmetric space-time, Cylindrically symmetric space-time, Plane symmetric space-time.

COMMITTEE: Prof.Dr. Nuri ÜNAL (Supervisor)

Prof.Dr. Rıza ERDEM

Prof.Dr. Özlem YEŞİLTAŞ

Assoc.Prof.Dr. Özcan SERT

Dr. Yusuf KÜÇÜKAKÇA

ÖNSÖZ

Öncelikle, doktora tez çalışmamı tamamlayabilmem için yardım ve desteklerini benden esirgemeyen değerli danışman hocam Prof. Dr. Nuri ÜNAL'a teşekkür ederim. Lisansüstü öğrenimimde bilgi ve birikimlerini paylaşan ve emek veren tüm hocalarıma, ayrıca doktora tez sürecinde birlikte çalışma fırsatı bulduğum Dr. Öğr. Üyesi Yusuf KÜÇÜKAKÇA'ya teşekkürlerimi borç bilirim. Manevi desteklerinden dolayı sevgili arkadaşlarıma ayrı ayrı teşekkür ederim.

Tüm hayatım boyunca beni maddi ve manevi olarak destekleyen sevgili anne ve baba, Asiye BAŞARAN ve Yılmaz BAŞARAN'a teşekkürlerimi bir borç bilirim. Ayrıca manevi desteğini hep hissettiğim sevgili kardeşim Ilgın TEKGÜL'e teşekkür ederim. Bu süreçte, anlayış gösterip doktora çalışmamı bitirmeme destek olan sevgili eşim Kurtuluş Evren ÖZ ve dolayısıyla ikinci ailem Necla ÖZ ve Ahmet ÖZ'e teşekkür ederim.

Bu süreçte hayatıma girip bana en büyük mutluluğu yaşatan, sevgili oğlum Ahmet Alaz ÖZ'e çok teşekkür ediyor ve doktora tez çalışmamı O'na adıyorum.

AKADEMİK BEYAN

Doktora Tezi olarak sunduğum “BAZI ÇEKİM TEORİLERİNDE ALAN DENK-
LEMLERİNİN SİMETRİLİ ÇÖZÜMLERİ ” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve
etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan
tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

29/06/2018

Işıl BAŞARAN ÖZ



İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
İÇİNDEKİLER	iv
AKADEMİK BEYAN	v
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL BİLGİLER	5
2.1. Genel Görelilik Teorisi	5
2.2. Standart Kozmolojik Model	7
2.3. $f(R)$ Çekim Teorisi	10
2.4. Skaler Tensör Çekim Teorisi	11
3. MATERYAL VE METOT	13
3.1. Simetri	13
3.2. Noether Simetrisi	13
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	16
4.1. $f(R)$ Çekim Teorisinde Statik Küresel Simetrik Uzay-zaman	16
4.2. $f(R)$ Çekim Teorisinde Statik Silindirik Simetrik Uzay-zaman	23
4.3. $f(R)$ Çekim Teorisinde Düzlem Simetrik Uzay-zaman	30
4.4. Scalar Tensor Çekim Teorisinde LRS Bianchi Type I Uzay-zaman	35
4.4.1. Standart Durum:	37
4.4.2. Fantom Durumu:	45
5. SONUÇLAR	50
6. KAYNAKLAR	56
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$(\dot{})$: t değişkenine göre türev
$(\dot{})$: r değişkenine göre türev
$(,)$: Kısmi türev
$(;)$: Kovaryant türev
$\square = \nabla_\mu \nabla^\mu$: Box operatörü
δ	: Varyasyon
\mathcal{L}_X	: X vektör alanı yönündeki Lie türev operatörü
f_R	: $f(R)$ 'ın R 'ye göre türevi
H	: Hubble parametresi
q	: Yavaşlama parametresi
w	: Durum denklemleri (EoS) parametresi

Kısaltmalar:

ADD	: A di D iferansiyel D enklem
CMB	: C osmic (kozmetik) M icrowave (mikrodalga) B ackground (ardalan)
BI	: B ianchi Tip I
GRT	: G enel R ölativite T eorisi
EAD	: E instein A lan D enklemeleri
EoS	: E quation of S tate (Durum denklemleri)
FLRW	: F riedmann- L ameitre- R obertson-Walker
LRS	: L okal R otasyonel S imetrik
KV	: K illing V ektör

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1. Standart durum için, Hubble parametresi H 'nin zamana göre de- ğişim grafiği	40
Şekil 4.2. Standart durum için, ortalama ölçek çarpanı a 'nın zamana göre de- ğişim grafiği	40
Şekil 4.3. Standart durum için, yavaşlama parametresi q 'nin zamana göre de- ğişim grafiği	40
Şekil 4.4. Standart durum için, EoS parametresi w 'nin zamana göre de- ğişim grafiği	41
Şekil 4.5. Fantom durum için, Hubble parametresi H 'nin zamana göre de- ğişim grafiği	47
Şekil 4.6. Fantom durum için, ölçek çarpanı a 'nin zamana göre de- ğişim grafiği	48
Şekil 4.7. Fantom durum için, yavaşlama parametresi q 'nin zamana göre de- ğişim grafiği	48
Şekil 4.8. Fantom durum için, durum denklemleri parametresi w 'nin zamana göre de-ğişim grafiği	48

1. GİRİŞ

Einstein tarafından 1915’de ortaya atılan Genel Görelilik (Relativite) Teorisi (GRT), evrenin büyük ölçekteki yapısını inceler ve bu teori uzay-zamanın geometrisi ile madde dağılımı arasındaki ilişkiyi verir (Einstein 1915a). GRT, Newton mekaniğinde açıklanamayan, Merkür’ün enberi noktrasındaki kaymasını açıklayabilmiş ve kütle çekim nedeniyle ışığın yörüngesinde sapma olacağını söylemiştir (Einstein 1915b). O dönemdeki yaygın inanişaya göre evren durağan olmalıdır. GRT’ye göre, evren, madde veya ışınım ile dolu ise, durağan olamaz ve bu yüzden Einstein denklemlerine kozmolojik sabiti eklemiştir (Einstein 1917).

1920’lerde Edwin Hubble, galaksilerin uzaklıklarını belirlemiş ve cisimlerin uzaklıkları ile kırmızıya kaymaları arasındaki ilişkiyi ifade eden *Hubble Kanunu*’nu ortaya koymuştur. Bu kanun, galaksilerin uzaklıklarının radyal uzaklaşma hızları ile orantılı olduğunu ifade eder (Hubble 1929). Böylece evrenin genişlediği anlaşılmıştır. Bunun üzerine Einstein, denklemlerine kozmolojik sabit eklemekle hata yaptığını düşünür. Daha sonra kozmologlar, evrenin madde içeriğinden dolayı genişlemenin yavaşlayacağını düşünüp, yavaşlama miktarını ölçmek için *yavaşlama parametresi* adını verdikleri bir niceliği belirlemeye çalışmışlardır (Frieman vd 2008; Sandage 1962).

Yirminci yüzyılın sonlarından bu yana yapılan, tip Ia süpernova ve kozmik mikrodalga ardalan ışınımı (CMB) gibi kozmolojik gözlemler, evrenin genişleme hızının arttığı sonucunu ortaya koymuştur (Efstathiou vd 2002; Perlmutter vd 1999; Riess vd 1998; Spergel vd 2003; Spergel vd 2007; Tegmark vd 2004). Standart GRT günümüz evreninin bu ivmelenecek genişlemesini açıklamakta yetersiz kalmıştır (Weinberg 1972). Evrenin ivmelenecek genişlemesini açıklayabilmek için iki olasılıktan bahsedilir; Birincisi, Evrenin enerji yoğunluğunun yaklaşık olarak %75’inin, karanlık enerji denilen negatif basınçlı yeni bir formda olmasıdır. Bu negatif basınç, çekim kuvvetine karşı koyarak evrenin ivmelenecek genişlemesinden sorumludur. Karanlık enerjiyi açıklamak için kullanılan en önemli aday modellerden birisi olarak, vakum enerjisi diye bilinen Λ kozmolojik sabit düşünülmektedir. Einstein’in hata olarak gördüğü kozmolojik sabit, böylelikle yeniden gündeme gelir. Bu durumda, basınç ile yoğunluk arasındaki ilişkiyi ifade eden durum denklemi (EoS) parametresi $w = -1$ olur ve kozmolojik model Λ CDM adını alır. Fakat bu model de ras-

lantısallık (coincidence), ince ayar (fine tuning), düzlük ve ufuk problemlerinden dolayı çok fazla kabul görmemiştir (Copeland vd 2006; Durrer ve Maartens 2008). Dolayısıyla kozmolojik gözlemler ile tutarlı, evrenin ivmelenerek genişlemesini açıklayabilecek yeni çekim teorileri ortaya atılmıştır. Bu teoriler, GRT'nin geometri ve madde kısımlarının modifiye edilmesiyle oluşturulmuştur. Geometri kısmının en basit modifikasyonlarından birisi, Einstein-Hilbert eylem integralinde R Ricci skaleri yerine $f(R)$ fonksiyonunun alındığı $f(R)$ çekim teorisidir (Copeland vd 2006; Nojiri ve Odintsov 2006). Diğer taraftan, en çok çalışılan genişletilmiş çekim teorilerinden birisi ise, Einstein-Hilbert eylem integraline, ϕ skaler alanın bir fonksiyonu yerleştirerek oluşturulan skaler tensör teorisidir (Amendola ve Tsujikawa 2010; Caldwell ve Kamionkowski 2009; Faraoni ve Capozziello 2011; Sawicki ve Hu 2007). Burada ele alınan skaler alanlar, quintessence (öz), fantom (hayalet) alanı, Takyon alanı ve fermiyonik alan gibi skaler alanlar olabilir (Bamba vd 2012; Copeland vd 2006; Armendariz-Picon ve Greene 2003).

Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) uzay-zamanı, evrenin büyük ölçekteki yapısını anlamak için düşünülen en uygun uzay-zamandır. Ayrıca, kozmolojik prensibe uygun olup, uzaysal olarak homojen ve izotropik bir doğaya sahiptir. Diğer taraftan, büyük patlamanın kanıtı ve kalıntısı olan CMB ışınımının sıcaklığı son derece eşit olmasına rağmen küçük sıcaklık dalgalanmalarına sahiptir (Hinshaw vd 2013). Bianchi tipi uzay-zamanlar ise farklı yönlerde farklı değişimlere izin veren homojen fakat anizotropik uzay-zamanlardır (Barrow ve Maartens 1998; Ellis 2006). Evrenin başlangıcını incelemek üzere oluşturulacak kozmolojik modeller için anizotropik uzay-zamanları uygun görülmüştür (Zel'Dovich ve Starobinskiĭ 1972). Bu nedenle, literatürde, Bianchi tipi uzay zamanları ele alan pek çok kozmolojik çalışma bulunmaktadır (Camci vd 2016; Camci ve Kucukakca 2007; Kucukakca ve Camci 2012; Kumar ve Singh 2007; Pradhan ve Kumar 2001; Shamir ve Kanwal 2017; Singh ve Srivastava 2017).

Tıpkı GRT'de olduğu gibi, genişletilmiş çekim teorilerine ait diferansiyel denklemler de lineer olmayan diferansiyel denklemlerdir ve dolayısıyla çözümleri çok kolay olmamaktadır. Oluşturulan modeller için kesin çözüm bulmak adına kullanılan yöntemler içerisinde en önemlilerinden biri simetri yöntemidir. Alan denklemlerinin geometri kısmında ortaya çıkan g_{ab} metrik tensörün invaryant kaldığı simetri, Killing vektörleriyle (KV) verilmekte ve her bağımsız KV korunum yasasına yol açmaktadır. Alan denklemler-

lerine çözüm bulmak için kullanılan bir başka simetri kabulü ise Lagrangianın invaryant olma koşuludur. Bu koşul Noether simetrisi olarak bilinir ve bize Lagrangianın herhangi bir vektör alanı boyunca Lie türevinin sıfırlandığını söyler.

Noether simetrisi yaklaşımının kozmolojideki uygulamaları ile ilgili ilk çalışmalar, kullanılan çekim teorisinin alan denklemlerine çözümler bulmak ve korunumlu nicelikleri elde etmek amacıyla kullanılmışlardır (Capozziello ve de Ritis 1993; Capozziello ve Lambiase 2000; Demianski vd 1992; de Ritis vd 1990). Noether simetri yaklaşımı kullanılarak, ele alınan teorinin skaler alanın çiftlenim fonksiyonu, potansiyeli ve $f(R)$ gibi bilinmeyen fonksiyonların şekilleri de açık olarak elde edilebilmektedir. de Ritis vd (1990), skaler alanlı kütle çekim teorisinde FRLW uzay-zamanı için Noether simetrisi yaklaşımı ile potansiyelin biçimin üstel olarak belirlemiş ve diğer biçimleri için de çözümleri irdeleyip literatürdeki diğer örneklerle karşılaştırmıştır. Demianski vd (1992) ise skaler alanla minimal çiftlenimli çekim teorisinde, homojen ve anizotropik uzay-zaman için Noether simetrisi yöntemi ile çözüm araştırmıştır. Bu sonuçlara göre anizotropi büyük ise erken dönem enflasyon, anizotropi azaldıkça daha geç dönem enflasyon ortaya çıktığını göstermişlerdir. Daha sonra literatürde, değişik çekim teorileri kapsamında ve farklı uzay-zaman kabulleri altında, Noether simetrisi yaklaşımı ile yapılan birçok çalışma ortaya çıkmıştır (Camci ve Kucukakca 2007; Camci vd 2016; Capozziello vd 2007; Capozziello ve DeFelice 2008; Capozziello ve Lambiase 2000; de Souza ve Kremer 2008; Hussain vd 2012; Jamil vd 2011; Kucukakca 2013, 2014; Kamilya ve Modak 2004; Kamilya vd 2004; Kucukakca ve Camci 2012; Sanyal ve Modak 2001; Basilakos vd 2011; Shamir ve Kanwal 2017; Vakili 2008).

Bu tez çalışması içerik olarak şu şekilde tasarlanmıştır. İkinci bölümde öncelikli olarak GRT özetlenerek, standart kozmolojik model kısaca açıklanacaktır. Daha sonra genişletilmiş çekim teorileri kapsamında, öncelikli olarak $f(R)$ çekim teorisi, sonrasında ise skaler tensör çekim teorisinin kuramsal bilgileri verilecektir. Üçüncü bölümde öncelikle simetri kavramı açıklanacak ve daha sonra bu tez çalışmasında kullanılacak yöntem olan Noether simetrisi yaklaşımı hakkında teorik bilgi verilecektir. Dördüncü bölümde ise, sırasıyla küresel simetrik, silindirik simetrik ve düzlem simetrik uzay-zamanlar ele alınarak $f(R)$ çekim teorisi kapsamında kozmolojik modeller oluşturulup, Noether simetrisi araştırılacak ve metrik potansiyelleri için çözümler incelenecektir. Daha sonra skaler

alanlı çekim teorisi kapsamında, LRS Bianchi I tip uzay-zaman ele alınarak kozmolojik model oluşturulacak ve Noether simetrileri araştırılacaktır. Bu durum için quintessence ve fantom durumları incelenerek kozmolojik parametreler elde edilecektir. Beşinci bölümde ise elde edilen sonuçlar özetlenip yorumlanacaktır.

2. KURAMSAL BİLGİLER

İyi bir çekim teorisi ilk olarak gözlemler neticesinde belirlenen gezegenlerin yörünge hareketlerini ile galaksi ve galaksi kümelerinin kendi içindeki çekimsel hareketleri iyi bir şekilde açıklayabilmelidir. Böylece teori düşük hızlar ve zayıf gravitasyonel alanlar için Newton teorisine indirgenir. Ayrıca günümüzde hassas bir şekilde ölçümleri yapılabilen Güneş sistemi içindeki yörünge hareketlerini de tam olarak açıklayabilmelidir (Will 1993). Dahası, teori, yıldızlar, gezegenler, toz ve gaz bileşenleri ve radyasyon dahil olmak üzere bilinen madde bileşenleri için, gözlenen galaktik dinamikleri doğru bir şekilde yeniden üretmelidir. Ek olarak, teori, büyük ölçekli yapıların (galaksi kümeleri, üstkümeler, boşluklar ve filamentler) üretim problemini ele almalıdır. Son olarak kozmolojik dinamiklerin yeniden türetilmesi gerekir. Buna göre, H Hubble parametresi, q yavaşlama parametresi gibi kozmolojik parametrelerin elde edilmesi ve bunların günümüzdeki değerlerinin son kozmolojik gözlemler ile uyumlu olması beklenir (Faraoni ve Capozziello 2011).

2.1. Genel Görelilik Teorisi

Yukarıda belirtilen gerekliliklerin bir çoğunu taşıyan en temel teori GRT'dir (Einstein 1916). GRT'ye göre çekimin olmadığı durumda uzay-zaman düz Minkowski uzay-zamanına indirgenir. Einstein, GRT için Riemann'ın fikirlerinden yararlanmıştır. Riemann'a göre, evren eğri bir manifold olup bu eğrilik astronomik gözlemlerle ölçülebilir. Uzay-zamandaki madde dağılımı ise bu manifoldun eğriliğini belirler (Eisenhart 1997). Einstein tarafından 1915'te formüle edilen GRT, yer çekimi üzerine üç temel varsayıma dayanır.

- *Görelilik Prensibi*: Bu prensip gereğince, fiziksel bir sistemi açıklamak için tüm gözlemciler eşit öneme sahiptir. Özellikle eylemsiz bir referans sistemi tercihi yapılmaz. Fizik yasaları sabit bir gözlemci veya hareketli bir gözlemci için aynı olmalıdır.
- *Eşdeğerlik Prensibi*: Bu prensibe göre, çekimsel bir kuvvet etkisi altında hareket ile ivmeli bir hareket fiziksel olarak birbirleri ile aynıdır. Yani bir cismin çekimsel kütlesi ile eylemsizlik kütlesi birbirine eşittir.

- *Genel Kovaryans Prensipleri*: Bu prensip, alan denklemlerinin tüm koordinat sistemlerinde aynı olan kovaryant tensör denklemleri olmasını gerektirir. Fizik yasaları tüm koordinat sistemlerinde tüm gözlemciler için eşdeğer olmalıdır. Bu yüzden GRT denklemleri tensörel formda ifade edilmiştir.

Einstein'in kabul ettiği prensipler doğrultusunda çekim, uzay-zamanın eğriliği ile ifade edilir. Eğriliği ifade etmek için *metrik* kavramı kullanılır. Metrik, uzay-zamanda herhangi iki nokta arasındaki mesafenin hesaplanması ile ilgili olup yay uzunluğunun karesi,

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b,$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada g_{ab} metrik tensördür. Bir uzay-zaman aralığı, dört boyutlu diferansiyellenebilen bir M manifold ile temsil edilir ve metrik tensör, M manifoldu üzerinde kovaryant, ikinci mertebeden, simetrik tensör olarak verilir. Bu tez çalışmasında, dejener olmayan bir metrik için işaret $(+, -, -, -)$ olarak alınmıştır. Böyle bir metrik Lorenz Manifoldu üzerinde tanımlıdır denir (Faraoni ve Capozziello 2011).

GRT'de kullanılan diğer bir geometrik nicelik de kovaryant türev ile ilişkili bağlantıyı veren Christoffel sembolleridir. Kovaryant türev, vektörel hesaplamalarda yönlü türevlerin bir genelleştirmesidir ve manifold üzerinde bir vektörün bir noktadan diğerine paralel taşınmasını sağlar. Paralel taşımayı sağlayan bu nicelikler, g_{ab} metrik tensör ile hesaplanan Christoffel sembolleri olup,

$$\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2}g^{cd}(g_{da,b} + g_{db,a} - g_{ab,d}),$$

şeklinde ifade edilirler. Buradan yola çıkarak Riemann eğrilik tensörü,

$$R^a{}_{bcd} = \Gamma_{bd,c}^a - \Gamma_{bd,c}^a + \Gamma_{ce}^a \Gamma_{bd}^e - \Gamma_{de}^a \Gamma_{bc}^e,$$

olarak hesaplanır. Dördüncü ranktan Riemann eğrilik tensörünün kontraksiyonu yolu ile ikinci ranktan Ricci tensörü,

$$R_{ab} = R^c{}_{acb},$$

olarak elde edilir. Tensörel bir niceliğin mertebesi indis sayısı ile belirlenip rank olarak adlandırılır. Kontraksiyon işlemi ise üst ve alt indisleri birine eşitleyip tensörel niceliğin mertebesini azaltma işlemidir. Benzer şekilde Ricci tensörünün kontraksiyonu yolu ile de Ricci skaleri,

$$R = g^{ab}R_{ab} = R^a{}_a,$$

elde edilir. Ricci skaleri, Einstein-Hilbert eyleminin önemli bir parçasıdır.

GRT'nin alan denklemleri en küçük eylem ilkesi $\delta\mathcal{A} = 0$ ile türetilir. Burada \mathcal{A} eylemi,

$$\mathcal{A} = \int d^4x \mathcal{L},$$

olarak dört boyutlu uzay-zaman üzerinden \mathcal{L} Lagrange yoğunluğunun integrali ile ifade edilir.

Einstein GRT teorisini veren eylem integrali,

$$\mathcal{A} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2\kappa} + \mathcal{L}_m \right), \quad (2.1)$$

Einstein-Hilbert eylem integralidir. Burada \mathcal{L}_m , madde için Lagrange fonksiyonu, g ise g_{ab} metrik tensörünün determinanı ve $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ dir. Ayrıca burada G , kütle çekim sabiti ve c , ışık hızıdır. (2.1) ile verilen eylem integralinin g_{ab} metrik tensörüne göre varyasyonu alınarak, Einstein alan denklemleri (EAD),

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = \kappa T_{ab}, \quad (2.2)$$

elde edilir. Burada T_{ab} enerji momentum tensörü olup,

$$T_{ab} = - \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{ab}},$$

şeklinde tanımlıdır. Enerji-momentumun korunumu yasası gereğince

$$T^{ab}{}_{;b} = 0, \quad (2.3)$$

dır (Carroll 2004; Øyvind Grøn 2007).

2.2. Standart Kozmolojik Model

Kozmoloji, evrenin büyük ölçekteki yapısı ve evrimini inceler. Büyük ölçekler söz konusu olduğu zaman evreni homojen ve izotrop olarak düşünebiliriz. Standart kozmolojik model, bu kozmolojik prensibe dayanarak oluşturulur. Gözlemcinin baktığı her noktada evrenin aynı olması, evrenin homojenliğini, gözlemcinin baktığı her doğrultuda evrenin aynı olması, evrenin izotropluğunu ifade eder. Bu ilkeye göre evrende özel bir konuma sahip herhangi bir yer yoktur. Böyle bir evren için uzay-zaman, $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$, ($\mu = 0, 1, 2, 3$), küresel koordinatlarda FLRW metriği,

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (2.4)$$

ile ifade edilir (Weinberg 1972). Burada $a(t)$ ölçek çarpanıdır. Ayrıca k eğrilik parametresi olup, $k = 0$ için düz evren, $k = +1$ için pozitif eğrilikli kapalı evren, $k = -1$ için negatif eğrilikli açık evren geometrilerini ifade eder. (2.4) FLRW uzay-zaman metriği için Ricci eğrilik skaleri,

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right),$$

olarak hesaplanır.

Standart kozmolojik model için, GRT’de EAD’ların sol tarafında geometri için FLRW uzay-zamanı, sağ tarafında madde için de enerji momentum tensörü olarak ideal akışkan kullanılır. İdeal akışkan enerji momentum tensörü,

$$T_{ab} = (\rho + p)u_a u_b - p g_{ab},$$

şeklinde ifade edilir. Böyle bir enerji momentum tensörü kozmolojik prensibe uyar. Burada, u dört-hız, ρ enerji yoğunluğu, p izotropik basınçtır. Ayrıca dört-hız için $u^a u_a = +1$ koşulu sağlanmalıdır.

(2.2) ifadesinden EAD’lar hesaplanacak olursa; Friedmann ve ivmelenme denklemleri,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 &= \frac{1}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{1}{6}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}, \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (2.3) ifadesinden de korunum denklemi,

$$\dot{\rho} = 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p), \quad (2.5)$$

olarak bulunur (d’Inverno 1992). Buradan çözüm yapabilmek için basınç ve yoğunluk arasındaki ilişkiyi veren bir ifadeye ihtiyaç duyulur.

Durum denklemi, basınç, hacim, sıcaklık veya iç enerji gibi belirli fiziksel koşullar altında maddenin durumunu tanımlayan durum değişkenleri ile ilgili bir termodinamik denklemdir (Perrot 1998). İdeal bir gaz için, basınç ile enerji yoğunluğu arasındaki ilişkiyi veren durum denklemi,

$$p = w\rho, \quad (2.6)$$

olarak ifade edilir. Buradan durum denklemi parametresi (EoS) $w = p/\rho$ olarak da ele alınabilir. EoS parametresi, $w = 0$ iken relativistik olmayan toz benzeri ideal akışkan,

$w = 1/3$ iken relativistik ışınım benzeri akışkanı ifade eder. Evren, karanlık enerji baskın durumda ise, EoS parametresi $w = -1$ iken Λ CDM kozmolojik modelini, $-1 < w < -1/3$ iken quintessence ve $w < -1$ iken fantom karanlık enerji durumlarını ifade eder.

(2.6) ifadesi, (2.5) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1-w)},$$

yoğunluk ifadesi elde edilir. Burada ρ_0 , $t = 0$ anındaki enerji yoğunluğudur. Madde baskın evren ($w = 0$) için $\rho = \rho_0 a^{-3}$, ışınım baskın evren ($w = 1/3$) için $\rho = \rho_0 a^{-4}$ ve karanlık enerji baskın evren ($w = -1$) için $\rho = \rho_0$ olur.

Kozmolojik parametreleri irdelemek üzere $a(t)$ ölçek çarpanının Taylor serisi açılımı ilk üç terimini alırsak,

$$a(t) \approx a(t_0) + \left. \frac{da}{dt} \right|_{t=t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2a}{dt^2} \right|_{t=t_0} (t - t_0)^2, \quad (2.7)$$

elde ederiz. (2.7) ifadesini $a(t_0)$ günümüz ölçek çarpanına bölersek,

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} \approx 1 + \left. \frac{\dot{a}}{a} \right|_{t=t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\ddot{a}}{a} \right|_{t=t_0} (t - t_0)^2,$$

elde edilir. Burada da $a(t_0) = 1$ olarak alıp,

$$a(t) \approx 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2,$$

biçiminde yazabiliriz. Buna göre Hubble parametresinin,

$$H_0 = \left. \frac{\dot{a}}{a} \right|_{t=t_0},$$

ve yavaşlama parametresinin,

$$q_0 = - \left. \left(\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \right) \right|_{t=t_0}, \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlı olduğunu görülür. (2.8) ile ifade edilen yavaşlama parametresi tanımdan, q_0 'nın pozitif değerleri için \ddot{a} negatif olup evrenin genişlemesinin yavaşladığı, q_0 'nın negatif değerleri için \ddot{a} pozitif olup evrenin genişlemesinin hızlandığı görülmektedir (Ryden 2003).

2.3. $f(R)$ Çekim Teorisi

GRT'nin, yeni gözlemleri de kapsayacak şekilde genişletme çalışmaları uzun bir geçmişe sahiptir. Bunlar içerisinde en çok dikkate alınanlardan birisi, Einstein-Hilbert eylem integralindeki R Ricci eğrilik skaleri yerine onun bir fonksiyonu olarak $f(R)$ içeren bir teori inşa etmektir. $f(R)$ çekim teorisi için eylem integrali,

$$\mathcal{A} = \int d^4x \sqrt{-g} [f(R) + \kappa \mathcal{L}_m], \quad (2.9)$$

ile ifade edilir. Bu teoriye ait (2.9) eylem integralinin g_{ab} metrik tensöre göre varyasyonundan $f(R)$ çekim teorisine ait alan denklemleri,

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = \kappa T_{ab}^m + T_{ab}^{curv}, \quad (2.10)$$

olarak elde edilir. Burada

$$T_{ab}^{curv} = \frac{1}{f_R} \left[\frac{g_{ab}}{2} (f - R f_R) + f_{R;ab} - g_{ab} \square f_R \right]$$

dır. Ayrıca $f_R \neq 0$, $f_R = \frac{df(R)}{dR}$, $\square = g^{cd} \nabla_c \nabla_d$ ve ∇_c , kovaryant türev operatörüdür. $f(R) = R$ iken $f(R)$ çekim teorisi standart Einstein çekim teorisine indirgenir (Sotiriou ve Faraoni 2010).

$f(R)$ çekim teorisinin alan denklemleri dördüncü mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklem sistemi olup çözüm bulmak oldukça zordur. Alan denklemlerine çözüm bulabilmek için kullanılan yöntemlerden biri Noether simetrisi yaklaşımıdır. Bu yaklaşım ile $f(R)$ 'ın formu belirlenebileceği gibi, $f(R)$ için uygun bir seçim yaparak da Noether integralleri (korunumlu nicelikler) elde edip çözümleri irdelemek mümkündür. Statik küresel simetrik uzay-zaman ele alınarak yapılan bazı çalışmalar Noether simetrisi yaklaşımı kullanılarak çekim teorileri için çözüm bulunabileceğini göstermiştir (Capozziello vd 2007). Capozziello ve DeFelice (2008) $f(R)$ çekim teorisinde FRLW uzay-zamanı ele alarak Noether simetrisi yaklaşımı ile kozmolojik çözümler elde etmiştir.

2.4. Skaler Tensör Çekim Teorisi

Başka bir alternatif çekim teorisi ise metrik tensör yanında bağımsız olarak skaler alanı da içeren skaler tensör teorisidir. Skaler tensör teorisini ilk olarak (Jordan, 1955) ortaya atmıştır. Burada, dört boyutlu eğri bir manifold içerisine beş boyutlu düz bir uzay-zaman yerleştirmeye çalışmış ve böyle bir projektif geometriyi formüle etmek için kullanılacak kısıtlamanın dört boyutlu bir skaler alan olabileceğini göstermiştir. Skaler alan evrendeki maddeye katkıda bulunmaktadır (Weinberg 1972).

Skaler tensör teorisi için eylem integrali,

$$\mathcal{A} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(F(\phi)R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} \partial_a \phi \partial^a \phi - V(\phi) \right) + \mathcal{A}_m, \quad (2.11)$$

şeklinde ifade edilir (Nordtvedt 1970). Burada $F(\phi)$ skaler alan ile eğrilik arasındaki çiftlenim fonksiyonudur ve ω ve V potansiyel skaler alana bağlı fonksiyonlardır. (2.11) eylem integralinde, $F(\phi) = \phi$ ve $\omega(\phi) = \omega = \text{sabit}$ durumları için skaler tensör teorisi, Brans-Dicke çekim teorisi olarak adlandırılır (Brans ve Dicke 1961).

(2.11) eylem integralinde, 16π faktörünün tüm terimlerle çarpım durumunda olduğu göz önünde bulundurulmalıdır. Buna göre $F(\phi) = 16\pi\phi$ biçiminde yazılabilir. (2.1) ve (2.11) eylem integrallerini karşılaştırıldığında, bu teoride kütle çekim sabiti yerine efektif kütle çekim sabiti ile ters orantılı olan,

$$F(\phi) = \frac{1}{16\pi G_{eff}}$$

ifadesinin olduğu görülür. Buna göre $F(\phi)$ fonksiyonu çok yavaş değişim göstermelidir. Bu durum, Dirac (1938) tarafından savunulan, kütle çekim sabitinin zamana bağımlı olması gerektiği fikrine uyum sağlamaktadır (Yasunori Fujii 2007).

Bu teoride, eylem integralinin g_{ab} metrik tensörüne göre varyasyonu alınarak alan denklemleri,

$$F(\phi) \left[R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \right] = 8\pi T_{ab}^m - T_{ab}^\phi + F(\phi)_{;ab} - g_{ab} \square F(\phi),$$

olarak bulunur. Burada, $\square F(\phi) = g^{ab} F_{;ab}$ ve

$$T_{ab}^\phi = \frac{\omega(\phi)}{2} g_{ab} g^{cd} \phi_{;c} \phi_{;d} + \frac{g_{ab}}{2} V(\phi)$$

dir. Eylem integralinin ϕ skaler alanına göre varyasyonundan,

$$\square \phi + \omega V(\phi)_{,\phi} = \omega F(\phi)_{,\phi} R,$$

elde edilir.

Basilakos vd (2011), skaler alanlı kütle çekim teorisinde, FLRW uzay-zamanı için Noether simetrisi yaklaşımı ile çözümler elde etmiş, quintessence ve fantom karanlık enerji modellerini irdelenmişlerdir. Skaler alan ile minimal olmayan eşlenimli çekim teorisinde, Bianchi I-III-KS uzay-zamanları için Noether simetrisi yaklaşımı simetrilerinin sınıflaması yapılmış ve çözüm elde edilmiştir (Camci ve Kucukakca 2007; Camci vd 2016).

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Simetri

Simetri, bir matematiksel nesnenin içsel bir özelliğidir ve belirli dönüşüm sınıfları altında (öteleme, dönme, yansıtma, tersine çevirme veya daha soyut işlemler gibi) değişmez kalmasına neden olur. En basit anlamda bir simetri, fiziksel bir sistemi değişmez bırakan bir dönüşümdür. Matematikçiler, simetriler ile ilgili olarak çalışmak için, *Grup teorisi* başlığı altında sistematik bir yol geliştirmişlerdir. Grup teorisi, simetrinin matematiksel dilidir ve doğanın yapısının ifade edilmesinde önemli bir rol oynar (Leon M. Lederman 2004).

Sophus Lie, adi diferansiyel denklemleri (ADD) çözmek için yöntem geliştirmek üzere Lie grupları adını verdiği sürekli grupları geliştirmiştir. Buna göre Lie, bir ADD'in, nokta dönüşümlerinin bir tek parametrelili Lie grubu altında değişmez kalması durumunda, serbestlik derecesinin bir kademe inebileceğini göstermiştir (George W. Bluman 2002).

Temel özellik olarak bir ADD'in Lie nokta simetrisi, her bir çözümü, çözüm kümesi içerisindeki başka bir çözüme dönüştüren yerel grup dönüşümleridir (George W. Bluman 1989; Olver 1986). $H(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ ifadesi, n . mertebeden bir ADD olmak üzere Lie simetri koşulu, $X^{(n)}H = 0$ olup, n . mertebeden genişletilmiş vektör alanı,

$$X^{(n)} = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + \eta'(x, y, y') \frac{\partial}{\partial y'} + \dots + \eta^{(n)}(x, y, y', \dots, y^n) \frac{\partial}{\partial y^n}$$

dır (Hans Stephani 1989).

Noether simetrileri ise Lagrangian'dan elde edilen simetrileridir. Lagrangian'dan elde edilen her bir varyasyonel simetri aynı zamanda bir Lie simetrisi olduğu için, Noether simetrileri, Lie simetri cebirinin kapalı bir alt cebiridir (Basilakos vd 2011). Bu tez çalışmasında, Lagrangian simetrileri araştırılacağı için Noether simetrisi çalışılmıştır.

3.2. Noether Simetrisi

Eğer herhangi bir \mathcal{L} Lagrange fonksiyoneli için, bir $G(\tau, q^k)$ fonksiyonu mevcut ve

$$X^{[1]}\mathcal{L} + \mathcal{L}(D_\tau\xi) = D_\tau G, \quad (3.12)$$

Noether simetrisi koşulu sağlanıyorsa, verilen diferansiyel denklem sistemi için

Noether simetrisi doğurucusu,

$$X = \xi(\tau, q^k) \frac{\partial}{\partial \tau} + \eta^i(\tau, q^k) \frac{\partial}{\partial q^i},$$

ile verilir. Burada, $D_\tau = \partial/\partial\tau + \dot{q}^k \partial/\partial q^k$ tam türev operatörü olup $X^{[1]}$, X ile verilen Noether simetrisi doğurucusunun ilk genişletmesi (extension veya prolongation) adını alır ve

$$X^{[1]} = X + \dot{\eta}^k(\tau, q^l, \dot{q}^l) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k},$$

şeklinde ifade edilir. Burada, $\dot{\eta}^k(\tau, q^l, \dot{q}^l) = D_\tau \eta^k - \dot{q}^k D_\tau \xi$ olarak tanımlıdır. Her Noether simetrisi için,

$$I = -\xi E_L + \eta^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - G, \quad (3.13)$$

bağıntısı ile ifade edilen ve denklem sistemine ait bir korunumlu nicelik vardır. Bu bağıntı, çözümü aranan diferansiyel denklem sistemine çözüm bulunmasında önemlidir. Burada,

$$E_L = \dot{q}^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} - \mathcal{L}, \quad (3.14)$$

enerji fonksiyonudur.

Göz önüne alınan genişletilmiş çekim teorisinin dinamik değişkenleri olarak q^i genelleştirilmiş koordinatları alındığında, yukarıda anlatılan Noether simetrisi yaklaşımı kullanılarak çekim teorisi ile ilişkili korunumlu nicelikler bulunabilmektedir. Böylece, karşılık gelen çekim teorisi modeli için yeni bir kesin çözüm elde edilmesi mümkün olabilir.

Noether teoremine göre, Noether simetrisinin varlığı dinamiksel sistemde bir döngüsel değişken (cyclic variable) elde etme olanağı sağlar (Capozziello ve DeFelice 2008).

Herhangi bir \mathcal{L} Lagrangianı için Euler-Lagrange denklemleri,

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = 0, \quad (3.15)$$

şeklinde ifade edilir. Burada nokta, τ değişkenine göre türevi göstermektedir. Genişletilmiş vektör alanı,

$$\mathbf{X}^c = \mathbf{X} + \dot{\alpha}^i(q^k) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i},$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathbf{X} = \alpha^i(q) \frac{\partial}{\partial q^i}$, sonsuz küçük nokta dönüşümünü gösteren vektör alanıdır.

\mathcal{L} nin \mathbf{X}^c yönündeki Lie türevi,

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}^c}\mathcal{L} \equiv \mathbf{X}^c\mathcal{L} = \mathbf{X}\mathcal{L} + \dot{\alpha}^i(q^k)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^i}, \quad (3.16)$$

olur. Burada (3.15) α^i ile çarpılıp (3.16) ifadesi ile karşılaştırıldığında,

$$\frac{d}{d\tau}\left(\alpha^i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^i}\right) = \mathcal{L}_{\mathbf{X}^c}\mathcal{L},$$

olduğu görülür. Eğer,

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}^c}\mathcal{L} = \alpha^i(q)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^i} + \dot{\alpha}^i(q^k)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^i} = 0, \quad (3.17)$$

ise, \mathbf{X}^c genişletilmiş vektör alanı, \mathcal{L} 'nin temsil ettiği dinamik yapıya ait *simetriyi* gösterir.

Bu durumda hareket sabiti,

$$\alpha^i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^i} \equiv sbt, \quad (3.18)$$

olmaktadır. (3.13) denkleminde, $G = 0$ ve $E_L = 0$ alındığında (3.18) ile verilen hareket sabiti elde edilmektedir. Bu durum, (3.13) ile ifade edilen korunumlu niceliğin daha genel bir bağıntı olduğunu gösterir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. $f(R)$ Çekim Teorisinde Statik Küresel Simetrik Uzay-zaman

Statik küresel simetrik uzay-zaman metriği,

$$ds^2 = A^2 dt^2 - B^2 dr^2 - Y^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (4.19)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada A , B ve Y metrik katsayıları olup r ye bağlıdır. (4.19) metriğine ait Ricci skaleri,

$$\bar{R} = \frac{2}{B^2} \left[\frac{A''}{A} + 2 \frac{Y''}{Y} + 2 \frac{A'Y'}{AY} - 2 \frac{B'Y'}{BY} - \frac{A'B'}{AB} + \frac{Y'^2}{Y^2} - \frac{B^2}{Y^2} \right], \quad (4.20)$$

olarak hesaplanır. (4.19) statik küresel simetrik uzay-zaman metriği için $f(R)$ çekim teorisinin (2.9) ifadesi ile verilen eylem integrali,

$$A_1 = \int \mathcal{L}_1 dr = \int dr \sqrt{-g} [f(R) - \lambda(R - \bar{R})], \quad (4.21)$$

halini alır. Burada, λ Lagrange çarpanıdır ve bu çarpan (4.21) eylem integralinin R 'ye göre varyasyonu alındığında $\lambda = f_R$ şeklinde bulunmaktadır. (4.21) eylem integralinde (4.20) Ricci skaleri yerine konulup, kısmi integrasyon yöntemi uygulanarak, $f(R)$ çekim teorisi için Lagrange yoğunluğu,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 = & -\frac{2}{B} [f_R (AY'^2 + 2YA'Y') + f_{RR}R' (Y^2A' + 2AYY')] \\ & + AB [fY^2 - f_R(2 + Y^2R)], \end{aligned} \quad (4.22)$$

elde edilir. (4.22) Lagrangianında B' genelleştirilmiş hıza bağlılık yoktur. Bu yüzden B metrik katsayısının sistemin dinamik yapısına doğrudan bir katkısı olmamasına rağmen alan denklemlerinin varyasyonu sırasında dikkate alınmalıdır. (4.22) Lagrangian fonksiyonunun konfigürasyon uzayı $Q = \{A, B, Y, R\}$ şeklindedir. Bu değişkenlere göre varyasyon alındığında alan denklemleri,

$$\begin{aligned} f_R \left(\frac{2Y''}{Y} + \frac{Y'^2}{Y^2} - \frac{2Y'B'}{YB} \right) + f_{RR}R' \left(\frac{2Y'}{Y} - \frac{B'}{B} \right) + f_{RRR}R'' + f_{RR}R'^2 + \\ + \frac{B^2}{2Y^2} [fY^2 - f_R(2 + RY^2)] = 0, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$f_R \left(\frac{Y'^2}{Y^2} + 2 \frac{A'Y'}{AY} \right) + f_{RR}R' \left(2 \frac{Y'}{Y} + \frac{A'}{A} \right) + \frac{B^2}{2Y^2} [fY^2 - f_R(2 + RY^2)] = 0, \quad (4.24)$$

$$f_R \left(\frac{A''}{A} + \frac{Y''}{Y} + \frac{A'Y'}{AY} - \frac{A'B'}{AB} - \frac{B'Y'}{BY} \right) + f_{RR}R' \left(\frac{A'}{A} + \frac{Y'}{Y} - \frac{B'}{B} \right) + f_{RRR}R'' + f_{RR}R'^2 + \frac{1}{2}B^2(f - Rf_R) = 0, \quad (4.25)$$

$$f_{RR} \left[\frac{A''}{A} + \frac{2Y''}{Y} + \frac{Y'^2}{Y^2} - \frac{A'B'}{AB} + \frac{2A'Y'}{AY} - \frac{2B'Y'}{BY} - \frac{B^2}{2Y^2}(2 + RY^2) \right] = 0, \quad (4.26)$$

olarak elde edilir. (4.26) denkleminde $f_{RR} \neq 0$ iken Ricci skalerinin elde edileceği kolayca görülür.

(4.22) Lagrangian için, (3.14) ifadesi ile verilen enerji fonksiyonu,

$$E_{\mathcal{L}_1} = -\frac{2}{B} [f_R (AY'^2 + 2YA'Y') + f_{RR}R' (Y^2A' + 2AYY')] - AB [fY^2 - f_R(2 + Y^2R)], \quad (4.27)$$

olarak hesaplanır. (4.22) Lagrangianının B değişkenine göre varyasyonundan hesaplanan (4.24) alan denkleminde eşit olduğu açıkça görüleceği üzere $E_{\mathcal{L}_1}$ enerji fonksiyonu sıfırdır. Böylece, B ifadesi için,

$$B^2 = \frac{2}{A[f_R(2 + Y^2R) - fY^2]} [f_R (AY'^2 + 2YA'Y') + f_{RR}R' (Y^2A' + 2AYY')], \quad (4.28)$$

bulunur. Buradan, B ifadesi (4.22) Lagrangianında yerine yazılarak B 'den bağımsız $\mathcal{L}_2 \propto \mathcal{L}_1^2$ şeklinde orantılı yeni bir \mathcal{L}_2 Lagrangian tanımlanabilir. Bu yeni Lagrangian,

$$\mathcal{L}_2 = [f_R(2 + Y^2R) - fY^2] [f_R(A^2Y'^2 + 2AY A'Y') + f_{RR}R'(AY^2A' + 2A^2YY')], \quad (4.29)$$

biçiminde olup kanonik ve B değişkeninden bağımsızdır. Böylece (4.22) Lagrangianın serbestlik derecesi indirgenir ve serbestlik derecesi üç olan yeni (4.29) Lagrangian elde edilir (Capozziello vd 2007). Bu yeni Lagrangian \mathcal{L}_2 için $E_{\mathcal{L}_2}$ enerji fonksiyonu,

$$E_{\mathcal{L}_2} = [f_R(2 + Y^2R) - fY^2] [f_R(A^2Y'^2 + 2AY A'Y') + f_{RR}R'(AY^2A' + 2A^2YY')], \quad (4.30)$$

olur. \mathcal{L}_2 Lagrangian fonksiyonunun konfigürasyon uzayı $Q = \{A, Y, R\}$ şeklindedir. Bu

değişkenlere göre varyasyon alındığında alan denklemleri,

$$\begin{aligned}
& -AY f_R f_{RR} [(RY^2 + 2)(YR' + 2Y'R') - 2RY'] - 2AY f_R^2 [(RY^2 + 2)Y'' + 2RY Y'^2] \\
& + f f_{RRR} ARY^4 R' + AY^3 f f_{RR} (2Y'R' + YR') + 2AY^2 f f_R (2Y'^2 + YY'') \\
& - ARY^2 (RY^2 + 2)(f_R f_{RRR} + f_{RR}^2) R' = 0,
\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}
& -2A f_R f_{RR} [(RY^2 + 2)(2AY'R' + 2YA'R' + AYR') + 2YRA'] \\
& + 2AY^2 f f_{RR} (AYR' + YA'R' + AY'R') - 2f_R^2 [(RY^2 + 2)(YA'^2 + A^2Y'' \\
& + AY A'' + 2AA'Y') + A^2 RYY'^2] - 2A^2 RY f_R f_{RRR} (RY^2 + 2)R' \\
& + 2Y f f_R (Y^2 A'^2 + 2AYY'A' + A^2 Y'^2 + A^2 YY'' + AY^2 A'') \\
& + 2A^2 RY^3 f f_{RRR} R' = 0,
\end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}
& f_R f_{RR} [(RY^2 + 2)(2A^2 YY' + 4AY A'Y' + 2A^2 Y'^2 + AY^2 A')] \\
& + ARY (YA' + 2AY') [(RY^2 + 2)(f_R f_{RRR} + f_{RR}^2) - Y^2 f f_{RRR}] \\
& - AY^2 f f_{RR} (2AYY' + 2YA'Y' + AY'^2 + Y^2 A') = 0,
\end{aligned} \tag{4.33}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi (4.22) ile verilen \mathcal{L}_1 Lagrangianı için, (3.12) Noether simetrisi koşulu,

$$\begin{aligned}
& \xi \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial r} + \eta^1 \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial A} + \eta^2 \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial B} + \eta^3 \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial Y} + \eta^4 \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial R} + \eta_r^1 \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial A'} + \eta_r^2 \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial B'} + \eta_r^3 \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial Y'} + \eta_r^4 \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial R'} \\
& + \mathcal{L}_1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + A' \frac{\partial \xi}{\partial A} + B' \frac{\partial \xi}{\partial B} + Y' \frac{\partial \xi}{\partial Y} + R' \frac{\partial \xi}{\partial R} \right) \\
& = \frac{\partial G}{\partial r} + A' \frac{\partial G}{\partial A} + B' \frac{\partial G}{\partial B} + Y' \frac{\partial G}{\partial Y} + R' \frac{\partial G}{\partial R},
\end{aligned} \tag{4.34}$$

olur. Burada,

$$\begin{aligned}
\eta_r^1 &= \frac{\partial \eta^1}{\partial r} + A' \frac{\partial \eta^1}{\partial A} + B' \frac{\partial \eta^1}{\partial B} + Y' \frac{\partial \eta^1}{\partial Y} + R' \frac{\partial \eta^1}{\partial R} \\
& - A' \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + A' \frac{\partial \xi}{\partial A} + B' \frac{\partial \xi}{\partial B} + Y' \frac{\partial \xi}{\partial Y} + R' \frac{\partial \xi}{\partial R} \right), \\
\eta_r^2 &= \frac{\partial \eta^2}{\partial r} + A' \frac{\partial \eta^2}{\partial A} + B' \frac{\partial \eta^2}{\partial B} + Y' \frac{\partial \eta^2}{\partial Y} + R' \frac{\partial \eta^2}{\partial R} \\
& - B' \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + A' \frac{\partial \xi}{\partial A} + B' \frac{\partial \xi}{\partial B} + Y' \frac{\partial \xi}{\partial Y} + R' \frac{\partial \xi}{\partial R} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_r^3 &= \frac{\partial \eta^3}{\partial r} + A' \frac{\partial \eta^3}{\partial A} + B' \frac{\partial \eta^3}{\partial B} + Y' \frac{\partial \eta^3}{\partial Y} + R' \frac{\partial \eta^3}{\partial R} \\ &\quad - Y' \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + A' \frac{\partial \xi}{\partial A} + B' \frac{\partial \xi}{\partial B} + Y' \frac{\partial \xi}{\partial Y} + R' \frac{\partial \xi}{\partial R} \right), \\ \eta_r^4 &= \frac{\partial \eta^4}{\partial r} + A' \frac{\partial \eta^4}{\partial A} + B' \frac{\partial \eta^4}{\partial B} + Y' \frac{\partial \eta^4}{\partial Y} + R' \frac{\partial \eta^4}{\partial R} \\ &\quad - R' \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + A' \frac{\partial \xi}{\partial A} + B' \frac{\partial \xi}{\partial B} + Y' \frac{\partial \xi}{\partial Y} + R' \frac{\partial \xi}{\partial R} \right),\end{aligned}$$

şeklindedir. (4.34) Noether simetrisi koşulundan elde edilen diferansiyel deklemler sistemi,

$$\begin{aligned}\xi_{,A} &= 0, & \xi_{,B} &= 0, & \xi_{,Y} &= 0, & \xi_{,R} &= 0, \\ 2Y(2f_R \eta_{,r}^3 + Y f_{RR} \eta_{,r}^4) + BG_{,A} &= 0, & G_{,B} &= 0, \\ 4f_R(Y \eta_{,r}^1 + A \eta_{,r}^3) + 4AY f_{RR} \eta_{,r}^4 + BG_{,Y} &= 0, \\ 2Y(Y \eta_{,r}^1 + A \eta_{,r}^3) f_{RR} + BG_{,R} &= 0, \\ 2f_R \eta_{,A}^3 + Y f_{RR} \eta_{,A}^4 &= 0, & 2f_R \eta_{,B}^3 + Y f_{RR} \eta_{,B}^4 &= 0, \\ Y \eta_{,B}^1 + 2A \eta_{,B}^3 &= 0, & Y \eta_{,R}^1 + 2A \eta_{,R}^3 &= 0, \\ f_R(Y \eta_{,B}^1 + A \eta_{,B}^3) + AY f_{RR} \eta_{,B}^4 &= 0, \\ \frac{Y}{B} f_R \eta^2 - f_R \eta^3 - Y f_{RR} \eta^4 - Y f_R(\eta_{,Y}^3 + \eta_{,A}^1 - \xi_{,r}) - \frac{Y^2}{2} \eta_{,Y}^4 \\ - A f_R \eta_{,A}^3 - AY f_{RR} \eta_{,A}^4 &= 0, \\ 2 \frac{Y^2}{B} f_{RR} \eta^2 - 4Y f_{RR} \eta^3 - 2Y^2 f_{RRR} \eta^4 - 4Y f_R \eta_{,R}^3 - 4Y f_{RR} \eta_{,A}^3 \\ - 2Y^2 f_{RR}(\eta_{,R}^4 + \eta_{,A}^1 - \xi_{,r}) &= 0, \\ f_R \eta^1 - \frac{A}{B} f_R \eta^2 + A f_{RR} \eta^4 + 2Y f_R \eta_{,Y}^1 + 2A f_R \eta_{,Y}^3 + 2AY f_{RR} \eta_{,Y}^4 - A f_R \xi_{,r} &= 0, \\ Y f_{RR} \eta^1 - \frac{AY}{B} f_{RR} \eta^2 + A f_{RR} \eta^3 + AY f_{RRR} \eta^4 + Y f_R \eta_{,R}^1 + A f_R \eta_{,R}^3 \\ + \frac{Y^2}{2} \eta_{,Y}^1 + AY f_{RR}(\eta_{,Y}^3 + \eta_{,R}^3 - \xi_{,r}) &= 0, \\ B(Y^2 f - (RY^2 + 2) f_R) \eta^1 + A(Y^2 f - (RY^2 + 2) f_R) \eta^2 \\ + 2ABY(f - R f_R) \eta^3 - AB f_{RR}(RY^2 + 2) \eta^4 \\ + AB(Y^2 f - (RY^2 + 2) f_R) \xi_{,r} - G_{,r} &= 0, \tag{4.35}\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada verilen kısmi diferansiyel denklem sisteminin çözümü için $f(R)$ fonksiyonunun formunu seçmek gerekebilir. Böylelikle Noether sabitleri elde edilip $f(R)$ çekim teorisinde statik küresel simetrik uzay zaman için çözüm elde edilebilir.

(4.35) kısmi diferansiyel denklem sistemi çözümü için $f(R) = f_0 R^n$ seçimi yapılacaktır.

olursa, Noether simetrisi doğurucusunun bileşenleri,

$$\begin{aligned}\xi &= F(r), & \eta^1 &= A(2n-3)c_1, \\ \eta^2 &= B(c_1 - F'(r)), & \eta^3 &= Yc_1, \\ \eta^4 &= -2Rc_1, & G &= c_2,\end{aligned}\quad (4.36)$$

olarak elde edilir. Burada c_1 ve c_2 integral sabitleridir. $F(r)$ ise r ' ye bağlı keyfi bir fonksiyondur. Buradan Noether simetrisi doğurucuları,

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_1 &= (2n-3)\partial_A + B\partial_B + Y\partial_Y - 2R\partial_R, \\ \mathbf{X}_2 &= F(r)\partial_r - F'(r)B\partial_B,\end{aligned}\quad (4.37)$$

olur. (3.13) koşulu kullanılarak (4.37) simetrilerine karşılık gelen Noether integralleri,

$$I_1 = 2nf_0 \frac{AY^2}{B} R^{n-1} \left[2(n-2) \frac{A'}{A} - (n-1)(2n-1) \frac{R'}{R} \right], \quad (4.38)$$

$$I_2 = F(r)E_{\mathcal{L}_1}, \quad (4.39)$$

olarak belirlenir. Buradan (4.38) Noether integrali,

$$A' - \frac{(n-1)(2n-1)R'}{2(n-2)R} A = \frac{I_1 B R^{1-n}}{4n(n-2)f_0 Y^2}, \quad (4.40)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece metrik potansiyel $A(r)$ için,

$$A = R^{\frac{(n-1)(2n-1)}{2(n-2)}} \left[A_0 + \frac{I_1}{4n(n-2)f_0^2} \int \frac{BR^{\frac{(1-n)(4n-5)}{2(n-2)}}}{Y^2} dr \right], \quad (4.41)$$

ifadesi elde edilir. Burada A_0 integral sabiti ve $n \neq 0, 2$ dir.

Buraya kadar, (4.22) ile verilen indirgenmemiş \mathcal{L}_1 Lagrangianı için çözümler irdelenmiştir. Bundan sonraki kısımda ise (4.29) ile verilen indirgenmiş \mathcal{L}_2 Lagrangianı için çözümler araştırılacaktır.

(4.29) ile verilen \mathcal{L}_2 Lagrangianı için, (3.12) Noether simetrisi koşulu,

$$\begin{aligned}& \xi \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial r} + \eta^1 \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial A} + \eta^2 \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial Y} + \eta^3 \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial R} + \eta_r^1 \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial A'} + \eta_r^2 \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial Y'} + \eta_r^3 \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial R'} \\ & + \mathcal{L}_1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + A' \frac{\partial \xi}{\partial A} + Y' \frac{\partial \xi}{\partial Y} + R' \frac{\partial \xi}{\partial R} \right) = \frac{\partial G}{\partial r} + A' \frac{\partial G}{\partial A} + Y' \frac{\partial G}{\partial Y} + R' \frac{\partial G}{\partial R},\end{aligned}\quad (4.42)$$

olur. Burada,

$$\begin{aligned}\eta_r^1 &= \frac{\partial \eta^1}{\partial r} + A' \frac{\partial \eta^1}{\partial A} + Y' \frac{\partial \eta^1}{\partial Y} + R' \frac{\partial \eta^1}{\partial R} - A' \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + A' \frac{\partial \xi}{\partial A} + Y' \frac{\partial \xi}{\partial Y} + R' \frac{\partial \xi}{\partial R} \right), \\ \eta_r^2 &= \frac{\partial \eta^2}{\partial r} + A' \frac{\partial \eta^2}{\partial A} + Y' \frac{\partial \eta^2}{\partial Y} + R' \frac{\partial \eta^2}{\partial R} - Y' \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + A' \frac{\partial \xi}{\partial A} + Y' \frac{\partial \xi}{\partial Y} + R' \frac{\partial \xi}{\partial R} \right), \\ \eta_r^3 &= \frac{\partial \eta^3}{\partial r} + A' \frac{\partial \eta^3}{\partial A} + Y' \frac{\partial \eta^3}{\partial Y} + R' \frac{\partial \eta^3}{\partial R} - R' \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + A' \frac{\partial \xi}{\partial A} + Y' \frac{\partial \xi}{\partial Y} + R' \frac{\partial \xi}{\partial R} \right),\end{aligned}$$

şeklindedir. (4.42) Noether simetrisi koşulundan elde edilen diferansiyel deklemler sistemi,

$$\begin{aligned}
&\xi_{,A} = 0, \quad \xi_{,Y} = 0, \quad \xi_{,R} = 0, \\
&AY\Omega(2f_R\eta_{,r}^2 + f_{RR}Y\eta_{,r}^3) - G_{,A} = 0 \\
&A\Omega[f_R(Y\eta_{,r}^1 + A\eta_{,r}^2) + f_{RR}AY\eta_{,r}^3] - G_{,Y} = 0, \\
&AY\Omega f_{RR}(Y\eta_{,r}^1 + 2A\eta_{,r}^2) - G_{,R} = 0, \\
&AY\Omega(2f_R\eta_{,A}^2 + f_{RR}Y\eta_{,A}^3) = 0, \\
&AY\Omega f_{RR}(Y\eta_{,R}^1 + 2A\eta_{,R}^2) = 0, \\
&2\Omega f_R\eta^1 + 2AY\Omega f_R(Rf_R - f)\eta^2 + A\Omega f_{RR}[2f_R(2 + Y^2R) - fY^2]\eta^3 \\
&+ \Omega f_R(2Y\eta_{,Y}^1 + 2A\eta_{,Y}^2 - A\xi_{,r}) + 2\Omega f_{RR}AY\eta_{,Y}^3 = 0, \\
&2\Omega f_RY\eta^1 + 2Af_R[2f_R + 3Y^2(Rf_R - f)]\eta^2 + 2AY f_{RR}[\Omega + f_R(2 + Y^2R)]\eta^3 \\
&+ 2\Omega f_RA[Y(\eta_{,Y}^2 + \eta_{,A}^1 - \xi_{,r}) + A\eta_{,A}^2] + \Omega f_{RR}AY(Y\eta_{,Y}^3 + 2A\eta_{,A}^3) = 0, \\
&\Omega f_{RR}Y^2\eta^1 + 2AY f_{RR}[\Omega + Y^2(Rf_R - f)]\eta^2 + AY^2[\Omega f_{RRR} + f_{RR}^2(2 + Y^2R)]\eta^3 \\
&+ 2\Omega f_RAY\eta_{,R}^2 + \Omega f_{RR}AY[Y(\eta_{,R}^3 + \eta_{,A}^1 - \xi_{,r}) + 2A\eta_{,A}^2] = 0, \\
&4\Omega AY f_{RR}\eta^1 + 2A^2 f_{RR}[\Omega + 2Y^2(Rf_R - f)]\eta^2 + 2A^2Y[\Omega f_{RRR} + f_{RR}^2(2 + Y^2R)]\eta^3 \\
&+ 2\Omega f_RA(Y\eta_{,R}^1 + A\eta_{,R}^2) + \Omega f_{RR}AY[2A(\eta_{,R}^3 + \eta_{,Y}^2 - \xi_{,r}) + Y\eta_{,Y}^1] = 0, \\
&G_{,r} = 0,
\end{aligned} \tag{4.43}$$

olarak elde edilir. Burada $\Omega = [f_R(2 + Y^2R) - fY^2]$ dir. $f(R) = f_0R^n$ formunda alıp (4.43) simetri denklemleri çözümü,

$$\begin{aligned}
\eta^1 &= \frac{c_1}{2}A + (2n - 3)c_3A, & \eta^2 &= c_3Y, & \eta^3 &= -2c_3R, \\
\xi &= c_1r + c_2, & G &= c_4,
\end{aligned} \tag{4.44}$$

olur. Burada c_i integral sabitleridir. (4.44) ifadelerinden Noether simetrileri,

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_1 &= \partial_r, & \mathbf{X}_2 &= r\partial_r + \frac{A}{2}\partial_A, \\
\mathbf{X}_3 &= (2n - 3)A\partial_A + Y\partial_Y - 2R\partial_R,
\end{aligned} \tag{4.45}$$

olur. (4.45) Noether simetrilerinden elde edilen Noether integralleri,

$$I_1 = -nAf_0^2R^{2n-3} (2n + (n-1)RY^2) \left[(n-1)Y^2A'R' + 2Y(RA' + (n-1)AR')Y' + ARY'^2 \right], \quad (4.46)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}nAf_0^2R^{2n-3} (2n + (n-1)RY^2) \left[(n-1)Y^2(A - 2rA')R' + 2Y(-2rRA' + A(R - 2(n-1)rR'))Y' - 2rARY'^2 \right], \quad (4.47)$$

$$I_3 = nAf_0^2R^{2n-3}Y^2 (2n + (n-1)RY^2) \left[-2(n-2)RA' + (n-1)(2n-1)AR' \right], \quad (4.48)$$

olarak bulunur. Buradan, (4.48) ile verilen I_3 korunumlu niceliği yardımı ile,

$$A^2 = R^{\frac{(2n-1)(n-1)}{(n-2)}} \left[A_0 - \frac{I_3}{nf_0^2} \int \frac{R^{-\frac{(4n-5)(n-1)}{(n-2)}}}{Y^2(n-2)(2n + RY^2(n-1))} dr \right], \quad (4.49)$$

çözümü elde edilir.

(4.49) ifadesinden, $Y(r) = r$, $B(r) = 1/A(r)$ ve $n = 1$ seçimleri yapılarak,

$$A^2 = A_0 - \frac{I_3}{2f_0^2r}, \quad (4.50)$$

biçiminde *Schwarzschild* çözümü elde edilir. Burada, hareket sabiti, $I_3 = 4GMf_0^2$ olarak ifade edilebilir. Ayrıca, (4.28) denkleminde $B(r)$ ifadesi hesaplanır ise $A_0 = 1$ olması gerektiği görülür. Bu sonuçlara göre, (4.20) ifadesinden Ricci skaleri $R(r) = 0$ olur. Bu durumda, (4.46), (4.47) ve (4.48) Noether integralleri için $I_3 = -I_2$ ve $I_1 = 2f_0^2$ sonuçları ortaya çıkar.

Daha sonra, $Y(r) = r$, $n = 5/4$ ve $R(r) = 5/r^2$ seçimleri yaparak, (4.49) ifadesinden,

$$A^2 = \frac{A_0}{\sqrt{5}}r - \frac{64I_3}{225\sqrt{5}f_0^2}, \quad (4.51)$$

olarak elde edilir. (4.28) bağıntısından ise B^2 ,

$$B^2 = \left(1 - \frac{64I_3}{225\sqrt{5}A_0f_0^2r} \right)^{-1}, \quad (4.52)$$

şeklinde bulunur. Bu sonuçlara göre, (4.46) ve (4.47) Noether integralleri hesaplanır ise $I_1 = -\frac{225A_0f_0^2}{64}$ ve $I_3 = -I_2$ sonuçları elde edilir. Böylece, $A^2 = \frac{A_0}{\sqrt{5}}(r + \frac{I_3}{I_1})$ ve $B^2 = (1 + \frac{I_3}{I_1r})^{-1}$ şeklinde ifade edilebilir. $n = 5/4$ değerinin Güneş sistemi gözlemleri ile uyumlu değer aralığı dışında olduğunu belirtmek gerekir (Clifton ve Barrow 2005).

4.2. $f(R)$ Çekim Teorisinde Statik Silindirik Simetrik Uzay-zaman

Statik silindirik simetrik uzay-zaman metriği (Sharif ve Arif, 2012),

$$ds^2 = A(r)dt^2 - dr^2 - B(r)(d\theta^2 + \alpha^2 dz^2), \quad (4.53)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada A ve B metrik katsayıları olup r ye bağlıdır. Statik silindirik simetrik uzay-zaman metriği için Ricci skaleri,

$$R = \frac{2B''}{B} + \frac{A''}{A} - \frac{B'^2}{2B^2} - \frac{A'^2}{2A^2} + \frac{A'B'}{AB}, \quad (4.54)$$

olarak hesaplanır. Burada $(')$, r ye göre türevi ifade eder.

$f(R)$ çekim teorisinde (2.10) ifadesi ile verilen alan denklemleri'nin sol tarafı geometriyi sağ tarafı ise madde kısmını ifade eder. Geometri kısmı için ele alınan uzay-zaman metriği kullanılır. Korunumu yasasından $T^{ab}{}_{;b} = 0 \Rightarrow \rho = \rho_0 A^{-\frac{(1+w)}{2w}}$ elde edilir. (2.9) eylem integralinde (4.54) Ricci skalerini yerleştirip, lagrange çarpanı metodu ve kısmi integrasyon metodu ile Lagrangian,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{\alpha f_R}{\sqrt{A}} A' B' - \alpha f_{RR} \frac{B}{\sqrt{A}} A' R' - \frac{\alpha f_R}{2B} \sqrt{A} B'^2 - 2\alpha f_{RR} \sqrt{A} B' R' \\ & + \alpha \sqrt{A} B [f - R f_R - \kappa \rho_0 A^{-\frac{1+w}{2w}}], \quad (w \neq 0) \end{aligned} \quad (4.55)$$

olarak elde edilir. (4.55) Lagrangianı konfigürasyon uzayı $Q = \{A, B, R\}$ şeklindedir. (4.55) ile verilen Lagrangianın ifade ettiği çekim teorisi için (2.10) ifadesinden, alan denklemleri,

$$\begin{aligned} \frac{f_R}{4} \left(2 \frac{A''}{A} + 2 \frac{A'B'}{AB} - \frac{A'^2}{A^2} \right) - \frac{f}{2} - \left(f_{RR} R' \frac{B'}{B} + f_{RR} R'' + f_{RRR} R'^2 \right) \\ + \frac{1}{w} \kappa \rho_0 A^{-\frac{1+w}{2w}} = 0, \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} -\frac{f_R}{4} \left(2 \frac{A''}{A} - \frac{A'^2}{A^2} + 4 \frac{B''}{B} - 2 \frac{B'^2}{B^2} \right) + \frac{f}{2} + \frac{f_{RR} R'}{2} \left(\frac{A'}{A} + 2 \frac{B'}{B} \right) \\ - \kappa \rho_0 A^{-\frac{1+w}{2w}} = 0, \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} -\frac{f_R}{4} \left(2 \frac{B''}{B} + \frac{A'B'}{AB} \right) + \frac{f}{2} + \frac{f_{RR} R'}{2} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + f_{RR} R'' + f_{RRR} R'^2 \\ - \kappa \rho_0 A^{-\frac{1+w}{2w}} = 0, \end{aligned} \quad (4.58)$$

olarak elde edilir. Burada, (4.55) Lagrangianının A ve B 'ye göre varyasyonu ile (4.56) ve (4.58) alan denklemleri, R 'ye göre varyasyonu ile de (4.54) Ricci skaleri ifadesi elde edilebilir. Ayrıca, (4.55) Lagrangianı için enerji fonksiyonu,

$$E_{\mathcal{L}} = -\frac{f_R}{4} \left(2\frac{A''}{A} - \frac{A'^2}{A^2} + 4\frac{B''}{B} - 2\frac{B'^2}{B^2} \right) + \frac{f}{2} + \frac{f_{RR}}{2} \left(\frac{A'}{A} + 2\frac{B'}{B} \right) R' + \kappa \frac{\rho_0}{A^{\frac{1+w}{2w}}}$$

dır. Bu ifade (4.57) alan denkleminde karşılık geldiği için $E_{\mathcal{L}} = 0$ olduğu görülür. Bu denklemler dördüncü mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemler olup çözüm bulmak için Noether simetrisi yaklaşımı kullanılacaktır.

(4.55) Lagrangianı için, (3.12) Noether simetrisi koşulu,

$$\begin{aligned} & \xi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} + \eta^1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} + \eta^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B} + \eta^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} + \eta_r^1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A'} + \eta_r^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B'} + \eta_r^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R'} \\ & + \mathcal{L} \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + A' \frac{\partial \xi}{\partial A} + B' \frac{\partial \xi}{\partial B} + R' \frac{\partial \xi}{\partial R} \right) = \frac{\partial G}{\partial r} + A' \frac{\partial G}{\partial A} + B' \frac{\partial G}{\partial B} + R' \frac{\partial G}{\partial R}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

olur. Burada,

$$\begin{aligned} \eta_r^1 &= \frac{\partial \eta^1}{\partial r} + A' \frac{\partial \eta^1}{\partial A} + B' \frac{\partial \eta^1}{\partial B} + R' \frac{\partial \eta^1}{\partial R} - A' \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + A' \frac{\partial \xi}{\partial A} + B' \frac{\partial \xi}{\partial B} + R' \frac{\partial \xi}{\partial R} \right), \\ \eta_r^2 &= \frac{\partial \eta^2}{\partial r} + A' \frac{\partial \eta^2}{\partial A} + B' \frac{\partial \eta^2}{\partial B} + R' \frac{\partial \eta^2}{\partial R} - B' \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + A' \frac{\partial \xi}{\partial A} + B' \frac{\partial \xi}{\partial B} + R' \frac{\partial \xi}{\partial R} \right), \\ \eta_r^3 &= \frac{\partial \eta^3}{\partial r} + A' \frac{\partial \eta^3}{\partial A} + B' \frac{\partial \eta^3}{\partial B} + R' \frac{\partial \eta^3}{\partial R} - R' \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + A' \frac{\partial \xi}{\partial A} + B' \frac{\partial \xi}{\partial B} + R' \frac{\partial \xi}{\partial R} \right), \end{aligned}$$

şeklinindedir. (4.59) Noether simetrisi koşulu aşağıdaki diferansiyel denklem sistemini verir:

$$\begin{aligned} \xi_{,A} &= 0, & \xi_{,B} &= 0, & \xi_{,R} &= 0, \\ \alpha (f_R \eta_{,r}^2 + B f_{RR} \eta_{,r}^3) + \sqrt{A} G_{,A} &= 0, \\ \alpha \left[f_R \left(\eta_{,r}^1 + \frac{A \eta_{,r}^2}{B} \right) + 2 A f_{RR} \eta_{,r}^3 \right] + \sqrt{A} G_{,B} &= 0, \\ \alpha f_{RR} (B \eta_{,r}^1 + 2 A \eta_{,r}^2) + \sqrt{A} G_{,R} &= 0, \\ f_R \eta_{,A}^2 + B f_{RR} \eta_{,A}^3 &= 0, & B \eta_{,R}^1 + 2 A \eta_{,R}^2 &= 0, \\ \frac{f_R \eta^1}{2A} - \frac{f_R \eta^2}{B} + f_{RR} \eta^3 + 2 \frac{B f_R \eta_B^1}{A} + 2 f_R \eta_B^2 + 4 f_{RR} B \eta_B^3 - f_R \xi_{,r} &= 0, \\ -\frac{f_R \eta^1}{2A} + f_{RR} \eta^3 + f_R \eta_{,A}^1 + f_R \frac{A}{B} \eta_{,A}^2 + 2 A f_{RR} \eta_{,A}^3 + f_R \eta_{,B}^2 + f_{RR} B \eta_{,B}^3 - f_R \xi_{,r} &= 0, \\ -\frac{f_{RR} \eta^1}{2A} + \frac{f_{RR} \eta^2}{B} + f_{RRR} \eta^3 + \frac{f_R \eta_{,R}^2}{B} + f_{RR} \eta_{,R}^3 + f_{RR} \eta_{,A}^1 + 2 \frac{A f_{RR} \eta_{,A}^2}{B} - f_{RR} \xi_{,r} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{f_{RR}\eta^1}{A} + 2f_{RRR}\eta^3 + \frac{f_R\eta^1}{A} + \frac{f_R\eta_{,R}^2}{B} + 2f_{RR}\eta_{,R}^3 + \frac{Bf_R\eta_{,B}^1}{A} + 2f_{RR}\eta_{,B}^2 - 2f_{RR}\xi_{,r} = 0, \\
& \left(-f + Rf_R + \kappa\rho_0 A^{-\frac{1+w}{2w}}\right) \left[\frac{\alpha B}{2\sqrt{A}}\eta^1 + \alpha\sqrt{A}\eta^2 + \alpha\sqrt{AB}\xi_{,r}\right] \\
& - \frac{\alpha B\kappa\rho_0(1+w)}{\sqrt{A}w} A^{-\frac{1+w}{2w}}\eta^1 + \alpha\sqrt{AB}Rf_{RR}\eta^3 + G_{,r} = 0.
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Bu denklem sistemi için çeşitli koşullar altında çözümler incelenmiştir. Genelde, GRT Lagrangianı için aşikar olmayan Noether simetrisi mevcut değildir. Aşağıda, (i) durumunda GRT için elde edilen aşikar olmayan Noether simetrisi ve bunları doğuran özel durum denklemi parametreleri çalışılmıştır. (ii) durumunda ise genel $f(R) = f_0 R^n$ iken Noether simetrisi incelenmiştir.

(i-a): $f(R) = f_0 R$, $w = -1$, $f_0, \rho_0 > 0$ koşulları ile $\ell = \sqrt{\frac{6\kappa\rho_0}{f_0}}$ olmak üzere Noether simetri vektörü bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
\xi &= c_1 + c_2 e^{\ell r/2} + c_3 e^{-\ell r/2}, \\
\eta^1 &= \frac{A}{3}\ell(c_2 e^{\ell r/2} - c_3 e^{-\ell r/2}) + \frac{\sqrt{A}}{B^{1/4}}(c_4 e^{\ell r/4} + c_5 e^{-\ell r/4}) \\
&\quad - \frac{A}{2B^{3/4}}(c_6 e^{\ell r/4} + c_7 e^{-\ell r/4}) + 2c_8 A, \\
\eta^2 &= \frac{B}{3}\ell(c_2 e^{\ell r/2} - c_3 e^{-\ell r/2}) + B^{1/4}(c_6 e^{\ell r/4} + c_7 e^{-\ell r/4}) - c_8 B, \\
G &= -\frac{\alpha f_0}{3}\sqrt{AB}\ell^2(c_2 e^{\ell r/2} + c_3 e^{-\ell r/2}) - \frac{\alpha f_0}{3}B^{3/4}\ell(c_4 e^{\ell r/4} - c_5 e^{-\ell r/4}) \\
&\quad - \frac{\alpha f_0}{2}\sqrt{AB}^{1/4}\ell(c_6 e^{\ell r/4} - c_7 e^{-\ell r/4}) + c_9.
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Buradan Noether simetrisi,

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_1 &= \partial_r, \\
\mathbf{X}_2 &= e^{\ell r/2} \left[\partial_r + \frac{\ell}{3} (A\partial_A + B\partial_B) \right] & G &= -\frac{\alpha f_0}{3}\sqrt{AB}\ell^2 e^{\ell r/2}, \\
\mathbf{X}_3 &= e^{-\ell r/2} \left[\partial_r - \frac{\ell}{3} (A\partial_A + B\partial_B) \right] & G &= -\frac{\alpha f_0}{3}\sqrt{AB}\ell^2 e^{-\ell r/2}, \\
\mathbf{X}_4 &= e^{\ell r/4} \frac{\sqrt{A}}{B^{1/4}} \partial_A & G &= -\frac{\alpha f_0}{3}B^{3/4}\ell e^{\ell r/4}, \\
\mathbf{X}_5 &= e^{-\ell r/4} \frac{\sqrt{A}}{B^{1/4}} \partial_A & G &= -\frac{\alpha f_0}{3}B^{3/4}\ell e^{-\ell r/4}, \\
\mathbf{X}_6 &= e^{\ell r/4} \left(-\frac{A}{2B^{3/4}} \partial_A + B^{1/4} \partial_B \right) & G &= -\frac{\alpha f_0}{2}\sqrt{AB}^{1/4}\ell e^{\ell r/4}, \\
\mathbf{X}_7 &= e^{-\ell r/4} \left(-\frac{A}{2B^{3/4}} \partial_A + B^{1/4} \partial_B \right) & G &= -\frac{\alpha f_0}{2}\sqrt{AB}^{1/4}\ell e^{-\ell r/4}, \\
\mathbf{X}_8 &= 2A\partial_A - B\partial_B,
\end{aligned} \tag{4.62}$$

olarak bulunur. Herbir Noether simetrisine karşılık gelen Noether integralleri,

$$\begin{aligned}
I_1 &= -E_{\mathcal{L}} = 0, \\
I_2 &= -e^{\ell r/2} \frac{\ell}{3} \alpha f_0 \sqrt{AB} \left(\frac{A'}{A} + 2 \frac{B'}{B} - \ell \right), \\
I_3 &= e^{-\ell r/2} \frac{\ell}{3} \alpha f_0 \sqrt{AB} \left(\frac{A'}{A} + 2 \frac{B'}{B} + \ell \right), \\
I_4 &= -e^{\ell r/4} \alpha f_0 B^{3/4} \left(\frac{B'}{B} - \frac{\ell}{3} \right), \\
I_5 &= e^{-\ell r/4} \alpha f_0 B^{3/4} \left(\frac{B'}{B} + \frac{\ell}{3} \right), \\
I_6 &= -e^{\ell r/4} \alpha f_0 \sqrt{AB}^{1/4} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{2B} - \frac{\ell}{2} \right), \\
I_7 &= -e^{-\ell r/4} \alpha f_0 \sqrt{AB}^{1/4} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{2B} + \frac{\ell}{2} \right), \\
I_8 &= \alpha f_0 \sqrt{AB} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right), \tag{4.63}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. (4.63) Noether integralleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}
I_2 e^{-\ell r/2} + I_3 e^{\ell r/2} &= \frac{2}{3} \ell^2 \alpha f_0 \sqrt{AB}, \\
I_6 e^{-\ell r/4} - I_7 e^{\ell r/4} &= \ell^2 \alpha f_0 \sqrt{AB}^{1/4}, \\
\frac{I_4 e^{-\ell r/4} - I_5 e^{\ell r/4}}{\ell \alpha f_0} &= \frac{I_2 e^{-\ell r/2} + I_3 e^{\ell r/2}}{I_6 e^{-\ell r/4} - I_7 e^{\ell r/4}}, \tag{4.64}
\end{aligned}$$

ifadeleri bulunur ve buradan da $A(r)$ ve $B(r)$ metrik katsayıları için,

$$\begin{aligned}
A(r) &= A_0 \frac{(I_6 e^{-\ell r/4} - I_7 e^{\ell r/4})^2}{(I_4 e^{-\ell r/4} - I_5 e^{\ell r/4})^{2/3}}, \\
B(r) &= B_0 (I_4 e^{-\ell r/4} - I_5 e^{\ell r/4})^{4/3}, \tag{4.65}
\end{aligned}$$

çözümleri elde edilir. Burada $B_0 = (\frac{3}{2\ell\alpha f_0})^{4/3}$ ve $A_0 = (\frac{2}{3})^{2/3} \frac{1}{\ell^2(\ell\alpha f_0)^{4/3}}$ dır. Ayrıca bu çözümlere göre, $\rho_0 = \frac{\ell^2 f_0}{6\kappa}$ ve $I_4 I_7 + I_5 I_6 = 0$ koşulları ortaya çıkar.

Daha sonra (4.60) denklemini incelenirken, durum denklemini parametresinin $w = -1/4$ ve $w = 1/5$ değerleri için fazla simetrisinin varlığı görülmüştür. Bu durumlar aşağıda ayrı ayrı incelenmektedir.

(i-b): $f(R) = f_0 R$, $w = -1/4$, $f_0, \rho_0 > 0$ koşulları altında Noether simetrisi vektörü bileşenleri,

$$\begin{aligned}
\xi &= c_1 r + c_2, & \eta^1 &= -c_1 \frac{4A}{3} - \frac{A}{2B^{3/4}} (c_3 r + c_4), \\
\eta^2 &= c_1 \frac{5B}{3} + B^{1/4} (c_3 r + c_4), & G &= -c_3 2\alpha f_0 \sqrt{AB}^{1/4} + c_5, \tag{4.66}
\end{aligned}$$

olur. Noether simetrisi,

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_1 &= \partial_r, & \mathbf{X}_2 &= r\partial_r - \frac{4A}{3}\partial_A + \frac{5B}{3}\partial_B, \\ \mathbf{X}_3 &= -\frac{A}{2B^{3/4}}r\partial_A + B^{1/4}r\partial_B & G &= -2\alpha f_0\sqrt{AB}^{1/4}, \\ \mathbf{X}_4 &= -\frac{A}{2B^{3/4}}\partial_A + B^{1/4}\partial_B,\end{aligned}\quad (4.67)$$

şeklinde bulunur. Her bir Noether simetrisi için Noether integralleri,

$$\begin{aligned}I_1 &= -E_{\mathcal{L}} = 0, \\ I_2 &= -\frac{1}{3}\alpha f_0\sqrt{AB}\left(\frac{B'}{B} + 5\frac{A'}{A}\right), \\ I_3 &= -\frac{1}{2}\alpha f_0\sqrt{AB}^{1/4}\left[4 - r\left(\frac{B'}{B} + 2\frac{A'}{A}\right)\right], \\ I_4 &= \frac{1}{2}\alpha f_0\sqrt{AB}^{1/4}\left(\frac{B'}{B} + 2\frac{A'}{A}\right),\end{aligned}\quad (4.68)$$

olarak hesaplanır. Bu durumda (4.68) Noether integralleri arasında,

$$\begin{aligned}I_3 - rI_4 &= 2\alpha f_0\sqrt{AB}^{1/4}, \\ I_4 &= \frac{rI_4 - I_3}{4}\left(\frac{B'}{B} + 2\frac{A'}{A}\right), \\ BA^2 &= k_0(rI_4 - I_3)^4,\end{aligned}\quad (4.69)$$

bağıntıları vardır. Bu bağıntılardan, $A(r)$ ve $B(r)$ metrik katsayıları,

$$\begin{aligned}A(r) &= \left[-\frac{3I_2}{10k_0(rI_4 - I_3)^3\alpha f_0 I_4} + k_1(rI_4 - I_3)^2\right]^{-2/3}, \\ B(r) &= k_0(rI_4 - I_3)^4 \left[-\frac{3I_2}{10k_0(rI_4 - I_3)^3\alpha f_0 I_4} + k_1(rI_4 - I_3)^2\right]^{4/3},\end{aligned}\quad (4.70)$$

şeklinde bulunur. Burada $\rho_0 = \frac{40}{3\kappa}f_0k_1I_4^2$ olduğu görülür.

(i-c): $f(R) = f_0R$, $w = 1/5$, $f_0, \rho_0 > 0$ durumu için Noether simetrisi vektörü bileşenleri,

$$\begin{aligned}\xi &= c_1\frac{r^2}{2} + c_2r + c_3, & \eta^1 &= c_1\frac{2A}{3}r + c_2\frac{2A}{3}, \\ \eta^2 &= c_1\frac{2B}{3}r + c_2\frac{2B}{3}, & G &= -c_1\frac{4}{3}\alpha f_0\sqrt{AB} + c_4,\end{aligned}\quad (4.71)$$

olarak elde edilmiştir. Buradan Noether simetrisi aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_3 &= \partial_r, \\ \mathbf{X}_2 &= \frac{r^2}{2}\partial_r + \frac{2A}{3}r\partial_A + \frac{2B}{3}r\partial_B & G &= -\frac{4}{3}\alpha f_0\sqrt{AB}, \\ \mathbf{X}_3 &= r\partial_r + \frac{2A}{3}\partial_A + \frac{2B}{3}\partial_B.\end{aligned}\quad (4.72)$$

Her bir Noether simetrisine karşılık elde edilen Noether integralleri,

$$\begin{aligned} I_1 &= -E_{\mathcal{L}} = 0, \\ I_2 &= \frac{2}{3}\alpha f_0 \sqrt{AB} \left[2 - r \left(2\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) \right], \\ I_3 &= -\frac{2}{3}\alpha f_0 \sqrt{AB} \left(2\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right), \end{aligned} \quad (4.73)$$

şeklinde hesaplanır. (4.73) Noether integralleri kullanılarak,

$$\sqrt{AB} = \frac{3}{4\alpha f_0} (I_2 - rI_3), \quad (4.74)$$

ifadesi elde edilmiştir.

Buraya kadar, $f(R) = f_0 R$ alınarak, Einstein çekim teorisindeki durum incelenmiştir. Bu durumda, durum denklemleri parametresinin $w = -1/4$ ve $w = 1/5$ değerleri için Noether simetrilerinin fazlalığı dikkat çekicidir ve bu durum yukarıda açıkça ortaya konulmuştur. w durum denklemleri parametresinin bu özel değerleri, bilinen toz ($w = 0$), ışınım ($w = 1/3$) ve kozmolojik sabit ($w = -1$) vb. değerlerinden farklıdır.

Buradan sonra, $f(R)$ çekim teorisi için çözüm bulmak adına $f(R) = f_0 R^n$ durumları incelenmiştir.

(ii-a): $f(R) = f_0 R^n$, $f_0, \rho_0 > 0$ durumu için Noether simetrisi vektörü bileşenleri,

$$\begin{aligned} \xi &= c_1 r + c_2, & \eta^1 &= c_1 \frac{4wn}{1+w} A, & \eta^2 &= c_1 \frac{2n-w-1}{1+w} B \\ \eta^3 &= -c_1 2R, & G &= c_3, & & (w \neq -1) \end{aligned} \quad (4.75)$$

olarak elde edilip Noether simetrisi aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \partial_r, \\ \mathbf{X}_2 &= r\partial_r + \frac{4wn}{1+w} A\partial_A + \frac{2n-w-1}{1+w} B\partial_B - 2R\partial_R. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Bu Noether simetrisine karşılık gelen Noether integralleri,

$$\begin{aligned} I_1 &= -E_{\mathcal{L}} = 0, \\ I_2 &= -\alpha n f_0 \sqrt{AB} R^{n-1} \left[\left(-\frac{2nw-w-1}{1+w} \right) \frac{A'}{A} + \left(\frac{3(w+1)-2n}{1+w} \right) \frac{B'}{B} \right. \\ &\quad \left. + 2(n-1)(2n-1) \frac{R'}{R} \right], \end{aligned} \quad (4.77)$$

şeklinde elde edilir. Burada $w \neq -1$ dir. Buradaki Noether integrallerinden I_2 kullanılarak,

$$A = B^{-\frac{3(w+1)-2n}{(2nw-w-1)}} R^{\frac{(2n-1)(n-1)(w+1)}{2(2nw-w-1)}} \left[A_0 + A_1 \int B^{\frac{2n(2w-1)+w+1}{2(2nw-w-1)}} R^{-2\frac{n(n-3w-2)+w+1}{(2nw-w-1)}} dx \right]^2, \quad (4.78)$$

ifadesi elde edilir. Burada A_0 bu durum için integral sabiti olup $A_1 = \frac{I_2(1+w)}{2n\alpha(2n-w-1)f_0}$ şeklinde tanımlıdır.

(ii-b): $f(R) = f_0 R^n, w = -1, f_0, \rho_0 > 0$ durumu için Noether simetrisi vektörü bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\xi = c_1, \quad \eta^1 = -2c_2 A, \quad \eta^2 = c_2 B, \quad G = c_3. \quad (4.79)$$

Buradan Noether simetrisi,

$$\mathbf{X}_1 = \partial_r, \quad \mathbf{X}_2 = -2A\partial_A + B\partial_B, \quad (4.80)$$

olur. Bu Noether simetrisine karşılık gelen Noether integralleri, $I_1 = -E_{\mathcal{L}} = 0$ ve

$$I_2 = \alpha n f_0 \sqrt{AB} R^{n-1} \left[\frac{B'}{B} - \frac{A'}{A} \right], \quad (4.81)$$

şeklinde hesaplanır. Buradan I_2 hareket sabiti yardımı ile

$$A = B \left(A_0 - \frac{I_2}{2n\alpha f_0} \int \frac{R^{(1-n)}}{B^{3/2}} dr \right)^2, \quad (4.82)$$

elde edilir. Burada A_0 bu durum için integral sabitidir.

(ii-c): $f(R) = f_0 R^n, f_0 > 0, \rho_0 = 0$ Durumu: Bu durumda Noether simetri vektörü bileşenleri,

$$\begin{aligned} \xi &= c_1 r + c_2, & \eta^1 &= 2(2n-1)c_1 A - 2c_3 A, \\ \eta^2 &= c_3 B, & \eta^3 &= -2c_1 R, & G &= c_4, \end{aligned} \quad (4.83)$$

şeklinde elde edilir. Buradan Noether simetrisi,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= r\partial_r + 2(2n-1)A\partial_A - 2R\partial_R, \\ \mathbf{X}_2 &= \partial_r & \mathbf{X}_3 &= -2A\partial_A + B\partial_B, \end{aligned} \quad (4.84)$$

halini alır. Bu simetrisine karşılık gelen Noether integralleri, $I_2 = -E_{\mathcal{L}} = 0$ ve

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\alpha n f_0 \sqrt{AB} R^{n-1} \left[-\frac{B'}{B} + (n-1)\frac{A'}{A} - (2n-1)(n-1)\frac{R'}{R} \right], \\ I_3 &= \alpha n f_0 \sqrt{AB} R^{n-1} \left[\frac{B'}{B} - \frac{A'}{A} \right], \end{aligned} \quad (4.85)$$

olur. Böylece (4.85) hareket sabitleri yardımı ile

$$A = R^{2(n-1)} B^{\frac{3}{2n-1}} \left(A_0 + \frac{I_1 - I_3}{2\alpha f_0 n(2n-1)} \int R^{-2(n-1)} B^{\frac{4n+1}{2n-1}} dr \right)^2, \quad (4.86)$$

elde edilir. Burada A_0 bu durum için integral sabitidir.

4.3. $f(R)$ Çekim Teorisinde Düzlem Simetrik Uzay-zaman

Düzlem simetrik uzay-zaman metriği,

$$ds^2 = A(x)dt^2 - B(x)dx^2 - Y(x)(dy^2 + dz^2), \quad (4.87)$$

şeklinde ifade edilir. Burada A, B ve Y metrik katsayıları x 'e bağlı fonksiyonlardır. Bu uzay-zaman metriği için Ricci skaleri hesaplandığında,

$$R = \frac{1}{2B} \left[2\frac{A''}{A} + 4\frac{Y''}{Y} - \frac{A'^2}{A^2} - \frac{Y'^2}{Y^2} + 2\frac{A'Y'}{AY} - \frac{A'B'}{AB} - 2\frac{Y'B'}{YB} \right], \quad (4.88)$$

bulunur. Burada ($'$), x ' e göre türevi ifade eder. (4.87) ile verilen düzlem simetrik uzay-zaman metriği için $f(R)$ çekim teorisinin (2.9) eylem integralinde, (4.88) Ricci skaleri kullanılıp, lagrange çarpanı metodu ve kısmi integrasyon metodu yardımları ile

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -2f_{RR}\sqrt{\frac{A}{B}}R'Y' - f_{RR}\frac{Y}{\sqrt{AB}}A'R' - f_R\frac{1}{\sqrt{AB}}A'Y' - \frac{f_R}{2}\sqrt{\frac{A}{B}}\frac{Y'^2}{Y} \\ & - \sqrt{AB}Y[Rf_R - f + \kappa\rho_0 A^{-\frac{1+w}{2w}}] \quad (w \neq 0), \end{aligned} \quad (4.89)$$

Lagrangianı elde edilir. $T^{ab}{}_{;b} = 0$ korunum yasası gereği, enerji yoğunluğu ifadesi $\rho = \rho_0 A^{-\frac{(1+w)}{2w}}$ olup, bu ifade yukarıdaki fonksiyonelde kullanılmıştır. (4.89) Lagrangianı için konfigürasyon uzayı $Q = \{A, B, Y, R\}$ şeklindedir. (4.89) Lagrangianı ile ifade edilen çekim teorisi için (2.10) ifadesinden, alan denklemleri,

$$\begin{aligned} \frac{f}{2}B - \frac{f_R}{4} \left(2\frac{A''}{A} - 2\frac{A'Y'}{AY} - \frac{A'^2}{A^2} - \frac{A'B'}{AB} \right) + \frac{f_{RR}R'}{2} \left(2\frac{Y'}{Y} - \frac{B'}{B} \right) + f_{RR}R'' \\ + f_{RRR}R'^2 + \frac{1}{w}\kappa\rho_0 BA^{-\frac{1+w}{2w}} = 0, \end{aligned} \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned} \frac{f}{2}B + \frac{f_R}{4} \left(-2\frac{A''}{A} + \frac{A'^2}{A^2} - 4\frac{Y''}{Y} + \frac{A'B'}{AB} + 2\frac{Y'B'}{YB} \right) + \frac{f_{RR}R'}{2} \left(\frac{A'}{A} + 2\frac{Y'}{Y} \right) \\ + \frac{\kappa}{2}\rho_0 BA^{-\frac{1+w}{2w}} = 0, \end{aligned} \quad (4.91)$$

$$\begin{aligned} \frac{f}{2}B - \frac{f_R}{4} \left(2\frac{Y''}{Y} - \frac{B'Y'}{BY} - \frac{A'Y'}{AY} \right) + \frac{f_{RR}R'}{2} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} + \frac{Y'}{Y} \right) + f_{RR}R'' \\ + f_{RRR}R'^2 + \kappa\rho_0 BA^{-\frac{1+w}{2w}} = 0, \end{aligned} \quad (4.92)$$

şeklinde hesaplanmıştır. Burada; A , B ve Y metrik katsayılarına göre (4.89) Lagrangianının varyasyonu alındığında (4.90), (4.91) ve (4.92) alan denklemleri; R' 'ye göre varyasyon alındığında ise (4.88) Ricci skaleri ifadesi elde edilir. Ayrıca, (4.89) Lagrangianı için enerji fonksiyonu,

$$E_{\mathcal{L}} = \frac{f_B}{2} + \frac{f_R}{4} \left(-\frac{2A''}{A} + \frac{A'^2}{A^2} - \frac{4Y''}{Y} + \frac{A'B'}{AB} + \frac{2Y'B'}{YB} \right) + \frac{f'_R}{2} \left(\frac{A'}{A} + \frac{2Y'}{Y} \right) + \frac{\kappa\rho_0}{2} BA^{-\frac{1+w}{2w}},$$

olur. Burada $f'_R = f_{RR}R'$ olarak tanımlanmıştır. Bu ifade (4.91) alan denkleminde karşılık geldiğinden, $E_{\mathcal{L}} = 0$ olmalıdır. Bu teorinin denklemlerine çözüm bulabilmek için Noether simetri yaklaşımı kullanılacaktır.

(4.89) Lagrangianı için, (3.12) Noether simetrisi koşulu,

$$\begin{aligned} & \xi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \eta^1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} + \eta^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B} + \eta^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y} + \eta^4 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} + \eta_x^1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A'} + \eta_x^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B'} + \eta_x^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y'} + \eta_x^4 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R'} \\ & + \mathcal{L} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + A' \frac{\partial \xi}{\partial A} + B' \frac{\partial \xi}{\partial B} + Y' \frac{\partial \xi}{\partial Y} + R' \frac{\partial \xi}{\partial R} \right) \\ & = \frac{\partial G}{\partial x} + A' \frac{\partial G}{\partial A} + B' \frac{\partial G}{\partial B} + Y' \frac{\partial G}{\partial Y} + R' \frac{\partial G}{\partial R}, \end{aligned} \quad (4.93)$$

olur. Burada,

$$\begin{aligned} \eta_x^1 &= \frac{\partial \eta^1}{\partial x} + A' \frac{\partial \eta^1}{\partial A} + B' \frac{\partial \eta^1}{\partial B} + Y' \frac{\partial \eta^1}{\partial Y} + R' \frac{\partial \eta^1}{\partial R} \\ & \quad - A' \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + A' \frac{\partial \xi}{\partial A} + B' \frac{\partial \xi}{\partial B} + Y' \frac{\partial \xi}{\partial Y} + R' \frac{\partial \xi}{\partial R} \right), \\ \eta_x^2 &= \frac{\partial \eta^2}{\partial x} + A' \frac{\partial \eta^2}{\partial A} + B' \frac{\partial \eta^2}{\partial B} + Y' \frac{\partial \eta^2}{\partial Y} + R' \frac{\partial \eta^2}{\partial R} \\ & \quad - B' \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + A' \frac{\partial \xi}{\partial A} + B' \frac{\partial \xi}{\partial B} + Y' \frac{\partial \xi}{\partial Y} + R' \frac{\partial \xi}{\partial R} \right), \\ \eta_x^3 &= \frac{\partial \eta^3}{\partial x} + A' \frac{\partial \eta^3}{\partial A} + B' \frac{\partial \eta^3}{\partial B} + Y' \frac{\partial \eta^3}{\partial Y} + R' \frac{\partial \eta^3}{\partial R} \\ & \quad - Y' \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + A' \frac{\partial \xi}{\partial A} + B' \frac{\partial \xi}{\partial B} + Y' \frac{\partial \xi}{\partial Y} + R' \frac{\partial \xi}{\partial R} \right), \\ \eta_x^4 &= \frac{\partial \eta^4}{\partial x} + A' \frac{\partial \eta^4}{\partial A} + B' \frac{\partial \eta^4}{\partial B} + Y' \frac{\partial \eta^4}{\partial Y} + R' \frac{\partial \eta^4}{\partial R} \\ & \quad - R' \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + A' \frac{\partial \xi}{\partial A} + B' \frac{\partial \xi}{\partial B} + Y' \frac{\partial \xi}{\partial Y} + R' \frac{\partial \xi}{\partial R} \right), \end{aligned}$$

şeklindedir. (4.93) Noether simetrisi koşulundan elde edilen diferansiyel deklemler sistemi,

$$\begin{aligned}
&\xi_{,A} = 0, \quad \xi_{,B} = 0, \quad \xi_{,Y} = 0, \quad \xi_{,R} = 0, \\
&f_R \eta_{,x}^3 + f_{RR} Y \eta_{,x}^4 + \sqrt{AB} G_{,A} = 0, \quad G_{,B} = 0 \\
&f_R \left(\eta_{,x}^1 + \frac{A}{Y} \eta_{,x}^3 \right) + 2 f_{RR} A \eta_{,x}^4 + \sqrt{AB} G_{,Y} = 0, \\
&f_{RR} (Y \eta_{,x}^1 + 2A \eta_{,x}^3) + \sqrt{AB} G_{,R} = 0, \\
&f_R \eta_{,A}^3 + f_{RR} Y \eta_{,A}^4 = 0, \\
&f_R \left(\frac{\eta^1}{2A} - \frac{\eta^2}{2B} - \frac{\eta^3}{Y} + \frac{2Y \eta_{,Y}^1}{A} + 2\eta_{,Y}^3 - \xi_{,x} \right) + f_{RR} (\eta^4 + 4Y \eta_{,Y}^4) = 0, \\
&f_{RR} (Y \eta_{,R}^1 + 2A \eta_{,R}^3) = 0, \\
&f_R \eta_{,B}^3 + f_{RR} Y \eta_{,B}^4 = 0, \\
&f_R \left(-\frac{\eta^1}{2A} - \frac{\eta^2}{2B} + \frac{A \eta_{,A}^3}{Y} + \eta_{,Y}^3 + \eta_{,A}^1 - \xi_{,x} \right) + f_{RR} (\eta^4 + 4Y \eta_{,Y}^4 + 2A \eta_{,A}^4) = 0, \\
&f_R \frac{\eta_{,R}^3}{Y} + f_{RR} \left(-\frac{\eta^1}{2A} - \frac{\eta^2}{2B} + \frac{\eta^3}{Y} + \frac{2A \eta_{,A}^3}{Y} + \eta_{,R}^4 + \eta_{,A}^1 - \xi_{,x} \right) + f_{RRR} \eta^4 = 0, \\
&f_R \left(\frac{\eta_{,B}^1}{A} + \frac{\eta_{,B}^3}{Y} \right) + 2 f_{RR} \eta_{,B}^4 = 0, \\
&f_{RR} (Y \eta_{,B}^1 + 2A \eta_{,B}^3) = 0, \\
&f_R \left(\frac{\eta_{,R}^1}{A} - \frac{\eta_{,R}^3}{Y} \right) + f_{RR} \left(+\frac{\eta^1}{A} - \frac{\eta^2}{B} + \frac{Y \eta_{,Y}^1}{A} + 2\eta_{,R}^4 + 2\eta_{,Y}^3 - 2\xi_{,x} \right) + 2 f_{RRR} \eta^4 = 0, \\
&\left(-f + R f_R + \kappa \rho_0 A^{-\frac{1+w}{2w}} \right) \left[\frac{Y}{2} \left(\sqrt{\frac{B}{A}} \eta^1 + \sqrt{\frac{A}{B}} \eta^2 \right) + \sqrt{AB} (\eta^3 + Y \xi_{,x}) \right] \\
&+ \sqrt{AB} Y (R f_{RR} \eta^4 - \kappa \rho_0 \frac{1+w}{w} A^{-\frac{1+w}{2w}} \eta^1) + G_{,x} = 0, \tag{4.94}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu diferansiyel denklem sistemine çözüm bulmak için $f(R) = f_0 R^n$ genel kabulü için $\rho_0 > 0$ ve $\rho_0 = 0$ koşulları altında Noether simetrisi incelenecektir.

(i): $f(R) = f_0 R^n$, $f_0, \rho_0 > 0$: Bu koşullar altında, (4.94) diferansiyel denklem sistemi için çözüm aranmış ve Noether simetrisi vektörü bileşenleri,

$$\begin{aligned}
\xi &= F(x), & \eta^1 &= c_2 \frac{4wn}{2n-w-1} A & \eta^2 &= -2F_x + c_2 \frac{2(w+1)}{2n-w-1} B \\
\eta^3 &= c_2 Y & \eta^4 &= -c_2 \frac{2(w+1)}{2n-w-1} R & G &= c_1, \tag{4.95}
\end{aligned}$$

olarak elde edilmiştir. Buradan Noether simetrisi,

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_1 &= F(x) \partial_x - 2F_x \partial_B, \\
\mathbf{X}_2 &= \frac{4wn}{2n-w-1} A \partial_A + \frac{2(w+1)}{2n-w-1} B \partial_B + Y \partial_Y - \frac{2(w+1)}{2n-w-1} R \partial_R, \tag{4.96}
\end{aligned}$$

şeklini alır. Her bir Noether simetrisine karşılık gelen Noether integraller,

$$\begin{aligned}
I_1 &= -F(x)E_{\mathcal{L}} - 2F_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B'} = 0, \\
I_2 &= \frac{f_0 n R^{n-1}}{2n-w-1} \sqrt{\frac{A}{B}} Y \left[(2nw-w-1) \frac{A'}{A} - 2(n-1)(2n-1)(w+1) \frac{R'}{R} \right. \\
&\quad \left. + [2n-3(w+1)] \frac{Y'}{Y} \right], \tag{4.97}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanmıştır. (4.97) ile verilen I_2 Noether integrali kullanılarak,

$$A = \frac{I_2 Y^{\frac{3(w+1)-2n}{2(2nw-w-1)}} R^{\frac{-2(2n-2)(n-1)(w+1)}{(2nw-w-1)}}}{4n^2(2n-w-1)^2 f_0^2} \left[A_0 + \int Y^{\frac{2n(2w-1)+w+1}{2(2n-w-1)}} R^{\frac{2n(n-1)}{(2n-w-1)}} \sqrt{B} dx \right]^2, \tag{4.98}$$

ifadesi elde edilir. Burada A_0 bu durum için integral sabitidir.

(ii): $f(R) = f_0 R^n$, $f_0 > 0$, $\rho_0 = 0$: Bu koşullar kullanılarak, Noether simetrisi vektörü bileşenleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
\xi &= F(x), \\
\eta^1 &= c_3 \left(2(2n-1)A \ln R - \frac{2n-3}{n-1} A \ln Y + \frac{A}{n-1} \ln A \right) + c_4 A \\
\eta^2 &= 2BF_x + c_2 \frac{2B}{2n-1} + c_3 \frac{B}{n-1} \ln \frac{A}{Y} + c_4 \frac{B}{2n-1} \\
\eta^3 &= c_2 Y - c_3 Y \left((2n-1) \ln R - \ln A + \frac{1}{n-1} \ln Y \right) \\
\eta^4 &= c_2 \frac{-2R}{2n-1} - c_3 \frac{R}{n-1} \ln \frac{A}{Y} - c_4 \frac{R}{2n-1} \\
G &= c_1. \tag{4.99}
\end{aligned}$$

Buradan Noether simetrisi,

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_1 &= F(x) \partial_x + 2BF_x \partial_B, \\
\mathbf{X}_2 &= \frac{2B}{2n-1} \partial_B + Y \partial_Y + \frac{-2R}{2n-1} \partial_R \\
\mathbf{X}_3 &= \left(2(2n-1)A \ln R - \frac{2n-3}{n-1} A \ln Y + \frac{A}{n-1} \ln A \right) \partial_A + \frac{B}{n-1} \ln \frac{A}{Y} \partial_B \\
&\quad - Y \left((2n-1) \ln R - \ln A + \frac{1}{n-1} \ln Y \right) \partial_Y - \frac{R}{n-1} \ln \frac{A}{Y} \partial_R \\
\mathbf{X}_4 &= A \partial_A + \frac{B}{2n-1} \partial_B - \frac{R}{2n-1} \partial_R, \tag{4.100}
\end{aligned}$$

olur. Her bir Noether simetrilerine karşılık gelen Noether integralleri,

$$\begin{aligned}
I_1 &= -E_{\mathcal{L}} = 0, \\
I_2 &= -\sqrt{\frac{A}{B}} Y n R^{n-1} \left[\frac{A'}{A} + \frac{Y'}{Y} - \frac{2(n-1)}{2n-1} \left(\frac{A'}{A} + 2\frac{Y'}{Y} \right) + (n-1) \frac{R'}{R} \right], \\
I_3 &= Y \sqrt{\frac{A}{B}} n R^{n-1} \left[\left(\ln \frac{Y^2 A^{\frac{n-1}{n}} Y'}{R^{2n-1}} + \ln \frac{Y^{n-1} R^{2n-1} A'}{A} \right) \right. \\
&\quad \left. + (n-1) \ln \frac{A}{Y} \left(-(2n-1) \frac{R'}{R} + 2\frac{Y'}{Y} + \frac{A'}{A} \right) \right], \\
I_4 &= -\sqrt{\frac{A}{B}} Y n R^{n-1} \left[\frac{Y'}{Y} + (n-1) \frac{R'}{R} - \frac{(n-1)}{2n-1} \left(\frac{A'}{A} + \frac{Y'}{Y} \right) \right], \quad (4.101)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. I_2 ve I_4 korunumlu nicelikleri kullanılarak,

$$A = \frac{(2n-1)^2}{4n^4} Y^{\frac{3}{n(n-1)}} \left(A_0 - (I_2 - I_4) \int R^{-n+1} Y^{-\frac{5n-3}{2n}} \sqrt{B} dx \right)^2, \quad (4.102)$$

çözümü elde edilir. Burada A_0 bu durum için integral sabitidir.

4.4. Scalar Tensor Çekim Teorisinde LRS Bianchi Type I Uzay-zaman

Skaler alan ile gravitasyonun minimal olarak çiftlendiği çekim teorisinin eylem integrali,

$$\mathcal{A} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2\kappa} + \frac{\epsilon}{2} \phi_{;\mu} \phi^{;\mu} - V(\phi) + \mathcal{L}_m \right], \quad (4.103)$$

olarak verilir (Copeland vd 2006). Burada $\kappa = 8\pi G/c^4$, \mathcal{L}_m madde Lagrangianı, $V(\phi)$ skaler alan için potansiyel fonksiyonudur. ϵ bir sabit olmak üzere, $\epsilon = 1$ quintessence ve $\epsilon = -1$ fantom alanlarını ifade eder.

Yapılan gözlemsel çalışmalarda, CMB ışımında anizotropiler olduğu sonucuna ulaşılmıştır (Hinshaw vd 2013). Bianchi Tip uzay-zamanlar homojen fakat anizotrop uzay-zamanlardır (Ellis 2006). Bu bölümde, lokal rotasyonel simetrik (LRS) Bianchi Type I uzay-zamanı ele alınacaktır. LRS Bianchi Type I uzay-zamanı,

$$ds^2 = dt^2 - A(t)^2 dx^2 - B(t)^2 (dy^2 + dz^2), \quad (4.104)$$

metriği ile ifade edilir. Bu uzay-zaman için Ricci skaleri,

$$R = \frac{4\ddot{B}}{B} + \frac{2\ddot{A}}{A} + \frac{2\dot{B}^2}{B^2} + \frac{4\dot{A}\dot{B}}{AB}, \quad (4.105)$$

şeklinde hesaplanır. (4.105) ile verilen Ricci skaleri, (4.103) eylem integralinde yerine konulursa Lagrangian,

$$\mathcal{L} = -2A\dot{B}^2 - 4B\dot{A}\dot{B} + AB^2 \left[\frac{\epsilon}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right] - \rho_{m0}, \quad (4.106)$$

olarak elde edilir.

Evrenin genişleme oranını ifade eden Hubble parametresi,

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (H_i), \quad (4.107)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada a ortalama ölçek çarpımıdır ve H_i ($i = 1, 2, 3$) sırasıyla x, y, z eksenler yönündeki Hubble parametreleridir.

Genişleme skaleri,

$$\theta = u_{;i}^i = 3H, \quad (4.108)$$

olup, evrenin hacimsel genişleme hızını ifade eder.

Shear skaleri evrenin ortalama genişleme hızından sapmasının bir ölçüsü olup,

$$\sigma^2 = \sigma_{ij}\sigma^{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (H_i - H)^2, \quad (4.109)$$

şeklinde tanımlıdır. Shear skaleri eksenler arasındaki genişleme hızları arasındaki farklılığı ortaya koyar. Anizotropik uzay-zamanlar böyle bir duruma olanak tanır.

Evrenin genişlemesindeki anizotropi,

$$\Delta \equiv \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{H_i - H}{H} \right)^2, \quad (4.110)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Buradan $\Delta = 0$ iken izotrop genişleme olduğu görülür.

LRS Bianchi I tipi uzay-zaman için ortalama ölçek çarpanı, $a = (AB^2)^{1/3}$ şeklindedir.

Buradan Hubble parametresi,

$$H = \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{A}}{A} + 2\frac{\dot{B}}{B} \right), \quad (4.111)$$

şeklinde hesaplanır. Genişleme skaleri,

$$\theta = 3 \left(\frac{\dot{A}}{A} + 2\frac{\dot{B}}{B} \right), \quad (4.112)$$

ve shear skaleri,

$$\sigma^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right)^2, \quad (4.113)$$

olarak bulunur.

Shear skaleri ile genişleme skaleri oranının sabit $\sigma/\theta \propto sbt$ olması nedeni ile $A = B^m$ olarak alınabilir (Collins vd 1980). Dolayısıyla m parametresi uzay-zamanın izotropluk-tan ne kadar saptığını ölçer. Böylece bu koşul altında (4.106) Lagrangianı,

$$\mathcal{L} = -(2m + 1)B^m \dot{B}^2 + B^{m+2} \left[\frac{\epsilon}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right] - \rho_{m0}, \quad (4.114)$$

şekline dönüşür. Sırasıyla B ve ϕ ye göre (3.15) Euler-Lagrange denklemleri ve (3.14)

Enerji fonksiyonu elde edilir. Böylece alan denklemleri,

$$(2m + 1) \left(m \frac{\dot{B}^2}{B^2} + 2\frac{\ddot{B}}{B} \right) + (m + 2) \left[\frac{\epsilon}{2} \dot{\phi}^2 - V \right] = 0, \quad (4.115)$$

$$(m + 2) \frac{\dot{B} \dot{\phi}}{B \phi} + \frac{\ddot{\phi}}{\phi} + \frac{V'}{\epsilon \phi} = 0, \quad (4.116)$$

$$-(2m + 1) \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{\epsilon}{2} \dot{\phi}^2 + V + \frac{\rho_{m0}}{B^{m+2}} = 0, \quad (4.117)$$

olur. Bu denklemler lineer olmayan diferansiyel denklemlerdir. Bu yüzden çözüm için Noether simetrisi koşulundan yararlanılacaktır. (4.114) Lagrangianına ait şekillenim uzayı $T(B, \phi)$ ve bunun teğet uzayı $TQ(B, \phi, \dot{B}, \dot{\phi})$ şeklindedir. Dolayısıyla bu Lagrangian için genişletilmiş vektör alanı,

$$X^{[1]} = \alpha \frac{\partial}{\partial B} + \beta \frac{\partial}{\partial \phi} + \dot{\alpha} \frac{\partial}{\partial \dot{B}} + \dot{\beta} \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}},$$

olup, (3.17) ile verilen Noether simetri koşulu,

$$\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B} + \beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} + \dot{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{B}} + \dot{\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = 0,$$

şeklindedir. Burada α ve β katsayıları B ve ϕ 'ye bağlıdır. Buradan (4.114) Lagrangian için (3.17) Noether simetrisi koşulu ile

$$m\alpha + 2B\alpha_{,B} = 0, \quad (4.118)$$

$$(m+2)\alpha + 2B\beta_{,\phi} = 0, \quad (4.119)$$

$$2(2m+1)\alpha_{,\phi} - \epsilon B^2 \beta_{,B} = 0, \quad (4.120)$$

$$(m+2)\alpha V + B\beta V' = 0, \quad (4.121)$$

denklemler elde edilir. Bir sonraki bölümde, bu denklemlerin çözümleri, ϵ parametresinin değerlerine göre incelenecektir.

4.4.1. Standart Durum:

$\epsilon = 1$ için (4.118), (4.119), (4.120), (4.121) denklemleri değişkenlerine ayırma metodu yardımı ile çözüldüğünde,

$$\alpha = B^{-m/2}(c_1 e^{k\phi} + c_2 e^{-k\phi}), \quad (4.122)$$

$$\beta = \sqrt{4m+2} B^{-m/2-1}(-c_1 e^{k\phi} + c_2 e^{-k\phi}), \quad (4.123)$$

$$V = \lambda(c_1 e^{k\phi} - c_2 e^{-k\phi})^2, \quad (4.124)$$

olarak elde edilir. Burada $k = \frac{m+2}{2\sqrt{4m+2}}$ şeklinde tanımlanmış olup c_1 , c_2 ve λ keyfi integral sabitleridir. (4.115), (4.116), (4.117) alan denklemlerine çözüm bulmak için elde edilen (4.122) ve (4.123) vektör alanlarını kullanarak, (4.114) Lagrangianında dögüsel

değişken elde edilir. Bunun için aşağıdaki denklemler kullanılır (Capozziello vd 1996):

$$\begin{aligned}\alpha \frac{\partial u(B, \phi)}{\partial B} + \beta \frac{\partial u(B, \phi)}{\partial \phi} &= 0, \\ \alpha \frac{\partial z(B, \phi)}{\partial B} + \beta \frac{\partial z(B, \phi)}{\partial \phi} &= 1.\end{aligned}\quad (4.125)$$

Böylece $\{B, \phi\} \longrightarrow \{u, z\}$ dönüşümü yapılmış olur. (4.125) denklemlerinin çözümlerinden,

$$\begin{aligned}u &= \frac{(c_1 e^{k\phi} - c_2 e^{-k\phi}) B^{(m+2)/2}}{2c_1 c_2 (m+2)}, \\ z &= \frac{(c_1 e^{k\phi} + c_2 e^{-k\phi}) B^{(m+2)/2}}{2c_1 c_2 (m+2)},\end{aligned}\quad (4.126)$$

elde edilir. Burada $c_1 \neq 0$ ve $c_2 \neq 0$ alınmaktadır. Bu çözümlerin ters dönüşümleri alınarak,

$$\begin{aligned}B &= [c_1 c_2 (m+2)^2 (z^2 - u^2)]^{\frac{1}{m+2}}, \\ \phi &= \frac{1}{2k} \ln \frac{c_2 (z+u)}{c_1 (z-u)},\end{aligned}\quad (4.127)$$

bulunur. Böylece (4.124) potansiyel ifadesi,

$$V = \lambda \left[c_1 \left(\frac{c_2 (z+u)}{c_1 (z-u)} \right)^{\frac{1}{2}} - c_2 \left(\frac{c_2 (z+u)}{c_1 (z-u)} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2, \quad (4.128)$$

şekline dönüşür. Buradan (4.127) ve (4.128) ifadeleri (4.114) Lagrangianında yerine konulursa yeni koordinatlardaki dönüşmüş Lagrangian,

$$\mathcal{L} = 4c_1 c_2 (2m+1) (\dot{u}^2 - \dot{z}^2) - 4c_1^2 c_2^2 \lambda (m+2)^2 u^2 - \rho_{m0}, \quad (4.129)$$

olarak elde edilir. Bu Lagrangian z 'ye bağlı olmadığı için z değişkeni dögüsel değişkendir. Bu yeni Lagrangian (4.129) için alan denklemleri,

$$\dot{z} + \frac{I_0}{8c_1 c_2 (2m+1)} = 0, \quad (4.130)$$

$$\ddot{u} + \frac{(m+2)^2}{2m+2} u = 0, \quad (4.131)$$

$$4c_1 c_2 (2m+1) (\dot{u}^2 - \dot{z}^2) + 4c_1^2 c_2^2 \lambda (m+2)^2 u^2 + \rho_{m0}, \quad (4.132)$$

olup burada I_0 bu durum için hareket sabitidir. (4.130) ve (4.131) alan denklemleri kullanılarak z ve u için çözümler,

$$z = z_0 t + b_1, \quad (4.133)$$

$$u = b_2 e^{lt} + b_3 e^{-lt}, \quad (4.134)$$

şeklinde bulunur. Burada b_i 'ler integrasyon sabitleridir. Ayrıca $l = \left[\frac{-c_1 c_2 (m+2)^2}{2m+1} \right]^{\frac{1}{2}}$ ve $z_0 = -\frac{I_0}{8c_1 c_2 (2m+1)}$ olarak tanımlanmıştır. Bulunan bu çözümleri (4.127)'de yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} B(t) &= [c_1 c_2 (m+2)^2 ((z_0 t + b_1)^2 - (b_2 e^{lt} + b_3 e^{-lt})^2)]^{\frac{1}{m+2}}, \\ \phi(t) &= \frac{1}{2k} \ln \frac{c_2 (z_0 t + b_1 + b_2 e^{lt} + b_3 e^{-lt})}{c_1 (z_0 t + b_1 - b_2 e^{lt} + b_3 e^{-lt})}, \end{aligned} \quad (4.135)$$

sonuçları elde edilir. $A = B^m$ ilişkisini dikkate alarak x yönündeki metrik potansiyel,

$$A(t) = [c_1 c_2 (m+2)^2 ((z_0 t + b_1)^2 - (b_2 e^{lt} + b_3 e^{-lt})^2)]^{\frac{m}{m+2}}, \quad (4.136)$$

olarak bulunur. Buradan ortalama ölçek çarpanı $a = (AB^2)^{1/3} = B^{(m+2)/3}$ olup,

$$a(t) = [c_1 c_2 (m+2)^2 ((z_0 t + b_1)^2 - (b_2 e^{lt} + b_3 e^{-lt})^2)]^{\frac{1}{3}}, \quad (4.137)$$

şeklinde hesaplanır. Burada kolaylık amacıyla $I_0 = 0$ olarak alınır. Elde edilen (4.137) ortalama ölçek çarpanı ifadesinden yola çıkarak, H Hubble parametresi, q yavaşlama parametresi ve w EoS parametresi gibi kozmolojik parametreler hesaplanır. Buna göre x, y, z yönündeki ortalama ölçek çarpanları,

$$H_x = \frac{\dot{A}}{A} = \frac{2ml(b_2^2 e^{4lt} - b_3^2)}{(m+2)[(b_2 e^{2lt} + b_3)^2 - b_1^2 e^{2lt}]} = mH_y = mH_z, \quad (4.138)$$

olarak bulunur. Ortalama Hubble parametresi,

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2l(b_2^2 e^{4lt} - b_3^2)}{3[(b_2 e^{2lt} + b_3)^2 - b_1^2 e^{2lt}]}, \quad (4.139)$$

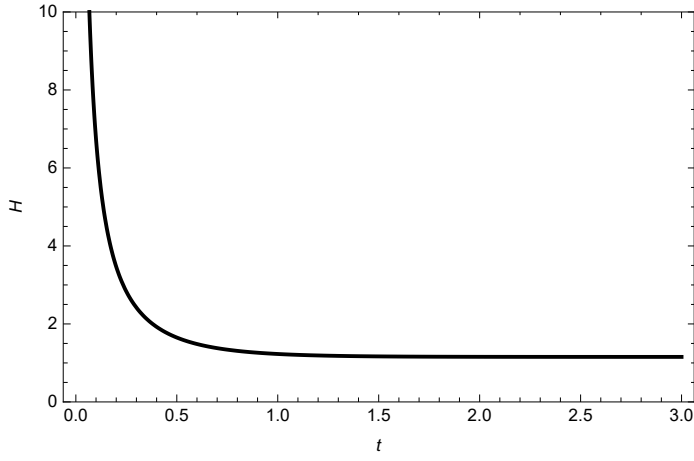
olur. Yavaşlama parametresi,

$$q = -1 + \frac{3(b_1 - 2b_2 b_3)(b_2^2 e^{6lt} + b_3^2 e^{2lt}) - 12b_2^2 b_3^2 e^{4lt}}{(b_3^2 - b_2^2 e^{4lt})^2}, \quad (4.140)$$

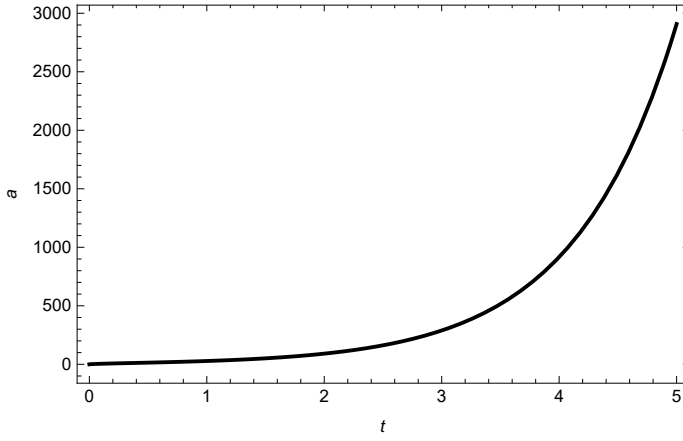
ve EoS parametresi,

$$w = -1 + \frac{2(b_1 - 2b_2 b_3)(b_2^2 e^{6lt} + b_3^2 e^{2lt}) - 8b_2^2 b_3^2 e^{4lt}}{(b_3^2 - b_2^2 e^{4lt})^2}, \quad (4.141)$$

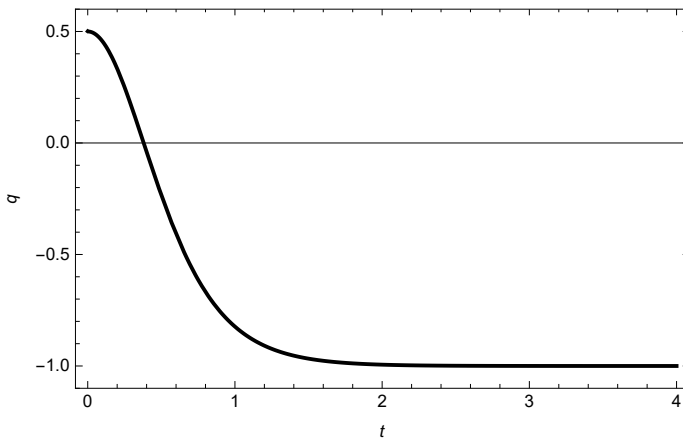
şeklinde hesaplanır.



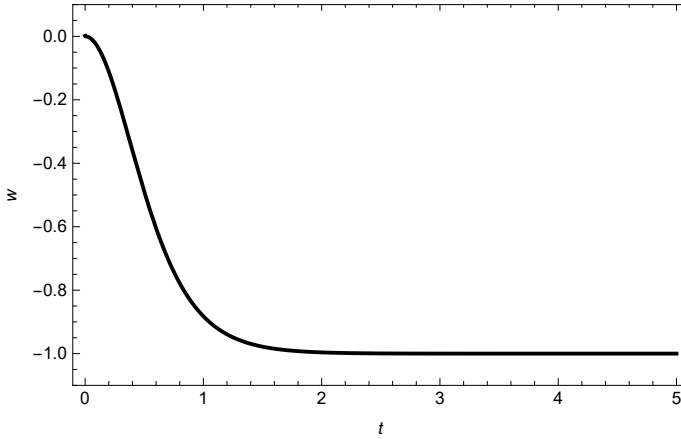
Şekil 4.1. Standart durum için, Hubble parametresi H 'nin zamana göre değişim grafiği



Şekil 4.2. Standart durum için, ortalama ölçek çarpanı a 'nın zamana göre değişim grafiği



Şekil 4.3. Standart durum için, yavaşlama parametresi q 'nin zamana göre değişim grafiği



Şekil 4.4. Standart durum için, EoS parametresi w 'nin zamana göre değişim grafiği

Bulunan kozmolojik parametrelerin grafiksel davranışları yukarıda incelenmiştir. İlk olarak, Hubble parametresi $H(t)$ 'nin zamanla değişimi (4.1) grafiği ile gösterilmiştir. Buna göre, evrenin ortalama genişleme oranının zamanla azaldığı görülmektedir. Ardından, ölçek çarpanı $a(t)$ 'nin zamanla değişimi Grafik (4.2) ile verilmiştir. Bu grafiğe göre evrenin genişlemekte olduğu görülür. Grafik (4.3), q yavaşlama parametresinin zamanla değişimini vermektedir. Bu grafiğe göre, yavaşlama parametresi başlangıçta pozitif bölgede olup evrenin genişlemesinin yavaşlama eğilimindedir. Daha sonra, yavaşlama parametresi negatif bölgeye geçer ve evrenin genişlemesinin ivmelendiği görülür. Grafik (4.4) de ise durum denklemleri parametresinin zamanla değişimi verilmiştir. Buna göre başlangıçta evren madde baskın durumda iken günümüzde karanlık enerji baskın durumdadır diyebiliriz. Ayrıca burada standart durum incelenmiş olup $w = -1$ (fantom) bariyerinin geçilmediği de görülmektedir.

Şimdi (4.122) ve (4.123) simetri vektörlerinde $c_1 = 0$ özel durumunu ve sadece skaler alan dikkate almak için $\rho_{m0} = 0$ durumunu ele alalım. (4.125) denklemlerinin çözümlerinden;

$$\begin{aligned} u &= \phi - \sqrt{4m+2} \ln B, \\ z &= \frac{B^{m/2+1}}{c_2(m+2)} e^{\frac{m+2}{2\sqrt{4m+2}}\phi}, \end{aligned} \quad (4.142)$$

elde edilir. Bu çözümlerin ters dönüşümleri alınarak

$$\begin{aligned} B &= e^{-\frac{u}{2\sqrt{4m+2}}} [c_2(m+2)z]^{\frac{1}{m+2}}, \\ \phi &= \frac{u}{2} + \sqrt{4m+2} \ln [c_2(m+2)z]^{\frac{1}{m+2}}, \end{aligned} \quad (4.143)$$

elde edilir. Buradan da (4.124) potansiyeli,

$$V = \lambda e^{-\frac{(m+2)u}{2\sqrt{4m+2}}} [c_2(m+2)z]^{-1}, \quad (4.144)$$

şeklini alır. Böylece (4.143) ifadeleri (4.114) Lagrangianında yerine konulursa yeni koordinatlardaki dönüşmüş Lagrangian,

$$\mathcal{L} = c_2\sqrt{4m+2}e^{-\frac{(m+2)u}{2\sqrt{4m+2}}}\dot{u}\dot{z} - \lambda e^{-\frac{(m+2)u}{\sqrt{4m+2}}}, \quad (4.145)$$

olur. Bu Lagrangian da z' 'ye bağlı olmadığı için z değişkeni dögüsel değişkendir. (4.145) Lagrangianı için Euler-Lagrange ve (3.14) Hamilton kısıtlama denklemleri,

$$\begin{aligned} c_2\sqrt{4m+2}e^{-\frac{(m+2)u}{2\sqrt{4m+2}}}\dot{u} &= I_0, \\ -(4m+2)\ddot{z} + (m+2)\lambda e^{-\frac{(m+2)u}{2\sqrt{4m+2}}} &= 0, \\ c_2\sqrt{4m+2}e^{-\frac{(m+2)u}{2\sqrt{4m+2}}}\dot{u}\dot{z} + \lambda e^{-\frac{(m+2)u}{\sqrt{4m+2}}} &= 0, \end{aligned} \quad (4.146)$$

olur. Burada I_0 bu durumdaki hareket sabitidir. Bu yeni koordinat sisteminde korunan nicelik I_0 'ı veren z , dögüsel değişkenle ilgili hareket denklemdir. (4.146) denklemlerinden,

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{2\sqrt{4m+2}}{(m+2)} \ln \left[-\frac{(m+2)c_2}{h(t+b_1)} \right], \\ z(t) &= -\frac{h\lambda}{12c_2^2(2m+1)}(t+b_1)^3 + b_2, \end{aligned} \quad (4.147)$$

çözümleri elde edilir. Burada $h = \frac{I_0(m+2)^2}{4(2m+1)}$ şeklinde tanımlanmıştır ve b_1, b_2 bu yeni durum için integral sabitleridir. Bu çözümler (4.143) ifadelerinde yerine konularak,

$$\begin{aligned} B(t) &= \left[\frac{h^2\lambda}{12c_2^2(2m+1)}(t+b_1)^4 - h(t+b_1)b_2 \right]^{1/(m+2)}, \\ \phi(t) &= \frac{\sqrt{4m+2}}{(m+2)} \ln \left[\frac{h\lambda}{3I_0}(t+b_1)^2 - \frac{h(m+2)^2c_2^2b_2}{(t+b_1)} \right], \end{aligned} \quad (4.148)$$

elde edilir.

Daha önce yapılan $A = B^m$ kabulüne göre $A(t)$,

$$A(t) = \left[\frac{h^2\lambda}{12c_1^2(2m+1)}(t+b_1)^4 - h(t+b_1)b_2 \right]^{m/(m+2)}, \quad (4.149)$$

olarak hesaplanır. Buradan da ölçek çarpanı,

$$a(t) = \left[\frac{h^2\lambda}{12c_1^2(2m+1)}(t+b_1)^4 - h(t+b_1)b_2 \right]^{1/3}, \quad (4.150)$$

ve Hubble parametresi,

$$H(t) = \frac{1}{3} \frac{\frac{h\lambda}{3c_2^2(2m+1)}(t+b_1)^3 - b_2}{\frac{h\lambda}{12c_2^2(2m+1)}(t+b_1)^4 - (t+b_1)b_2}, \quad (4.151)$$

şeklinde bulunur.

Yavaşlama parametresi $q = -a\ddot{a}/\dot{a}^2$ şeklinde tanımlanmış olup, $q > 0$ için negatif ivmelenecek genişleme, $q < 0$ için pozitif ivmelenecek genişleme, $q = 0$ için sabit hızlı genişlemeye karşılık gelir. Durum denklemleri parametresi $w = \rho/p$ olarak tanımlıdır. Burada enerji yoğunluğu $\rho = 1/2\dot{\phi}^2 - V(\phi)$ ve basınç $p = 1/2\dot{\phi}^2 + V(\phi)$ şeklinde tanımlanmıştır. Madde baskın evrende $w_m = 0$, ışınım baskın evrende $w_r = 1/3$, vakum enerji baskın evrende ise $w = -1$ olarak alınır. Ayrıca $-1 < w < -1/3$ quintessence karanlık enerji, $w < -1$ ise fantom karanlık enerji durumlarına karşılık gelir. Bu tanımlara göre yavaşlama parametresi,

$$q = \frac{-h^2\lambda^2(t+b_1)^6 + 60h\lambda b_2c_2^2(2m+1)(t+b_1)^3 + 144b_2^2c_2^4(2m+1)^2}{4(-3b_2c_2^2(2m-1) + h\lambda(t+b_1)^3)^2}, \quad (4.152)$$

ve EoS parametresi,

$$w = \frac{-h^2\lambda^2(t+b_1)^6 + 16h\lambda b_2c_2^2(3m+1)(t+b_1)^3 + 6b_2^2c_2^4(28m^2 + 36m + 7)}{2(-3b_2c_2^2(2m-1) + h\lambda(t+b_1)^3)^2}, \quad (4.153)$$

olarak hesaplanır. Burada eğer $b_2 = 0$ özel durumu incelenirse bazı fiziksel parametreler aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} A(t) &= \left[\frac{h^2\lambda}{12c_1^2(2m+1)} \right]^{m/(m+2)} (t+b_1)^{4m/(m+2)}, \\ a(t) &= \left[\frac{h^2\lambda}{12c_1^2(2m+1)} \right]^{1/3} (t+b_1)^{4/3}, \\ H(t) &= \frac{4}{3(t+b_1)}, \\ q &= -\frac{1}{4}, \\ w &= -\frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (4.154)$$

Bu sonuçlara göre yavaşlama parametresinin negatif olması ile evrenin ivmelenecek genişlediğini ve durum denklemleri parametresinin bulunan değerine göre de karanlık enerji baskın evren modelini gösterdiğini ifade edebiliriz.

Öte yandan, (4.122) ve (4.123) simetri vektörleri için $c_2 = 0$ özel durumunu da inceleyebiliriz. (4.125) denklemleri uygulanarak

$$\begin{aligned} u &= \phi + \sqrt{4m+2} \ln B, \\ z &= \frac{B^{m/2+1}}{c_1(m+2)} e^{\frac{-(m+2)}{2\sqrt{4m+2}}\phi}, \end{aligned} \quad (4.155)$$

bulunur. Buradan ters dönüşüm ile de,

$$\begin{aligned} B &= e^{\frac{u}{2\sqrt{4m+2}}} [c_1(m+2)z]^{\frac{1}{m+2}}, \\ \phi &= \frac{u}{2} - \sqrt{4m+2} \ln [c_1(m+2)z]^{\frac{1}{m+2}}, \end{aligned} \quad (4.156)$$

ifadeleri elde edilir. Böylece (4.156) potansiyeli,

$$V = \lambda e^{\frac{(m+2)u}{2\sqrt{4m+2}}} [c_2(m+2)z]^{-1}, \quad (4.157)$$

şekline indirgenir. (4.156) ve (4.157) ifadelei (4.114) Lagrangianında yerine konularak dönüştürülmüş yeni Lagrangian,

$$\mathcal{L} = -c_1 \sqrt{4m+2} e^{\frac{(m+2)u}{2\sqrt{4m+2}}} \dot{u} \dot{z} - \lambda e^{\frac{(m+2)u}{\sqrt{4m+2}}}, \quad (4.158)$$

olur. Buradan (3.15) Euler-Lagrange ve (3.14) Hamilton kısıtlama denklemleri,

$$\begin{aligned} -c_1 \sqrt{4m+2} e^{\frac{(m+2)u}{2\sqrt{4m+2}}} \dot{u} &= I_0, \\ (4m+2) \ddot{z} - (m+2) \lambda e^{\frac{(m+2)u}{2\sqrt{4m+2}}} &= 0, \\ c_1 \sqrt{4m+2} e^{\frac{(m+2)u}{2\sqrt{4m+2}}} \dot{u} \dot{z} - \lambda e^{\frac{(m+2)u}{\sqrt{4m+2}}} &= 0, \end{aligned} \quad (4.159)$$

olarak elde edilir. Çözümler ise,

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{2\sqrt{4m+2}}{(m+2)} \ln \left[-\frac{(m+2)c_1}{h(t+b_1)} \right], \\ z(t) &= -\frac{h\lambda}{12c_1^2(2m+1)} (t+b_1)^3 + b_2, \end{aligned} \quad (4.160)$$

şeklinde bulunur. Bu çözümleri (4.156) ifadelerinde yerine yazarak,

$$\begin{aligned} B(t) &= \left[\frac{h^2\lambda}{12c_1^2(2m+1)} (t+b_1)^4 - h(t+b_1)b_2 \right]^{1/(m+2)}, \\ \phi(t) &= -\frac{\sqrt{4m+2}}{(m+2)} \ln \left[\frac{h\lambda}{3I_0} (t+b_1)^2 - \frac{h(m+2)^2 c_1^2 b_2}{(t+b_1)} \right], \end{aligned} \quad (4.161)$$

parametreleri elde edilir. Burada ilk etapta ele alınan $c_1 = 0$ özel durumu için elde edilen sonuçlardan farklı olarak $\phi(t)$ ifadesi negatif olarak bulunur. $B(t)$ ifadesi aynı olduğu için kozmolojik parametreler (4.149), (4.150), (4.151), (4.152), (4.153) çözümleri ile aynı olarak elde edilmiştir.

4.4.2. Fantom Durumu:

Fantom durumunda (4.115), (4.116) , (4.117) alan denklemlerine çözüm bulmak için bir önceki bölümde izlenen yöntem kullanılabilir. Buna göre $\epsilon = -1$ iken (4.118), (4.119), (4.120), (4.121) denklemlerinin değişkenlerine ayırma metodu ile çözümünden,

$$\begin{aligned}\alpha &= (c_1 \sin k\phi + c_2 \cos k\phi) B^{-m/2}, \\ \beta &= \sqrt{4m+2}(c_1 \cos k\phi - c_2 \sin k\phi) B^{-m/2-1}, \\ V &= \frac{c_3}{2}(c_1^2 \cos 2k\phi - c_2^2 \cos 2k\phi - 2c_1 c_2 \sin 2k\phi + c_1^2 + c_2^2),\end{aligned}\quad (4.162)$$

ifadeleri elde edilir. Burada $k = \frac{m+2}{2\sqrt{4m+2}}$ olarak tanımlanmıştır. Ayrıca c_1, c_2 ve c_3 bu durum için integral sabitleridir.

$c_1 = 0$ özel durumunu ele alırsak, vektör alanları,

$$\begin{aligned}\alpha &= c_2 B^{-m/2} \cos k\phi, \\ \beta &= -c_2 \sqrt{4m+2} B^{-m/2-1} \sin k\phi,\end{aligned}\quad (4.163)$$

ve potansiyel,

$$V = \gamma[1 - \cos 2k\phi],\quad (4.164)$$

olarak indirgenir. Burada $\gamma = c_2^2 c_3 / 2$ olarak tanımlanan bir sabittir. Vektör alanları (4.125) denklemlerinde yerine konularak,

$$\begin{aligned}u &= b_0 B^{m/2+1} \sin k\phi, \\ z &= \frac{2}{c_2(m+2)} B^{m/2+1} \cos k\phi,\end{aligned}\quad (4.165)$$

çözümleri elde edilir. Buradan ters dönüşüm ile de,

$$\begin{aligned}B &= \left(\frac{u}{b_0}\right)^{2/m+2} \left[1 + \frac{c_2^2(m+2)^2 z^2}{4} \left(\frac{b_0}{u}\right)^2\right]^{1/(m+2)}, \\ \phi &= \frac{2\sqrt{4m+2}}{(m+2)} \operatorname{arccot} \left[\frac{1}{2} c_2(m+2) z \frac{b_0}{u}\right], \\ V &= \gamma \left[1 - \cos \left(2 \operatorname{arccot} \left(\frac{1}{2} c_2(2+m) \left(\frac{b_0}{u}\right)^{\frac{2+m}{2l}} z\right)\right)\right],\end{aligned}\quad (4.166)$$

olarak bulunur. Bulunan (4.166) ifadeleri (4.114) Lagrangianında yerine konularak yeni Lagrangian,

$$\mathcal{L} = - \left(\frac{u}{b_0}\right)^2 \frac{4(2m+1)}{(m+2)^2} \frac{\dot{u}^2}{u^2} - c_2 \left(\frac{u}{b_0}\right)^2 - c_2^2(2m+1)z^2,\quad (4.167)$$

şekline dönüştürülür. (4.167) Lagrangianına ait (3.15) Euler-Lagrange ve (3.14) Hamilton kısıtlama denklemleri,

$$\begin{aligned} 2c_2^2(2m+1)\dot{z} &= I_0, \\ \frac{8(2m+1)}{b_0^2(m+2)^2}\dot{u}^2 - \frac{2c_2}{b_0^2}u &= 0, \\ -\left(\frac{u}{b_0}\right)^2 \frac{4(2m+1)}{(m+2)^2} \frac{\dot{u}^2}{u^2} + c_2 \left(\frac{u}{b_0}\right)^2 - c_2^2(2m+1)\dot{z}^2 &= 0, \end{aligned} \quad (4.168)$$

olarak elde edilir. Burada I_0 bu duruma ait hareket sabitidir. (4.168) denklemlerinin çözümleri,

$$\begin{aligned} u(t) &= d_1 e^{\sqrt{c_2}kt} + d_2 e^{-\sqrt{c_2}kt}, \\ z(t) &= \frac{I_0}{2c_2^2(2m+1)}t + K_0, \end{aligned} \quad (4.169)$$

şeklinde bulunur. Burada K_0 integral sabitidir. Bu çözümler (4.166) ifadelerinde yerine konulduğunda, y ve z yönündeki metrik potansiyeli ve skaler alan ifadeleri,

$$\begin{aligned} B(t) &= \left[\frac{c_2(m+2)^2}{4} \left(\frac{I_0 t}{2c_2^2(2m+1)} + K_0 \right)^2 + \left(\frac{d_1 e^{\sqrt{c_2}kt} + d_2 e^{-\sqrt{c_2}kt}}{b_0} \right)^2 \right]^{1/(m+2)}, \\ \phi(t) &= \frac{2\sqrt{4m+2}}{(m+2)} \operatorname{arccot} \left[\frac{c_2(m+2)b_0}{2(d_1 e^{\sqrt{c_2}kt} + d_2 e^{-\sqrt{c_2}kt})} \left(\frac{I_0}{2c_2^2(2m+1)}t + K_0 \right) \right], \end{aligned} \quad (4.170)$$

şeklinde elde edilir.

Daha sonra $A = B^m$ koşulu dikkate alınarak $A(t)$,

$$A(t) = \left[\frac{c_2(m+2)^2}{4} \left(\frac{I_0 t}{2c_2^2(2m+1)} + K_0 \right)^2 + \left(\frac{d_1 e^{\sqrt{c_2}kt} + d_2 e^{-\sqrt{c_2}kt}}{b_0} \right)^2 \right]^{m/(m+2)}, \quad (4.171)$$

elde edilir. Buradan da ortalama ölçek çarpanı,

$$a(t) = \left[\frac{c_2(m+2)^2}{4} \left(\frac{I_0 t}{2c_2^2(2m+1)} + K_0 \right)^2 + \left(\frac{d_1 e^{\sqrt{c_2}kt} + d_2 e^{-\sqrt{c_2}kt}}{b_0} \right)^2 \right]^{1/3}, \quad (4.172)$$

ve Hubble parametresi,

$$H(t) = \frac{16c_2^{5/2} e^{-2\sqrt{c_2}kt} (-d_2^2 + d_1^2 e^{4\sqrt{c_2}kt}) k(2m+1)^2 + b_0^2 I_0 (m+2)^2 (2c_2^2 K_0(2m+1) + I_0 t)}{24c_2^2 e^{-2\sqrt{c_2}kt} (d_2 + d_1 e^{2\sqrt{c_2}kt})^2 (2m+1)^2 + \frac{3}{2} b_0^2 (m+2)^2 (2c_2^2 K_0(2m+1) + I_0 t)^2}, \quad (4.173)$$

olarak hesaplanır.

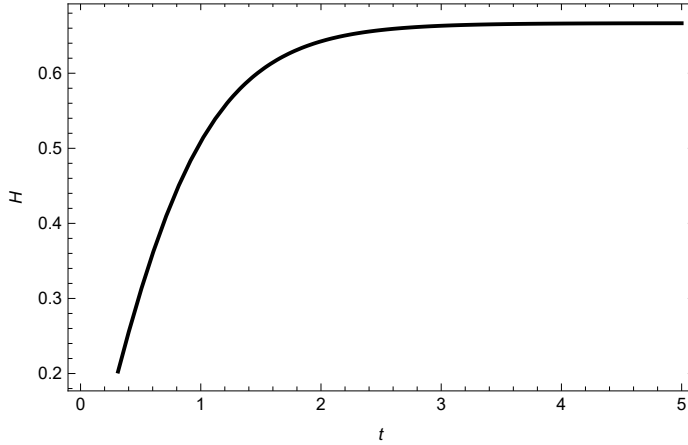
Enerji yoğunluk $\rho = 1/2\dot{\phi}^2 - V(\phi)$ ve basınç $p = 1/2\dot{\phi}^2 + V(\phi)$ olmak üzere, yavaşlama parametresi,

$$q = s^2 \left(-4c_2 k^2 s^2 (d_2^4 + d_1^4 e^{8\sqrt{c_2}kt}) - 2d_1 d_2 e^{4\sqrt{c_2}kt} (3n^2 + 20c_2 d_1 d_2 k^2 s^2) - d_1^2 e^{6\sqrt{c_2}kt} (24c_2 d_1 d_2 k^2 s^2 + n^2 (3 - 6\sqrt{c_2}kt + 4c_2 k^2 t^2)) - d_2^2 e^{2\sqrt{c_2}kt} (24c_2 d_1 d_2 k^2 s^2 + n^2 (3 + 6\sqrt{c_2}kt + 4c_2 k^2 t^2)) \right) / (-2\sqrt{c_2} (d_2^2 - d_1^2 e^{4\sqrt{c_2}kt}) k s^2 + e^{2\sqrt{c_2}kt} n^2 t)^2, \quad (4.174)$$

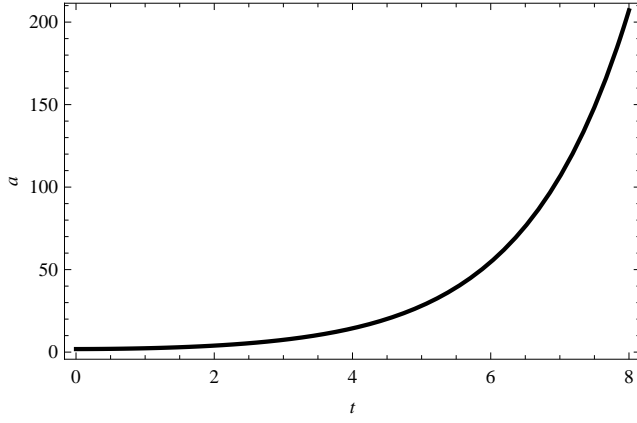
ve durum denklemleri parametresi,

$$w = - \left(12c_2 k^2 s^4 (d_2^4 + d_1^4 e^{8\sqrt{c_2}kt}) + e^{4\sqrt{c_2}kt} (12d_1 d_2 s^2 (n^2 + 6c_2 d_1 d_2 k^2 s^2) + n^4 t^2) + 2d_1^2 e^{6\sqrt{c_2}kt} s^2 (24c_2 d_1 d_2 k^2 s^2 + n^2 (3 - 4\sqrt{c_2}kt + 4c_2 k^2 t^2)) + 2d_2^2 e^{2\sqrt{c_2}kt} s^2 (24c_2 d_1 d_2 k^2 s^2 + n^2 (3 + 4\sqrt{c_2}kt + 4c_2 k^2 t^2)) \right) / \left(3 (-2\sqrt{c_2} (d_2^2 - d_1^2 e^{4\sqrt{c_2}kt}) k s^2 + e^{2\sqrt{c_2}kt} n^2 t)^2 \right), \quad (4.175)$$

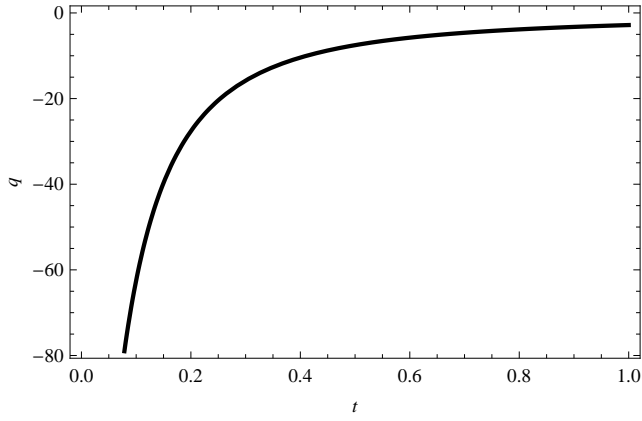
şeklinde bulunur. Aşağıda bu sonuçların zamana göre grafikleri çizilip irdelenmiştir.



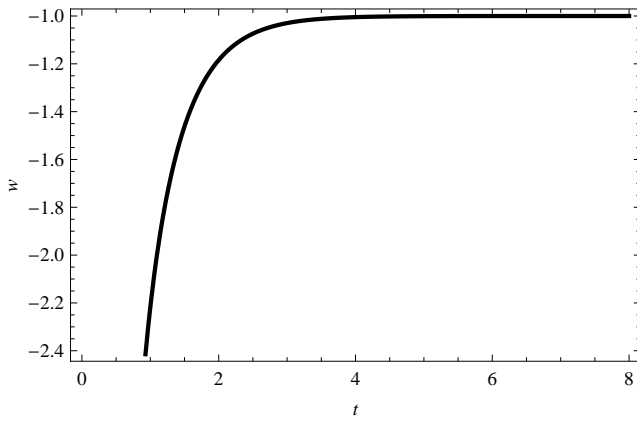
Şekil 4.5. Fantom durum için, Hubble parametresi H 'nin zamana göre değişim grafiği



Şekil 4.6. Fantom durum için, ölçek çarpanı a 'nin zamana göre değişim grafiği



Şekil 4.7. Fantom durum için, yavaşlama parametresi q 'nin zamana göre değişim grafiği



Şekil 4.8. Fantom durum için, durum denklemleri parametresi w 'nin zamana göre değişim grafiği

Yukarıda çizilmiş grafiklerden ölçek çarpanı $a(t)$ 'nin zamanla değişimini veren (4.6) grafiğine göre bulunan çözümler evrenin genişlemekte olduğunu gösterir. (4.7) grafiğinde ise q yavaşlama parametresinin zamanla değişimi verilmektedir. Burada yavaşlama parametresi negatif bölgede olup genişlemenin hızlandığını ifade gösterir. (4.8) grafiğinde EoS parametresinin zamanla değişimi verilmiştir. Burada $w < -1$ değerler aldığı ve fantom karanlık enerji durumuna karşılık geldiği görülür.

5. SONUÇLAR

GRT’de alan denklemlerine çözüm bulmak üzere simetri yaklaşımı kullanımı oldukça kullanışlıdır. Benzer biçimde genişletilmiş çekim teorilerinde de simetri yaklaşımı kullanılması faydalı olmaktadır. Bu simetri yaklaşımlarından biri Lagrangianı invaryant bırakan Noether simetrisi yaklaşımı olup, skaler tensör çekim teorisi için çiftlenim fonksiyonu ve potansiyel ya da $f(R)$ çekim teorisi için $f(R)$ fonksiyonunun biçimini belirlememizi sağlayabilir.

Bu tez çalışmasında, 1. bölümünde, evrene bakışımız ve algılayış biçimimizin tarihsel gelişimine ait çok kısa bir özet yaparak genişletilmiş çekim teorileri ve çözüm yöntemi olarak da Noether simetrisi yaklaşımı kullanma amacı ifade edilmiştir. 2. bölümde, ilk olarak GRT’nin prensiplerinden bahsedilip, teori hakkında bilgi verilmiştir. Daha sonra sırasıyla skaler tensör çekim teorisi ve $f(R)$ çekim teorisi hakkında kısaca teorik bilgi verilmiştir. 3. bölümde ise, ele alınan çekim teorilerinin alan denklemlerine çözüm bulmak adına kullanılacak yöntem olan Noether simetrisi yaklaşımının teorik bilgisi verilmiştir. 4. bölümünde, ilk olarak $f(R)$ çekim teorisinde sırasıyla küresel simetrik, silindirik simetrik ve düzlem simetrik uzay zamanlar ele alınarak Noether simetrileri araştırılmış ve bulunan Noether simetrileri ışığında alan denklemlerine çözüm bulunma çalışmaları yapılmıştır. Daha sonra, minimal etkileşimli skaler tensör çekim teorisi kapsamında LRS Bianchi I tip uzay-zaman ele alınıp Noether simetrileri elde edilmiş, quintessence ve fantom durumları için ayrı ayrı çözümler bulunmuştur. Dördüncü bölümde yapılan çalışmalar ve bulgular sırasıyla aşağıda ifade edilip yorumlanmıştır.

İlk olarak 4.1. bölümünde, $f(R)$ çekim teorisinde statik küresel simetrik uzay-zaman için Noether simetrisi yaklaşımı yardımı ile alan denklemlerine çözüm bulma çalışması yapılmıştır. Bu amaçla öncelikle $f(R)$ çekim teorisi için (4.22) Lagrangianı belirlenmiş ve bu Lagrangianın konfigürasyon uzayının A, B, Y ve R değişkenlerine göre varyasyonu alınarak, (4.23), (4.24), (4.25), (4.26) alan denklemleri elde edilmiştir. Daha sonra Noether simetrisi koşulu kullanılarak, (4.35) Noether simetrisi denklemleri elde edilmiştir. $f(R) = f_0 R^n$ durumu için (4.37) Noether simetrileri X_1 ve X_2 olarak bulunmuştur.

Bu Noether simetrilerine karşılık gelen (4.38) korunumlu nicelikler belirlenmiş ve,

$$A = R^{\frac{(n-1)(2n-1)}{2(n-2)}} \left[A_0 + \frac{I_1}{4n(n-2)f_0^2} \int \frac{BR^{\frac{(1-n)(4n-5)}{2(n-2)}}}{Y^2} dr \right],$$

ifadesi elde edilmiştir.

$f(R)$ çekim teorisinde statik küresel simetrik uzay-zaman için indirgenmiş ve indirgenmemiş olmak üzere iki tip Lagrangian incelenmiştir. Bunun için hesaplanan enerji fonksiyonunun $E_{\mathcal{L}_1} = 0$ olmasından yararlanarak, B ifadesi belirlenip (4.22) Lagrangianında yerine yazılmış ve (4.29) \mathcal{L}_2 Lagrangianı belirlenmiştir. Bu Lagrangian için (4.31), (4.32) ve (4.33) alan denklemleri hesaplanmıştır. Daha sonra, (4.29) Lagrangianı için Noether simetriler (4.45) ifadesinde verilen \mathbf{X}_1 , \mathbf{X}_2 ve \mathbf{X}_3 şeklinde elde edilmiştir. Literatürde indirgenmiş Lagrangian için $f(R) = f_0 R^n$ durumunda Noether simetrisi yaklaşımı ile elde edilen çözüm mevcut olup, Noether simetrisi,

$$\mathbf{X} = ((3 - 2n)kA, -kY, kR),$$

şeklinindedir (Capozziello vd 2007). Burada n bir reel sayı ve k ise integral sabitidir ¹. Bu çalışmada belirlenen simetrilere \mathbf{X}_3 , (Capozziello vd 2007) çalışmasında elde edilen simetri ile aynı olup, fazladan iki yeni \mathbf{X}_1 ve \mathbf{X}_2 Noether simetrisi olduğu görülmüştür. Bu simetriler için (4.46), (4.47) ve (4.48) hareket sabitleri belirlenmiştir. (4.48) ile verilen I_3 korunumlu niceliği yardımı ile,

$$A^2 = R^{\frac{(2n-1)(n-1)}{(n-2)}} \left[A_0 - \frac{I_3}{nf_0^2} \int \frac{R^{-\frac{(4n-5)(n-1)}{(n-2)}}}{Y^2(n-2)(2n + RY^2(n-1))} dr \right],$$

sonucu elde edilmiştir. Buradan yola çıkarak $Y(r) = r$, $B(r) = 1/A(r)$ ve $n = 1$ durumu incelenmiş ve

$$A^2 = A_0 - \frac{I_3}{2rf_0^2},$$

Schwarzschild çözümü elde edilmiştir. Daha sonra $Y(r) = r$, $n = 5/4$ ve $R(r) = 5/r^2$ koşulları ile de

$$A^2 = \frac{A_0}{\sqrt{5}}r - \frac{64I_3}{225\sqrt{5}f_0^2},$$

ve

$$B^2 = \left(1 - \frac{64I_3}{225\sqrt{5}A_0f_0^2r}\right)^{-1},$$

¹(Capozziello vd 2007) çalışmasında, metrik fonksiyonları Y ve M olarak kullanılmıştır.

ifadeleri elde edilmiştir. Bu sonuçlar literatürle uyumludur (Capozziello vd 2007).

Bölüm 4.2. de, $f(R)$ çekim teorisinde (4.53) şeklindeki statik silindirik simetrik uzay-zaman için Noether simetrisi araştırılıp, ele alınan çekim teorisine çözüm bulmak için kullanılmıştır. Bu amaçla öncelikle $f(R)$ çekim teorisi için Lagrangian (4.55) belirlenip, bu Lagrangianın alan denklemleri (4.56), (4.57), (4.58) olarak elde edilmiştir. Daha sonra (3.12) Noether simetrisi koşulu kullanılarak Noether simetrisi denklemleri (4.60) elde edilmiş ve $f(R) = f_0 R$, $w = -1$, $f_0, \rho_0 > 0$ koşullarında Noether simetrisi denklemleri çözümünden Noether simetrisi (4.62) elde edilmiştir. Bu Noether Simetrisilerine karşılık gelen korunumlu nicelikler (4.63) elde edilip metrik potansiyeller aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$B(r) = \left[\frac{3}{2\epsilon\alpha f_0} (I_4 e^{-\epsilon r/4} - I_5 e^{\epsilon r/4}) \right]^{4/3},$$

$$A(r) = A_0 \frac{(I_6 e^{-\epsilon r/4} - I_7 e^{\epsilon r/4})^2}{(I_4 e^{-\epsilon r/4} - I_5 e^{\epsilon r/4})^{2/3}}.$$

Daha sonra, (4.60) simetri denklemlerinin son denkleminde görülen $w = -1/4$ ve $w = 1/5$ kısıtlamaları ayrı ayrı incelenmiştir. Buradan, $f(R) = f_0 R$, $w = -1/4$, $f_0, \rho_0 > 0$ koşulları altında bulunan (4.68) ifadeleri yardımıyla,

$$A(r) = \left[-\frac{3I_2}{10k_0(rI_4 - I_3)^3\alpha f_0 I_4} + k_1(rI_4 - I_3)^2 \right]^{-2/3},$$

$$B(r) = k_0(rI_4 - I_3)^4 \left[-\frac{3I_2}{10k_0(rI_4 - I_3)^3\alpha f_0 I_4} + k_1(rI_4 - I_3)^2 \right]^{4/3},$$

çözümleri elde edilmiş ve $\rho_0 = \frac{40}{3\kappa} f_0 k_1 I_4^2$ olduğu görülmüştür.

Ardından, $f(R) = f_0 R$, $w = 1/5$, $f_0, \rho_0 > 0$ koşulları ile elde edilen (4.73) ile de metrik katsayıları arasında

$$\sqrt{AB} = \frac{3}{4\alpha f_0} (I_2 - rI_3),$$

bağıntısı bulunmuştur. Bu bölümde incelenen $f(R) = f_0 R$ fonksiyonu GRT durumuna karşılık gelmekle birlikte korunumlu nicelikler türünden bulunan çözümler ve durum denklemleri parametresi $w = -1/4$, $w = 1/5$ alınması durumunda bulunan çözümler literatürden farklıdır. Daha sonra, $f(R) = f_0 R^n$, $f_0, \rho_0 > 0$ durumu incelenmiş, (4.76) Noether simetrisi ve (4.77) korunumlu nicelikleri elde edilmiştir. Buradan,

$$A = B^{-\frac{3(w+1)-2n}{(2nw-w-1)}} R^{\frac{(2n-1)(n-1)(w+1)}{2(2nw-w-1)}} \left[A_0 + A_1 \int B^{\frac{2n(2w-1)+w+1}{2(2n-w-1)}} R^{-2\frac{n(n-3w-2)+w+1}{(2nw-w-1)}} dx \right]^2,$$

ifadesi elde edilmiştir. Ardından, $w = -1$ koşulu ayrıca ele alınmıştır. (4.80) Noether simetrisi ve (4.81) Noether integrali belirlenmiş, I_2 hareket sabiti yardımı ile

$$A = B \left(A_0 - \frac{I_2}{2n\alpha f_0} \int \frac{R^{(1-n)}}{B^{3/2}} dr \right)^2,$$

olarak bulunmuştur. $f(R) = f_0 R^n$ durumunda $f_0 > 0, \rho_0 = 0$ koşulu da ayrıca ele alınmıştır. (4.84) Noether simetrisi ve (4.85) hareket sabitleri belirlenmiştir. Buradan da,

$$A = R^{2(n-1)} B^{\frac{3}{2n-1}} \left(A_0 + \frac{I_1 - I_3}{2\alpha f_0 n(2n-1)} \int R^{-2(n-1)} B^{\frac{4n+1}{2n-1}} dr \right)^2,$$

elde edilmiştir.

Bölüm 4.3. de, $f(R)$ çekim teorisi kapsamında (4.87) ile verilen statik düzlem simetrik uzay-zaman için Noether simetrisi araştırılmıştır. Bu amaçla öncelikle $f(R)$ çekim teorisi için (4.89) Lagrangianı belirlenip, bu Lagrangianın alan denklemleri (4.90), (4.91) ve (4.92) olarak elde edilmiştir. Daha sonra (3.12) Noether simetrisi koşulu kullanılarak (4.94) Noether simetrisi denklemleri elde edilmiştir. Ardından, $f(R) = f_0 R^n, f_0, \rho_0 > 0$ koşullarında (4.96) Noether simetrisi bulunmuştur. Buradan elde edilen (4.97) Noether integralleri yardımı ile

$$A = \frac{I_2 Y^{\frac{3(w+1)-2n}{2(2nw-w-1)}} R^{\frac{-2(2n-2)(n-1)(w+1)}{(2nw-w-1)}}}{4n^2(2n-w-1)^2 f_0^2} \left[A_0 + \int Y^{\frac{2n(2w-1)+w+1}{2(2n-w-1)}} R^{\frac{2n(n-1)}{(2n-w-1)}} \sqrt{B} dx \right]^2, \quad (5.176)$$

ifadesi elde edilmiştir. Daha sonra $f(R) = f_0 R^n, f_0 > 0, \rho_0 = 0$ koşulları için (4.100) Noether simetrisi buradan da (4.101) Noether integralleri bulunmuştur. I_2 ve I_4 korunumlu nicelikleri kullanılarak,

$$A = \frac{(2n-1)^2}{4n^4} Y^{\frac{3}{n(n-1)}} \left(A_0 - (I_2 - I_4) \int R^{-n+1} Y^{-\frac{5n-3}{2n}} \sqrt{B} dx \right)^2, \quad (5.177)$$

elde edilmiştir.

Bölüm 4.4. de, minimal etkileşimli skaler tensör teorisi kapsamında (4.104) ifadesindeki LRS Bianchi I tip uzay-zaman ele alınmış ve çözüm için Noether simetrisi yaklaşımı kullanılmıştır. Minimal etkileşimli çekim teorisi için (4.103) eylem integrali ifade edilip, buradaki ϵ bir sabit olmak üzere quintessence ve fantom durumları arasındaki farkı belirtmek için kullanılmıştır. Böyle bir teori için, $A = B^m$ olmak üzere Lagrangian (4.114) elde edilmiştir. Lagrangianın metrik katsayılarına göre varyasyonundan hareket denklemleri

(4.115), (4.116), (4.117) ve (3.17) Noether simetrisi koşulundan (4.118), (4.119), (4.120), (4.121) Noether simetrisi denklemleri bulunmuştur.

Daha sonra 4.4.1. alt bölümünde $\epsilon = 1$ için (4.122), (4.123) Noether simetrisi vektörleri ve (4.124) potansiyelin biçimi elde edilmiştir. Burada dögüsel değişken bulabilmek için (4.126) dönüşümleri uygulanmıştır. Dögüsel değişken yardımıyla,

$$B(t) = [c_1 c_2 (m+2)^2 ((z_0 t + b_1)^2 - (b_2 e^{lt} + b_3 e^{-lt})^2)]^{\frac{1}{m+2}},$$

$$\phi(t) = \frac{1}{2k} \ln \frac{c_2 (z_0 t + b_1 + b_2 e^{lt} + b_3 e^{-lt})}{c_1 (z_0 t + b_1 - b_2 e^{lt} + b_3 e^{-lt})},$$

sonucuna ulaşılır. Burada $c_1 \neq 0$ ve $c_2 \neq 0$ durumları dikate alınmıştır. Elde edilen çözümler ile, (4.137) a ölçek çarpanı, (4.138) H Hubble parametresi, (4.140) q yavaşlama parametresi ve (4.141) w EoS parametresi, ifadeleri hesaplanmış ve (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) grafikleri çizilmiştir. Bunlara göre evrenimiz ivmelenerek genişlemekte ve quintessence durumunda olduğu, ayrıca $t \rightarrow \infty$, $w \rightarrow -1$ limit durumunda vakum enerji baskın durumda olduğu görülmüştür.

Daha sonra $c_1 = 0$ özel durumu için, dögüsel değişken elde edebilmek adına (4.142) dönüşümleri uygulanmıştır. Dögüsel değişken yardımıyla,

$$B(t) = \left[\frac{h^2 \lambda}{12 c_2^2 (2m+1)} (t+b_1)^4 - h(t+b_1)b_2 \right]^{1/(m+2)},$$

$$\phi(t) = \frac{\sqrt{4m+2}}{(m+2)} \ln \left[\frac{h\lambda}{3I_0} (t+b_1)^2 - \frac{h(m+2)^2 c_2^2 b_2}{(t+b_1)} \right],$$

çözümleri elde edilebilmiştir. Buradan yola çıkarak a ölçek çarpanı (4.150), H Hubble parametresi (4.151), q yavaşlama parametresi (4.152) ve w durum denklemleri parametresi (4.153) ifadeleri bulunmuştur. Ayrıca, $c_2 = 0$ durumunu da bakılmış ve sadece $\phi(t)$ ifadesi eksi işaretli olarak bulunmuş olup kozmolojik parametre hesaplarının $c_1 = 0$ durumundaki çözümlerle aynı olduğu görülmüştür.

Daha sonra 4.4.2. alt bölümünde $\epsilon = -1$ için Noether simetrisi vektörleri ve potansiyelin biçimi (4.162) belirlenmiştir. $c_1 = 0$ durumu için dögüsel değişken elde edebilmek üzere (4.165) dönüşümleri uygulanmıştır. Dögüsel değişken yardımıyla metrik potansiyelleri

$$B(t) = \left[\frac{c_2 (m+2)^2}{4} \left(\frac{I_0 t}{2c_2^2 (2m+1)} + K_0 \right)^2 + \left(\frac{d_1 e^{\sqrt{c_2} kt} + d_2 e^{-\sqrt{c_2} kt}}{b_0} \right)^2 \right]^{1/(m+2)}, \quad (5.178)$$

$$\phi(t) = \frac{2\sqrt{4m+2}}{(m+2)} \operatorname{arccot} \left[\frac{c_2(m+2)b_0}{2(d_1 e^{\sqrt{c_2}kt} + d_2 e^{-\sqrt{c_2}kt})} \left(\frac{I_0}{2c_2^2(2m+1)} t + K_0 \right) \right], \quad (5.179)$$

olarak bulunmuştur. Buradan yola çıkarak a ölçek çarpanı, H Hubble parametresi, q yavaşlama parametresi ve w durum denklemleri parametresi (4.171), (4.171), (4.172), (4.173), (4.174), (4.175) ifadeleri elde edilmiş ve grafikleri (4.6), (4.7), (4.8) çizilmiştir. Bunlara göre evrenimiz ivmelenerek genişlemekte ve fantom durumunda olup, $w = -1$ bariyerini geçmediği görülmektedir.

6. KAYNAKLAR

- Amendola, L. Tsujikawa, S. 2010. Dark Energy Theory and Observations. Cambridge University Press. Cambridge UK.
- Armendariz-Picon, C. Greene, P. B. 2003. Spinors, inflation, and nonsingular cyclic cosmologies. *Gen. Rel. Grav.*, 35:1637–1658.
- Bamba, K. , Capozziello, S. , Nojiri, S. , Odintsov, S. D. 2012. Dark energy cosmology: the equivalent description via different theoretical models and cosmography tests. *Astrophys. Space Sci.*, 342:155–228.
- Barrow, J. D. Maartens, R. 1998. Anisotropic stresses in inhomogeneous universes. *Phys. Rev. D*, 59:043502.
- Basilakos, S. , Tsamparlis, M. , Paliathanasis, A. 2011. Using the noether symmetry approach to probe the nature of dark energy. *Phys. Rev. D*, 83:103512.
- Brans, C. Dicke, R. H. 1961. Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation. *Phys. Rev.*, 124:925–935.
- Caldwell, R. R. Kamionkowski, M. 2009. The physics of cosmic acceleration. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 59:397–429.
- Camci, U. Kucukakca, Y. 2007. Noether symmetries of bianchi i, bianchi iii, and kantowski-sachs spacetimes in scalar-coupled gravity theories. *Phys. Rev. D*, 76:084023.
- Camci, U. , Yildirim, A. , Oz, I. B. 2016. New exact solutions of bianchi i, bianchi iii and kantowski-sachs spacetimes in scalar-coupled gravity theories via noether gauge symmetries. *Astropart. Phys.*, 76:29–37.
- Capozziello, S. de Ritis, R. 1993. Relation between the potential and nonminimal coupling in inflationary cosmology. *Physics Letters A*, 177:1 – 7.
- Capozziello, S. , de Ritis, R. , Rubano, C. , Scudellaro, P. 1996. Nöther symmetries in cosmology. *La Riv. del Nuovo. Cim.*, 19:1–114.

- Capozziello, S. DeFelice, A. 2008. $f(r)$ cosmology from noether's symmetry. *jcap*, 8:016.
- Capozziello, S. Lambiase, G. 2000. Higher-order corrections to the effective gravitational action from noether symmetry approach. *General Relativity and Gravitation*, 32:295–312.
- Capozziello, S. , Stabile, A. , Troisi, A. 2007. Newtonian limit of $f(r)$ gravity. *Phys. Rev. D*, 76:104019.
- Capozziello, S. , Stabile, A. , Troisi, A. 2007. Spherically symmetric solutions in $f(r)$ gravity via the noether symmetry approach. *Classical and Quantum Gravity*, 24:2153–2166.
- Carroll, S. 2004. Spacetime and geometry: an introduction to General Relativity. Addison Wesley.
- Clifton, T. Barrow, J. D. 2005. The power of general relativity. *Phys. Rev. D*, 72:103005.
- Collins, C. B. , Glass, E. N. , Wilkinson, D. A. 1980. Exact spatially homogeneous cosmologies. *Gen. Relativ. Gravit.*, 12:805–823.
- Copeland, E. J. , Sami, M. , Tsujikawa, S. 2006. Dynamics of dark energy. *Int. J. Mod.Phys. D*, 15:1753–1935.
- de Ritis, R. , Marmo, G. , Platania, G. , Rubano, C. , Scudellaro, P. , Stornaiolo, C. 1990. New approach to find exact solutions for cosmological models with a scalar field. *Phys. Rev. D*, 42:1091–1097.
- de Souza, R. C. Kremer, G. M. 2008. Noether symmetry for non-minimally coupled fermion fields. *Classical and Quantum Gravity*, 25:225006.
- Demianski, M. , de Ritis, R. , Rubano, C. , Scudellaro, P. 1992. Scalar fields and anisotropy in cosmological models. *Phys. Rev. D*, 46:1391–1398.
- d'Inverno, R. 1992. Introducing Einstein's relativity. Clarendon Press; Oxford University Press.
- Dirac, P. A. M. 1938. New basis for cosmology. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A165:199–208.

- Durrer, R. Maartens, R. 2008. Dark energy and dark gravity: theory overview. *Gen. Relativ. Gravit.*, 40:301–328.
- Efstathiou, G. , Moody, S. , Peacock, J. A. , Percival, W. J. , Baugh, C. , Bland-Hawthorn, J. , Bridges, T. , Cannon, R. , Cole, S. , Colless, M. , Collins, C. , Couch, W. , Dalton, G. , de Propris, R. , Driver, S. P. , Ellis, R. S. , Frenk, C. S. , Glazebrook, K. , Jackson, C. , Lahav, O. , Lewis, I. , Lumsden, S. , Maddox, S. , Norberg, P. , Peterson, B. A. , Sutherland, W. , Taylor, K. 2002. Evidence for a non-zero Λ and a low matter density from a combined analysis of the 2dF Galaxy Redshift Survey and cosmic microwave background anisotropies. *mnras*, 330:L29–L35.
- Einstein, A. 1915a. Die feldgleichungen der gravitation.
- Einstein, A. 1915b. Erklärung der perihelionbewegung der merkur aus der allgemeinen relativitätstheorie. *Sitzungsber. preuss.Akad. Wiss.*, vol. 47, No.2, pp. 831-839, 1915, 47:831–839.
- Einstein, A. 1916. Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie (49, 769). *Annalen der Physik*, 14:517–571.
- Einstein, A. 1917. Kosmologische betrachtungen zur allgemeinen relativitätstheorie.
- Eisenhart, L. P. 1997. Riemannian Geometry. Princeton University Press.
- Ellis, G. F. R. 2006. Physics in the real universe: time and spacetime. *Gen. Relativ. Gravit.*, 38:1797–1824.
- Faraoni, V. Capozziello, S. 2011. Beyond Einstein Gravity, volume 170. Springer, Dordrecht.
- Frieman, J. A. , Turner, M. S. , Huterer, D. 2008. Dark energy and the accelerating universe. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 46:385–432.
- George W. Bluman, S. C. A. 2002. Symmetry and integration methods for differential equations. Springer, 2nd edition.
- George W. Bluman, S. K. 1989. Symmetries and Differential Equations. Applied Mathematical Sciences, Vol 81. Springer, 2 edition.

- Hans Stephani, M. M. 1989. Differential equations: their solution using symmetries. Cambridge University Press.
- Hinshaw, G. et al. 2013. Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Cosmological parameter results. *ApJS*, 208:19.
- Hubble, E. 1929. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 15:168–173.
- Hussain, I. , Jamil, M. , Mahomed, F. M. 2012. Noether gauge symmetry approach in $f(r)$ gravity. *Astrophysics and Space Science*, 337:373–377.
- Jamil, M. , Mahomed, F. , Momeni, D. 2011. Noether symmetry approach in $f(r)$ –tachyon model. *Physics Letters B*, 702:315 – 319.
- Jordan, P. 1955. *Schwerkraft und weltall*.
- Kamilya, S. Modak, B. 2004. Noether symmetry study in general scalar tensor theory. , 36:673–688.
- Kamilya, S. , Modak, B. , Biswas, S. 2004. Induced gravity theory from noether symmetry. *General Relativity and Gravitation*, 36:661–672.
- Kucukakca, Y. 2013. Scalar tensor teleparallel dark gravity via noether symmetry. *The European Physical Journal C*, 73:2327.
- Kucukakca, Y. 2014. Teleparallel dark energy model with a fermionic field via noether symmetry. *The European Physical Journal C*, 74:3086.
- Kucukakca, Y. Camci, U. 2012. Noether gauge symmetry for $f(r)$ gravity in palatini formalism. *Astrophys. Space Sci.*, 338:211–216.
- Kumar, S. Singh, C. P. 2007. Anisotropic bianchi type-i models with constant deceleration parameter in general relativity. *Astrophys. Space Sci.*, 312:57–62.
- Leon M. Lederman, C. T. H. 2004. *Symmetry and the Beautiful Universe*. Prometheus Books.

- Nojiri, S. Odintsov, S. D. 2006. Introduction to modified gravity and gravitational alternative for dark energy. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*4,115(2007).
- Nordtvedt, Jr., K. 1970. Post-newtonian metric for a general class of scalar-tensor gravitational theories and observational consequences. *Astrophysical Journal*, 161:1059.
- Olver, P. J. 1986. Applications of Lie Groups to Differential Equations. Graduate Texts in Mathematics 107. Springer US, 2nd ed edition.
- Perlmutter, S. et al. 1999. Measurements of omega and lambda from 42 high redshift supernovae. *Astrophys. J.*, 517:565–586.
- Perrot, P. 1998. A to Z of Thermodynamics, volume 336 of *Supplementary Series*; 27. Oxford University Press, 1 edition.
- Pradhan, A. Kumar, A. 2001. Lrs bianchi i cosmological universe models with varying cosmological term lambda. *Int. J. Mod. Phys.*, D10:291–298.
- Riess, A. G. et al. 1998. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astrophys. J.*, 116:1009–1038.
- Ryden, B. 2003. Introduction to cosmology. Addison-Wesley.
- Sandage, A. 1962. The change of redshift and apparent luminosity of galaxies due to the deceleration of selected expanding universes. *apj*, 136:319.
- Sanyal, A. K. Modak, B. 2001. Is the nöther symmetric approach consistent with the dynamical equation in non-minimal scalar-tensor theories? *Classical and Quantum Gravity*, 18:3767–3774.
- Sawicki, I. Hu, W. 2007. Stability of cosmological solutions in f(r) models of gravity. *prd*, 75:127502.
- Shamir, M. F. Kanwal, F. 2017. Noether symmetry analysis of anisotropic universe in modified gravity. *Eur. Phys. J. C*, 77:286.
- Sharif, M. Arif, S. 2012. Non-vacuum static cylindrically symmetric solution and energy distribution in f(r) gravity. *Astrophysics and Space Science*, 342:237–243.

- Singh, C. P. Srivastava, M. 2017. Minimally coupled scalar field cosmology in anisotropic cosmological model. *Pram. Jour. Phys.*, 88.
- Sotiriou, T. P. Faraoni, V. 2010. $f(r)$ theories of gravity. *Rev. Mod. Phys.*, 82:451–497.
- Spergel, D. N. , Bean, R. , Doré, O. , Nolta, M. R. , Bennett, C. L. , Dunkley, J. , Hinshaw, G. , Jarosik, N. , Komatsu, E. , Page, L. , Peiris, H. V. , Verde, L. , Halpern, M. , Hill, R. S. , Kogut, A. , Limon, M. , Meyer, S. S. , Odegard, N. , Tucker, G. S. , Weiland, J. L. , Wollack, E. , Wright, E. L. 2007. Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Implications for Cosmology. *apjs*, 170:377–408.
- Spergel, D. N. et al. 2003. First year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Determination of cosmological parameters. *ApJS*, 148:175–194.
- Tegmark, M. , Strauss, M. A. , Blanton, M. R. , Abazajian, K. , Dodelson, S. , Sandvik, H. , Wang, X. , Weinberg, D. H. , Zehavi, I. , Bahcall, N. A. , Hoyle, F. , Schlegel, D. , Scoccimarro, R. , Vogeley, M. S. , Berlind, A. , Budavari, T. , Connolly, A. , Eisenstein, D. J. , Finkbeiner, D. , Frieman, J. A. , Gunn, J. E. , Hui, L. , Jain, B. , Johnston, D. , Kent, S. , Lin, H. , Nakajima, R. , Nichol, R. C. , Ostriker, J. P. , Pope, A. , Scranton, R. , Seljak, U. , Sheth, R. K. , Stebbins, A. , Szalay, A. S. , Szapudi, I. , Xu, Y. , Annis, J. , Brinkmann, J. , Burles, S. , Castander, F. J. , Csabai, I. , Loveday, J. , Doi, M. , Fukugita, M. , Gillespie, B. , Hennessy, G. , Hogg, D. W. , Ivezić, Ž. , Knapp, G. R. , Lamb, D. Q. , Lee, B. C. , Lupton, R. H. , McKay, T. A. , Kunszt, P. , Munn, J. A. , O’Connell, L. , Peoples, J. , Pier, J. R. , Richmond, M. , Rockosi, C. , Schneider, D. P. , Stoughton, C. , Tucker, D. L. , vanden Berk, D. E. , Yanny, B. , York, D. G. 2004. Cosmological parameters from SDSS and WMAP. *Phys. Rev. D*, 69:103501.
- Vakili, B. 2008. Noether symmetry in $f(r)$ cosmology. *Phys. Lett.*, B664:16–20.
- Weinberg, S. 1972. Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity. Wiley.
- Will, C. M. 1993. Theory and Experiment in Gravitational Physics.
- Yasunori Fujii, K.-i. M. 2007. The Scalar-Tensor Theory of Gravitation. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1 edition.

Øyvind Grøn, S. H. 2007. Einstein's General Theory of Relativity: With Modern Applications in Cosmology. Springer-Verlag New York, 1 edition.

Zel'Dovich, Y. B. Starobinskiĭ, A. A. 1972. Particle production and vacuum polarization in an anisotropic gravitational field. *Sov. J. Exp. Theor. Phys.*, 34:1159.

ÖZGEÇMİŞ

Işıl BAŞARAN ÖZ

isilbasaran@akdeniz.edu.tr



ÖĞRENİM BİLGİLERİ:

Doktora 2012-2018	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Fizik Bölümü, Antalya
Yüksek lisans 2009-2012	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Fizik Bölümü, Antalya
Lisans 1998-2005	Ege Üniversitesi Fen Fakültesi, Astronomi ve Uzay Bilimleri Bölümü, İzmir

ESERLER:

Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler:

1- Camci, U., Yildirim, A., Basaran Oz, I., 2016, "New exact solutions of Bianchi I, Bianchi III and Kantowski–Sachs spacetimes in scalar-coupled gravity theories via Noether gauge symmetries", *Astroparticle Physics* 76, 29~37.

2- Basaran Oz, I., Kucukakca, Y., Unal, N., 2017, "Anisotropic solution in phantom cosmology via Noether symmetry approach", *Canadian Journal of Physics*,

Doi:10.1139/cjp – 2017 – 0765.

Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitaplarında basılan bildiriler:

1- I. Basaran Oz, U. Camci, A. Yildirim, 2015, "Noether Gauge Symmetries of Bianchi I Space-time in Scalar-Coupled Gravity Theories", Proc. Int. Conf. Relativ. Astrophys. Pages 160 – 169.

Katılman bilimsel etkinlikler:

- 1-Adım Fizik Günleri *VII*, Adnan Menderes Üniversitesi, Aydın, 2018. Sözlü sunum.
- 2-Türk Fizik Derneği 33. Uluslararası Fizik Kongresi, Bodrum, Muğla, Antalya, 2017. Poster sunum.
- 3-14th Regional Conference on Mathematical Physics, Quaid-i-Azam University, 2015. Sözlü sunum.
- 4-International Conference on Relativistic Astrophysics, University of the Punjab, 2015. Sözlü sunum.
- 5-İş Sağlığı ve Güvenliğinde Radyasyondan Korunmanın Yeri ve Önemi, Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü NUBA, 2014. Katılımcı.
- 6-Feza Gürsey Kuantum Alan Kuramı Kış Okulu, Feza Gürsey Enstitüsü, 2014. Katılımcı.
- 7-Erdal İnönü Grup Teori Yaz Okulu, Feza Gürsey Enstitüsü, 2013. Katılımcı.
- 8-Feza Gürsey Summer Schools "Cosmology", Feza Gürsey Enstitüsü, 2013. Sözlü sunum.
- 9-13th Regional Conference on Mathematical Physics, Akdeniz Üniversitesi, TUG, 2010. Organizasyon.
- 10-International Workshop on Observational Cosmology, TUG, 2009. Katılımcı.