T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

LORENTZ UZAYDA TRİGONOMETRİ

Ali TAŞ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZİRAN 2018

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

LORENTZ UZAYDA TRİGONOMETRİ

Ali TAŞ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZİRAN 2018

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LORENTZ UZAYDA TRİGONOMETRİ

Ali TAŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 26../06./2018 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/~~Oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Abdullah Aziz Ergin (Danışman)

Prof. Dr. Abdilkadir Ceylan Çöken

Dr. Öğretim Üyesi Hakan Şimşek

ÖZET

LORENTZ UZAYDA TRİGONOMETRİ

Ali TAŞ

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Abdullah Aziz Ergin
Haziran 2018, 42 sayfa

Bu tezde, L^2 ve L^3'te trigonometri çalışılmıştır. Lorentz uzayda trigonometrik özellikler, geodezik hiperbolik üçgenler ve bunların özellikleri verilmiştir. Ayrıca, spacelike ve timelike vektörler arasındaki açı kavramı incelenmiştir.

Diğer yandan Lorentz uzayda trigonometri ile ilgili, Lorentz uzayda açı kavramı ve dönme matrisi yardımıyla spacelike ve timelike vektörlerin iç çarpımı incelenmiştir. Son olarak, hiperbolik küre üzerindeki geodezik üçgenler ve bunların özellikleri ele alınarak cosinüs, sinüs, ceva, menelaus teoremleri hiperbolik üçgen üzerinde incelenmiştir. Bunların yardımıyla hiperbolik üçgende açıortay teoremi ve ceva teoreminin karşıtı bulunup, açıortay ve kenarortay ile ilgili teoremler verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Hiperbolik küre üzerindeki üçgenler, Lorent uzayında trigonometri, Lorentz geometride açı, Lorentz uzayında hiperbolik üçgen, sinüs, cosinüs, ceva, menalaus teoremleri.

JÜRİ: Prof. Dr. Abdullah Aziz Ergin
Prof. Dr. Abdilkadir Ceylan Çöken
Dr. Öğretim Üyesi Hakan Şimşek

ABSTRACT

TRİGONOMETRY İN LORENTZ SPACE

Ali TAŞ

Master Thesis in MATHEMATICS
Supervisor: Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN
June 2018, 42 pages

In this work, trigonometry is studied in L^2 and L^3. Trigonometric properties, geodesic hyperbolic triangles and their properties has been given in Lorentz space. Also, the concept of angle between spacelike and timelike vectors is studied. On the other hand, the inner product between spacelike and timelike vectors is investigated with Lorentz space trigonometric theorems, Lorentz space angle concept and rotation matrix. Finally, the geodesic triangles on the hyperbolic sphere and their properties are examined and the cosine, sine, ceva, menelaus theorems are studied on the hyperbolic triangle. With the help of these, opposite of the hyperbolic triangular angle bisector theorem and the theorem of Ceva are found, and the theorems about the angle bisector and the median are given.

KEYWORDS: Triangles on hyperbolic sphere, trigonometry in Lorentz space, Lorentz geometry angle, hyperbolic triangle in Lorentz space, sinus, cosinüs, ceva, menalaus theorems.

COMMITTEE: Prof. Dr. Abdullah Aziz Ergin
Prof. Dr. Abdilkadir Ceylan Çöken
Dr. Öğretim Üyesi Hakan Şimşek

ÖNSÖZ

Bu tezde, Lorentz uzayda trigonometri çalışılmıştır. Lorentz uzayda vektörler ve açı kavramı açıklanıp, dönme matrisi yardımı ile vektörler arasındaki açı kavramı incelenmiştir. Hiperbolik küre üzerindeki üçgenler ve özelikleri incelenmiştir ve hiperbolik üçgende açıortay teoremi, ceva teoreminin karşıtı bulunup açıortay ve kenarortay ile teoremler verilmiştir.

Bu tez, Giriş, Kaynak Taraması, Materyal ve Metot, Bulgular ve Tartışma olmak üzere dört ana bölümden oluşmaktadır.

Giriş bölümünde, Lorentz uzayda trigonometriden kısaca bahsedilmiştir.

Kaynak Taraması bölümünde, kullanılan temel kavram ve özelikleri verilmiştir.

Materyal ve Metot bölümünde, Lorentz uzayda trigonometrik teoremler ve Lorentz uzayda açı kavramı ve dönme matrisi yardımı ile spacelike ve timelike vektörler arasındaki iç çarpım özelikleri incelenmiştir. Ayrıca , yönlü hiperbolik açı tanımı verilmiş bu açı yönünün spacelike ve timelike vektörlerle bağlantısı kurulmuştur. Hiperbolik küre üzerindeki üçgenler ve özellikleri kullanıp cosinüs, sinüs, ceva, menelaus teoremleri hiperbolik üçgen üzerinde gösterilmiştir.

Bulgular ve tartışma bölümünde, yukarıda verilen bölümlerdeki bilgiler doğrultusunda hiperbolik üçgende açı ortay teoremi, ceva teoreminin karşıtı bulunmuş ve bunlarla ilgili teoremler ifade edilip ispatlanmıştır.

Bu tez çalışması boyunca bilgisini ve desteğini esirgemeyen sayın danışmanım Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN’e en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca eğitim hayatım boyunca her daim yanımda olan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "LORENTZ UZAYDA TRİGONOMETRİ" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

26/06/2018

Ali TAŞ

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
R	Reel sayılar kümesi
L^2	2 boyutlu Lorentz uzay
L^3	3 boyutlu Lorentz uzay
L^n	n boyutlu Lorentz uzay
H_0^2	Hiperbolik birim küre
$\|.\|$	Bir vektörün uzunluğu (Normu)
$\langle , \rangle$	İç çarpım
sgn	İşaret fonksiyonu
$i \times j$	İki vektörün vektörel çarpımı
$A(u)$	Dönme matrisi

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Yüz yıllar boyunca matematikçiler geometrinin düzlem geometrisi diğer adıyla Öklid geometrisinden oluştuğunu biliyorlardı. Öklid'in Elementler adlı kitabında 5 postulatın olduğunu ve bunlardan 5. Postulat'ın matematikçiler tarafından hep bir karamsar olarak nitelendirilmesi geometri dünyasında çığır açıcı yeni gelişmelere neden olmuştur.
Öklid'in 5. postulatı olan paralellik postulatı "düzlemde bir nokta ve bu noktayı üzerinde bulundurmayan bir doğru verildiği zaman bu noktadan geçen ve verilen bir tek doğruya paralel bir tek doğru geçer". İki bin yıldır matematikçiler ilk dört postulattan beşinci postulatı elde etmeye çalışmışlardır. Proclus(400), Nasirüddin Tusi, John wallis(1616-1703) isimli bilim adamları paralellik postulatı ile uğraşmışlardır.

1854 yılında Alman Matematikçi Bernhard Riemann yeni bir çalışma ortamı keşfetti. Bu alan Riemann geometrisidir diğer bir ismi ile küresel geometri olarak benimsenmiştir. Bir küreyi göz önüne alırsak kürelerin merkezlerinde iki büyük çemberin kesişimini görebiliriz. Bu çemberler sadece iki noktada kesişir. Küresel geometride doğrular iki noktada kesişen geodezikler'den başka birşey değildir. Bu yüzden hiçbir doğru diğerine paralel değildir. Küresel geometride kürenin üzerindede kesişen iki doğru ve birde kürenin uç noktası bize bir üçgen oluşturacaktır ama bu üçgenin iç açıları toplamı 180 dereceden büyüktür. Bu ise yeni bir geometrik şeklin çıktığını ifade etmektedir. Küresel geometride Öklid geometrisinde olduğu gibi üçgen ve özellikleri üzerinde çalışmalar yapılmıştır.

"Bir doğruya dışındaki bir noktadan birden fazla paralel çizilebilir" şeklindeki paralellik versiyonu kullanılarak elde edilen geometridir. Hiperbolik geometrinin bu özelliği alışılmadık neticeler getirmiştir. Hiperbolik geometride paralellik kavramı nedeni ile pek çok model çalışılmıştır. Bunlar Üst yarı uzay modeli, Disk modeli, Yarı küre modeli, Klein modeli, Hiperboloidal model şeklinde verilir. Lorentz uzayda Hiperbolik kürede çalışmalar yapılmış olup bu küre üstündeki üçgen ve özelikleri çalışılmaya devam edilmektedir. Lorentz uzayda trigonometri 1984 yılında K.Nomizu tarafından çalışılmıştır ve bu konu üzerinde bilimsel çalışmalar geliştirilmiştir.

Bu tezde Lorentz uzayda trigonometri ve hiperbolik küre çalışılıp, Lorentz uzay tanımı ve Lorentz uzayda vektörlerin spacelike, timelike ve null olarak sınıflandırılması Lorentz iç çarpımı ile verilmiştir. Hiperbolik çember kullanılarak dönme matrisi verilip dönme matrisi yardımı ile spacelike, timelike vektörler arasında yönlendirilmiş hiperbolik açı kavramı incelenmiştir. $A(u).\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}$ denklemi $\overrightarrow{\mathbf{x}}$'den $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörüne yönlendirilmiş $u \in R$ açısını $A(u)$ ise dönme matrisini belirtmektedir. Spacelike ve timelike vektörler arasındaki yönlendirilmiş açıya göre iç çarpım özellikleri incelenmiştir. Hiperbolik küre üzerinde geodezik üçgenler bunların trigonometrik özelikleri, cosinüs, sinüs, menalaus, ceva teoremleri incelenip, bu teoremler yardımı ile hiperbolik geodezik üçgende açıortay teoremi, ceva teoreminin karşıtı bulunmuş ve bunlara bağlı teoremler verilmiştir.

2. KAYNAK TARAMASI

2.1. Lorentz Uzayda Trigonometri

R^n n-boyutlu vektör uzayı olsun.

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, ..., x_n) \text{ ve } \overrightarrow{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, ..., y_n).$$

vektörleri için,

$$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... - x_n y_n$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona Lorentz anlamında iç çarpım denir. R^n bu iç çarpımla beraber n- boyutlu Lorentz uzay olarak tanımlanır ve L^n ile gösterilir(Nesovic vd. 1995).

Burada, $\langle .,. \rangle$ indefinite metrik olduğundan, $\overrightarrow{\mathbf{x}} \in L^n$ vektörü şu üç özelliğe sahiptir.

$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle > 0$ veya $\overrightarrow{\mathbf{x}} = 0$ ise $\overrightarrow{\mathbf{x}}$' spacelike

$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle < 0$ ise $\overrightarrow{\mathbf{x}}$'e timelike

$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle = 0$ ve $\overrightarrow{\mathbf{x}} \neq 0$ ise $\overrightarrow{\mathbf{x}}$'e null vektör denir(Birman ve Nomizu 1984).

Bir vektörün normu;

$$\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\| = \sqrt{\left|\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle\right|}$$

ve L^n uzayında iki vektör $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}$ ortogonal ise $\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle = 0$ dır (Nesovic vd. 1995).

$\overrightarrow{\mathbf{x}}$, L^2 Lorentz uzayında bir timelike vektör ve $\overrightarrow{\mathbf{e}} = (0, 1) \in L^2$ olsun. Eğer,

$$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{e}} \right\rangle < 0 \text{ ise } \overrightarrow{\mathbf{x}}\text{'e future-pointing}$$
$$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{e}} \right\rangle > 0 \text{ ise } \overrightarrow{\mathbf{x}}\text{'e past-pointing}$$

vektör denir (Birman ve Nomizu1984). Eğer, $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ timelike vektör ise,

$$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle = \langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle = x_1 x_1 - x_2 x_2 = x_1^2 - x_2^2 < 0$$

$$x_1^2 < x_2^2 \Longrightarrow |x_1| < |x_2|$$

Future pointing vektör ise $\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{e}} \right\rangle < 0$,

$$\langle (x_1, x_2), (0, 1) \rangle = -x_2 < 0 \text{ yani } x_2 > 0$$

bulunur. Bu iki ifadeden $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$ timelike ve Future pointing vektör ise $x_2 > 0$ ve $|x_1| < |x_2|$ den $|x_1| < x_2$ elde edilir.

Yukarıda verilenlerden, L^2 vektör uzayı, $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (y_1, y_2)$ olmak üzere Lorentz iç çarpım

$$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

şeklindedir(Birman ve Nomizu 1984).

$\theta \in R$ olmak üzere L^2'de dönme matrisi,

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{bmatrix}$$

biçimindedir(Birman ve Nomizu 1984).

3. MATERYAL VE METOT

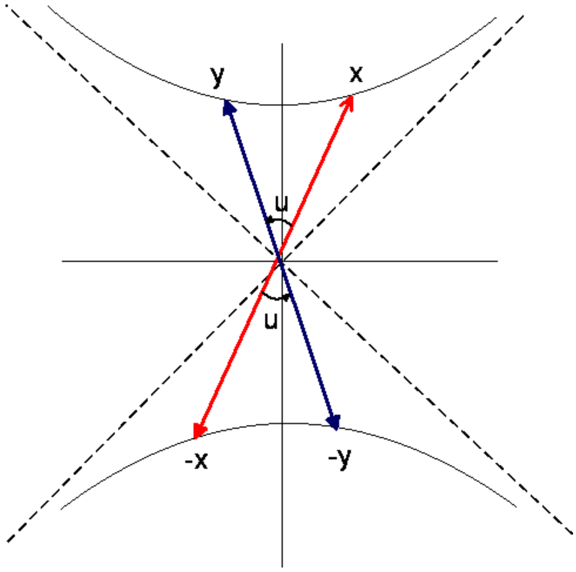
3.1. Hiperbolik Açı

Tanım 3.1. *$\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$, L^2 uzayında Future pointing (veya Past pointing) timelike iki birim vektör olsun.*

$$\begin{bmatrix} \cosh(u) & \sinh(u) \\ \sinh(u) & \cosh(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

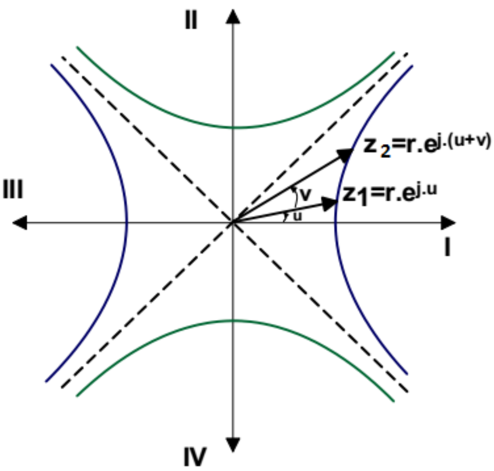
eşitliğini sağlayacak şekilde $u \in R$ sayısına $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ den $\overrightarrow{\mathbf{y}}$'ye yönlendirilmiş hiperbolik açı denir ve $u = (\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}})$ biçiminde gösterilir (Uğurlu ve Çalışkan 2012).

Tanım 3.2. *$\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ sırası ile Future pointing ve Past pointing timelike iki birim vektör olsun. $-\mathbf{y}$ Future pointing bir vektördür. O halde tanım 3.1 gereği $u = (-\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}})$ ise $(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = -u$ dur. $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ile $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörü arasındaki açıda $|u|$ ile gösterilir (Uğurlu ve Çalışkan 2012).*



Şekil 3.1: Timelike vektörler

3.2. Hiperbolik Çemberde Dönme Matrisinin Bulunması



Şekil 3.2: Hiperbolik Çember

Hiperbolik sayılar kümesi için $j \neq \pm 1$ özelliğine sahip herhangi bir j sayısını alalım. j sanal birim x ve y reel sayılar olmak üzere standart taban $\{1, j\}$ için hiperbolik sayılar kümesi,

$$H = \left\{z = x + jy \mid x,\ y \in R,\ j^2 = 1\right\}$$

olarak tanımlanır(Çelik ve Güngör 2014). $z = (x_1, y_1), w = (x_2, y_2) \in H$ için hiperbolik iç çarpım,

$$\langle z, w\rangle = \text{Re}(z\overline{w}) = \text{Re}(\overline{z}w) = x_1x_2 - y_1y_2$$

$\overline{z} = x - jy$'ye $z = x + jy$'nin eşleniği denir. $y = {}^{+}_{-}x$ asimptotları ile birbirinden ayrılan I,II,III ve IV bölgeleri hiperbolik dördüller olarak adlandırılır. $z = x + jy$ hiperbolik sayısı I ve III bölgesinde ise,

$$z = re^{jv} = {}^{+}_{-}(r\cosh v + j\sinh v)$$

II ve IV bölgesinde ise,

$$z = rje^{jv} = {}^{+}_{-}r(\sinh v + j\cosh v)$$

biçiminde yazılabilir(Çelik ve Güngör 2014). e^{jv} tarafından tanımlanan dönme matrisi,

$$\begin{bmatrix} \cosh(v) & \sinh(v) \\ \sinh(v) & \cosh(v) \end{bmatrix}$$

dir(Birman ve Nomizu 1984).

İspat

$$z_1 = x_1 + jy_1 = re^{ju} = r\cosh u + jr\sinh u$$

eşitliğinden,

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cosh u \\ y_1 &= r\sinh u \end{aligned}$$

elde edilir.

$$z_2 = x_2 + jy_2 = re^{j(u+v)} = r\cosh(u+v) + jr\sinh(u+v)$$

buradan,

$$\begin{aligned} x_2 &= r\cosh(u+v) \\ y_2 &= r\sinh(u+v) \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikler açılırsa,

$$
\begin{aligned}
x_2 &= r\cosh(u+v) = r\cosh u \cosh v + r\sinh u \sinh v \\
&= x_1 \cosh v + y_1 \sinh v \\
y_2 &= r\sinh(u+v) = r\cosh u . \sinh v + r\sinh u \cosh v \\
&= x_1 \sinh v + y_1 \cosh v
\end{aligned}
$$

bu eşitlikten,

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_1 \cosh v + y_1 \sinh v \\
y_2 &= x_1 \sinh v + y_1 \cosh v
\end{aligned}
$$

buradan,

$$
\begin{bmatrix} \cosh(v) & \sinh(v) \\ \sinh(v) & \cosh(v) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = A(v)\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z_2}
$$

□

dir.

Teorem 3.3. $\overrightarrow{\mathbf{x}} \in L^2$ *bir spacelike vektör, yani* $\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle > 0$ *olsun.* $A(u)\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *de bir spacelike vektördür (Uğurlu ve Çalışkan 2012).*

İspat $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$ olmak üzere

$$
A(u)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \cosh(u) & \sinh(u) \\ \sinh(u) & \cosh(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1\cosh(u) + x_2\sinh(u) \\ x_1\sinh(u) + x_2\cosh(u) \end{bmatrix}
$$

dir.

$$
\begin{aligned}
\left\langle A(u)\overrightarrow{\mathbf{x}}, A(u)\overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle &= x_1^2(\cosh^2(u) - \sinh^2(u)) - x_2^2(\cosh^2(u) - \sinh^2(u)) \\
&= x_1^2 - x_2^2 = \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle > 0
\end{aligned}
$$

yani $A(u)\overrightarrow{\mathbf{x}}$ spacelike'dir. $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ timelike olsa yine aynı ispat yapılır(Uğurlu ve Çalışkan 2012). □

Teorem 3.4. $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *Future pointing timelike birim vektör olmak üzere;*

$$
(\overrightarrow{\mathbf{x}}, -\overrightarrow{\mathbf{x}}) = 0
$$

dır (Birman ve Nomizu 1984).

İspat $-A(\theta)\overrightarrow{\mathbf{x}} = -\overrightarrow{\mathbf{x}}$ olacak şekilde $\theta \in R$ bulacağız.

$$\begin{bmatrix} -\cosh(\theta) & -\sinh(\theta) \\ -\sinh(\theta) & -\cosh(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

Buradan;

$$\begin{aligned} -x_1\cosh(\theta) - x_2\sinh(\theta) &= -x_1 \\ -x_1\sinh(\theta) - x_2\cosh(\theta) &= -x_2 \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\cosh(\theta) = 1 \text{ ve } \sinh(\theta) = 0$$

dır. Buradan da,

$$\theta = 0$$

elde edilir (Uğurlu ve Çalışkan 2012). □

Teorem 3.5. $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \in L^2$ *Future pointing timelike birim vektörler olmak üzere;*

$$(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) + (\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}) = (\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{z}})$$

dir (Birman ve Nomizu 1984).

İspat $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}$ Future pointing birim vektörler ve $(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = \theta_1, (\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}) = \theta_2$ olsun. $A(\theta_1)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}$'den,

$$A(\theta_1)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \cosh(\theta_1) & \sinh(\theta_1) \\ \sinh(\theta_1) & \cosh(\theta_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A(\theta_1)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1\cosh(\theta_1) + x_2\sinh(\theta_1) \\ x_1\sinh(\theta_1) + x_2\cosh(\theta_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

$A(\theta_1)\overrightarrow{\mathbf{y}} = \overrightarrow{\mathbf{z}}$'den,

$$A(\theta_2)\overrightarrow{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \cosh(\theta_2) & \sinh(\theta_2) \\ \sinh(\theta_2) & \cosh(\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$A(\theta_2)\overrightarrow{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} y_1\cosh(\theta_2) + y_2\sinh(\theta_2) \\ y_1\sinh(\theta_2) + y_2\cosh(\theta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

olacak şekilde $\theta_1, \theta_2 \in R$ sayıları vardır.(3.1) denkleminden elde edilen

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \cosh(\theta_1) + x_2 \sinh(\theta_1) \\ y_2 &= x_1 \sinh(\theta_1) + x_2 \cosh(\theta_1) \end{aligned}$$

eşitlikleri (3.2) denkleminde yazılırsa;

$$\begin{aligned} z_1 &= (x_1 \cosh(\theta_1) + x_2 \sinh(\theta_1)) \cosh(\theta_2) + (x_1 \sinh(\theta_1) + x_2 \cosh(\theta_1)) \sinh(\theta_2) \\ &= x_1 \cosh(\theta_1 + \theta_2) + x_2 \sinh(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= (x_1 \sinh(\theta_1) + x_2 \cosh(\theta_1)) \sinh(\theta_2) + (x_1 \sinh(\theta_1) + x_2 \cosh(\theta_1)) \cosh(\theta_2) \\ &= x_1 \sinh(\theta_1 + \theta_2) + x_2 \cosh(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

buradan da

$$A(\theta_1 + \theta_2)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{z}}$$

elde edilir.O halde

$$(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}) = \theta_1 + \theta_2$$

dir. $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ Future pointing ve $\overrightarrow{z}$ Past pointing timelike birim vektörler ya da $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ Future pointing ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ Past pointing timelike birim vektörler için benzer şekilde ispatı yapılır(Uğurlu ve Çalışkan 2012). □

Teorem 3.6. $\overrightarrow{\mathbf{x}} \in L^2$ *Future pointing timelike birim vektör olmak üzere;*

$$(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}) = 0$$

dır (Birman ve Nomizu 1984).

İspat $A(\theta)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{x}}$olacak şekilde $\theta \in R$ bulunacak.

$$\begin{bmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

buradan

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 \cosh(\theta) + x_2 \sinh(\theta) \\ x_2 &= x_1 \sinh(\theta) + x_2 \cosh(\theta) \end{aligned}$$

eşitlikleri ancak $\theta = 0$ iken sağlanır (Uğurlu ve Çalışkan 2012). □

Teorem 3.7. $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ *Future pointing timelike iki birim vektör olmak üzere;*

$$(\overrightarrow{\mathbf{x}}, -\overrightarrow{\mathbf{y}}) = (\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}})$$

dir (Birman ve Nomizu 1984).

İspat $(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = \theta$ olsun. Tanım gereği, $A(\theta)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}$

$$\begin{bmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Buradan,

$$y_1 = x_1 \cosh(\theta) + x_2 \sinh(\theta) \tag{3.3}$$

$$y_2 = x_1 \sinh(\theta) + x_2 \cosh(\theta) \tag{3.4}$$

(3.3) ve (3.4) denklemleri sırası ile $\cosh(\theta)$ ve $\sinh(\theta)$ ile çarpılırsa,

$$y_1 \cosh(\theta) = x_1 \cosh^2(\theta) + x_2 \sinh(\theta) \cosh(\theta) \tag{3.5}$$

$$y_2 . \sinh(\theta) = x_1 \sinh^2(\theta) + x_2 \cosh(\theta) \sinh(\theta) \tag{3.6}$$

(3.5) ve (3.6) denklemleri birbirinden çıkarılırsa,

$$y_1 \cosh(\theta) - y_2 \sinh(\theta) = x_1 \tag{3.7}$$

denklemini elde edilir. Aynı şekilde (3.3) ve (3.4) denklemlerini sırası ile $\sinh(\theta)$ ve $\cosh(\theta)$ ile çarpılırsa,

$$y_1 \sinh(\theta) = x_1 \cosh(\theta) \sinh(\theta) + x_2 \sinh^2(\theta) \tag{3.8}$$

$$y_2 \cosh(\theta) = x_1 \sinh(\theta) \cosh(\theta) + x_2 \cosh^2(\theta) \tag{3.9}$$

denklemlerini elde ederiz. Daha sonra (3.8) ve (3.9) birbirinden çıkarılırsa

$$-y_1 \sinh(\theta) + y_2 \cosh(\theta) = x_2 \tag{3.10}$$

denklemi elde edilir. Buradan, (3.7) ve (3.10) denklemleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} y_1 \cosh(\theta) - y_2 \sinh(\theta) &= x_1 \\ y_1 \sinh(\theta) - y_2 \cosh(\theta) &= x_2 \end{aligned} \tag{3.11}$$

elde edilir. Şimdi, $(\overrightarrow{\mathbf{x}}, -\overrightarrow{\mathbf{y}}) = \alpha$ olsun. Tanımdan,

$$\begin{bmatrix} \cosh(\alpha) & \sinh(\alpha) \\ \sinh(\alpha) & \cosh(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_1 \\ -y_2 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde $\alpha \in R$ vardır. Buradan,

$$-y_1 = x_1 \cosh(\alpha) + x_2 \sinh(\alpha)$$

$$-y_2 = x_1 \sinh(\alpha) + x_2 \cosh(\alpha) \tag{3.12}$$

denklemlerinde (3.11)'den elde edilenler yerine yazılarak;

$$\begin{aligned} -y_1 &= (y_1 \cosh(\theta) - y_2 \sinh(\theta)) \cosh(\alpha) + (y_1 \sinh(\theta) - y_2 \cosh(\theta)) \sinh(\alpha) \\ -y_2 &= (y_1 \cosh(\theta) - y_2 \sinh(\theta)) \sinh(\alpha) + (y_1 \sinh(\theta) - y_2 \cosh(\theta)) \cosh(\alpha) \end{aligned}$$

elde edilir,denklemler düzenlenirse;

$$\begin{aligned} -y_1 &= y_1 . \cosh(\theta - \alpha) + y_2 . \sinh(\alpha - \theta) \\ -y_2 &= y_1 . \sinh(\alpha - \theta) + y_2 . \cosh(\theta - \alpha) \end{aligned}$$

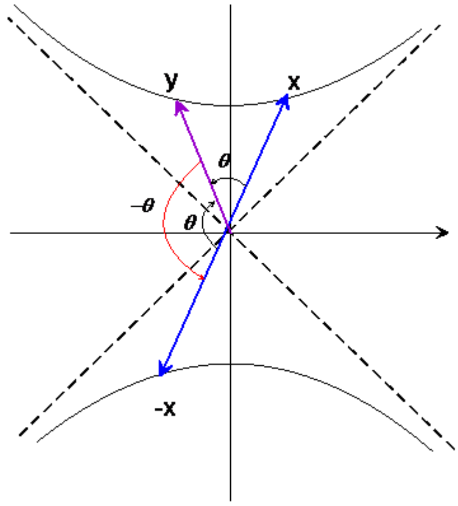
denklemini elde edilir. Bu ise matris formda,

$$\begin{bmatrix} \cosh(\theta - \alpha) & \sinh(\alpha - \theta) \\ \sinh(\alpha - \theta) & \cosh(\theta - \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_1 \\ -y_2 \end{bmatrix}$$

yazılır. $(\overrightarrow{\mathbf{y}}, -\overrightarrow{\mathbf{y}}) = 0$ olduğundan $\alpha - \theta = 0$ yani $\alpha = \theta$

$$(\overrightarrow{\mathbf{x}}, -\overrightarrow{\mathbf{y}}) = (\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}})$$

dir (Uğurlu ve Çalışkan 2012).



Şekil 3.3: Timelike vektörler

□

3.3. Lorentz Uzayda Trigonometri Teoremleri

Teorem 3.8. $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2)$ *ve* $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2)$ *vektörü* L^2 *de Future pointing timelike vektörler olmak üzere;*

1. $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle \leq 0$ (eşitlik $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$ için geçerlidir.)

2. $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$ Future pointing timelike vektördür.

3. $-\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle \geq \|\overrightarrow{x}\| \, \|\overrightarrow{y}\|$dır. Eşitlik durumu $\overrightarrow{y} = c\overrightarrow{x}$ $(c \in R$ ve $c > 0)$ için vardır.

4. $\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| \geq \|\overrightarrow{x}\| + \|\overrightarrow{y}\|$dır. Eşitlik durumu $\overrightarrow{y} = c\overrightarrow{x}(c \in R$ ve $c > 0)$ için vardır (Birman ve Nomizu 1984).

İspat 1. $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2)$ ve $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2)$ Future pointing timelike vektörler olduğundan

$$|x_1| < x_2$$
$$|y_1| < y_2$$

olduğundan iki eşitsizlik çarpılırsa

$$|x_1 y_1| < x_2 y_2$$

ve

$$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

dir.

$$|x_1 y_1| - x_2 y_2 < 0$$

olduğundan $\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle \leq 0$ eşitlik durumu $\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}} = 0$ olduğu durumdan açıktır (Ergin 1989).

2.

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

ve $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörleri Future pointing olduklarından,

$$|x_1| < x_2$$
$$|y_1| < y_2$$

eşitsizlikleri toplanırsa,

$$|x_1| + |y_1| < x_2 + y_2$$

dir.

$$|x_1 + y_1| < |x_1| + |y_1|$$

eşitsizliğinden

$$|x_1 + x_2| < |x_1| + |y_1| < x_2 + y_2$$

buradan

$$|x_1 + x_2| < x_2 + y_2$$

olur. Buradan $\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}$'nin Future pointing vektör olduğu görülür. Şimdi $\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}$'nin timelike olduğunu gösterelim: $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ timelike ise

$$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle < 0 \left\langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \right\rangle = x_1 x_1 - x_2 x_2 = x_1^2 - x_2^2 < 0$$

dır.

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle &= \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle \\ &= \underbrace{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle}_{<0} + 2\underbrace{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle}_{<0} + \underbrace{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle}_{<0} < 0 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle < 0$$

dır yani $\overrightarrow{\mathbf{x}}+\overrightarrow{\mathbf{y}}$ timelikedir. O halde $\overrightarrow{\mathbf{x}}+\overrightarrow{\mathbf{y}}$ timelike Future pointing vektördür (Ergin 1989).

3. $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ timelike ve Future pointing vektörler ise $c\in R$, $c>0$ için $\overrightarrow{\mathbf{y}}=c\overrightarrow{\mathbf{x}}$ise

$$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}},\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\rangle =\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}},c\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\rangle =c\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}},\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\rangle =-c\left\Vert \overrightarrow{\mathbf{x}}\right\Vert \left\Vert \overrightarrow{\mathbf{x}}\right\Vert$$

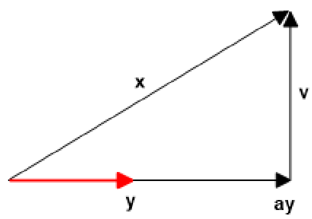
olduğundan Cauchy schwartz eşitsizliğinin eşitlik durumu sağlanır. Şimdi

$$-\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}},\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\rangle \geq\left\Vert \overrightarrow{\mathbf{x}}\right\Vert \left\Vert \overrightarrow{\mathbf{y}}\right\Vert$$

olduğunu gösterelim.$\overrightarrow{\mathbf{y}}\perp\overrightarrow{\mathbf{v}}$ ve

$$\overrightarrow{\mathbf{x}}=a\overrightarrow{\mathbf{y}}+\overrightarrow{\mathbf{v}}$$

olsun.



Şekil 3.4: Dik üçgen

Buradaki diklik Lorentz anlamındadır.

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}},\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\rangle &= \left\langle a\overrightarrow{\mathbf{y}}+\overrightarrow{\mathbf{v}},a\overrightarrow{\mathbf{y}}+\overrightarrow{\mathbf{v}}\right\rangle && (3.13)\\
&= a^{2}\left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}},\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\rangle +2a\left\langle \overrightarrow{\mathbf{v}},\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\rangle +\left\langle \overrightarrow{\mathbf{v}},\overrightarrow{\mathbf{v}}\right\rangle && (3.14)\\
&= a^{2}\left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}},\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\rangle +\left\langle \overrightarrow{\mathbf{v}},\overrightarrow{\mathbf{v}}\right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle^2 &= (\langle a\overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle)^2 & (3.15)\\
&= (a \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle)^2 & (3.16)\\
&= a^2 \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle^2 + 2a \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle^2 \\
&= a^2 \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle^2
\end{aligned}$$

(3.13) ve (3.15)'den

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle^2 &= a^2 \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle^2 = \underline{a^2 \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle} \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle \\
&= \underline{(\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle - \left\langle \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\rangle)} \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ vektörü iki timelike vektörün toplamı olduğu için kendiside timelike ve Future pointingdir.

$$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle < 0$$

dır.

$$\underbrace{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle}_{<0} - \underbrace{\left\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x} \right\rangle}_{<0} \geq \underbrace{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle}_{<0}$$

olur. O halde

$$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle^2 = (\underbrace{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle - \left\langle \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \right\rangle)}_{\geq \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle} \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle \geq \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle$$

yani

$$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle^2 \geq \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da

$$\left| \underbrace{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle}_{<0} \right| \geq \sqrt{\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\|^2 \left\| \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\|^2} = \left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\| \left\| \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\| \Longrightarrow - \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle \geq \left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\| \left\| \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\|$$

Cauchy schwartz eşitsizliği elde edilir (Ergin 1989).

4.

$$\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\| + \left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\| \leq \left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\|$$

olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}
(\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\|)^2 &= -\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle \\
&= -\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle - 2\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle - \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle = \left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\|^2 + 2\left| \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle \right|
\end{aligned}$$

(Cauchy Schwartz eşitsizliğinin $|\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle| \geq \|\overrightarrow{\mathbf{x}}\| \, \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|$ olduğunu biliyoruz).

$(\|\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}\|)^2 = \|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|^2 + 2\,|\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle| \geq \|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|^2 + 2\,\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\| \, \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\| = (\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\| + \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|)^2$

Buradan

$$(\|\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}\|)^2 \geq (\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\| + \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|)^2$$

elde edilir. Bu ise

$$\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\| + \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\| \leq \|\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}\|$$

dır (Ergin 1989). □

3.4. Lorentz Düzlem

G, L^2'nin uygun lorentz grubu olsun, bu grup Lorentz iç çarpımını ve zaman yönelimini de koruyan R^2'nin tüm yönelimli dönüşümlerinden oluşur. G, $A(u)$' dan gelen tüm matrislerden oluşur.

$$A(u) = \begin{bmatrix} \cosh(u) & \sinh(u) \\ \sinh(u) & \cosh(u) \end{bmatrix}$$

burada $u \in R$'dir. L^2'de birim timelike vektörleri için, hiperbolik yönlü açı $(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}) = u$, $\overrightarrow{\mathbf{x}}$'den $\overrightarrow{\mathbf{y}}$'ye doğru yönlendirilmiş olup $u \in R$dir. $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$'nin her ikisi future pointing yada past pointing olduğu durumlarda, $A(u)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}$ $(a.1)$

$\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ saat yönünde dönmeye sahip olarak tanımlanmıştır (Birman ve Nomizu 1984). İkinci durum olarak Hiperbolik yönlü açı birim future-pointing timelike vektör $\overrightarrow{\mathbf{x}}$' den birim past-pointing timelike vektör olan $-\overrightarrow{\mathbf{y}}$ ye olarak tanımlanmıştır ve $u \in R, -A(u)\overrightarrow{\mathbf{x}} = -\overrightarrow{\mathbf{y}}$ $(a.2)$ (Birman ve Nomizu 1984). Ayrıca, D'nin, R^2'nin ilk diagonal $\{(x,x) \mid x \in R\}$'deki öklid yansıması D matrisi,

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

O zaman biz $DA(u) = A(u)D$ eşitliğine sahibiz. $B(u) = A(u)D$ Böylece $B(u)$ matrisi

$$B(u) = \begin{bmatrix} \sinh(u) & \cosh(u) \\ \cosh(u) & \sinh(u) \end{bmatrix}$$

,$u \in R$. Eğer $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (y_1, y_2)$ ve $sgn\ x_1 = sgn\ y_1$ olan iki birim spacelike vektörler ise $A(u)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}$ $(b.1)$ (Nesovic vd. 1995). Eğer $sgn\ x_1 \neq sgn\ y_1$ ise $u \in R$ hiperbolik açı yönü $\overrightarrow{\mathbf{x}}$'den$\overrightarrow{\mathbf{y}}$'ye eğer $-A(u)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}$ $(b.2)$ (Nesovic vd. 1995).

Bir birim spacelike vektör $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$ ile bir birim timelike vektör $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (y_1, y_2)$ için $sgnx_1 = sgny_2$ ve $u \in R$ hiperbolik yönlü açısı $\overrightarrow{\mathbf{x}}$'den $\overrightarrow{\mathbf{y}}$'ye ise $B(u)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}(c.2)$ dir (Nesovic vd. 1995). Diğer taraftan eğer $sgnx_1 \neq sgny_2$ ve $u \in R$ hiperbolik yönlü açı $\overrightarrow{\mathbf{x}}$'den, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$'ye doğru ise,$-B(u)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}(c.2)$ (Nesovic vd. 1995). Birim vektörler olan $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ arasındaki u açısı için yukarıdaki tanımlar aşağıdaki gibi yazılır.

$$
\begin{aligned}
(a.1) \qquad \cosh(u) &= -\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle, \sinh(u) = -\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, D\overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle \\
(a.2) \qquad \cosh(u) &= \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle, \sinh(u) = \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, D\overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle \\
(b.1) \qquad \cosh(u) &= \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle, \sinh(u) = \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, D\overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle \\
(b.2) \qquad \cosh(u) &= -\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle, \sinh(u) = -\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, D\overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle \\
(c.1) \qquad \cosh(u) &= -\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, D\overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle, \sinh(u) = \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle \\
(c.2) \qquad \cosh(u) &= -\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, D\overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle, \sinh(u) = -\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle
\end{aligned}
$$

(Nesovic vd. 1995). Şimdi bu eşitliklerin bulunuşu aşağıdaki teoremlerle ispat edilir.

Teorem 3.9. *$\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ ikiside birim future-pointing timelike vektör veya (Past-pointing) hiperbolik açı yönü $\overrightarrow{\mathbf{x}}$'den $\overrightarrow{\mathbf{y}}$'ye doğru olmak üzere ikisi arasındaki açı $u \in R$,$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ simetrik matris için,*

$$
\begin{aligned}
a)\cosh(u) &= -\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle \\
b)\sinh(u) &= -\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, D\overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle
\end{aligned}
$$

dır.

İspat a)$A(u)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}$ eşitliğinden,

$$
\begin{bmatrix} \cosh(u) & \sinh(u) \\ \sinh(u) & \cosh(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}
$$

buradan ise,

$$
\begin{aligned}
x_1\cosh(u) + x_2\sinh(u) &= y_1 \qquad (3.17) \\
x_1\sinh(u) + x_2\cosh(u) &= y_2
\end{aligned}
$$

dir.3.17'den

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle &= \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle \\
&= \langle (x_1, x_2), (x_1 \cosh(u) + x_2 \sinh(u), x_1 \sinh(u) + x_2 \cosh(u)) \rangle \\
&= x_1^2 \cosh(u) + x_1 x_2 \sinh(u) - x_1 x_2 \sinh(u) - x_2^2 \cosh(u) \\
&= (x_1^2 - x_2^2) \cosh(u) \\
&= -\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\| . \cosh(u) \; (\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle < 0) = -\cosh(u) \;\; (\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\| = 1, \overrightarrow{\mathbf{x}} \text{ birim vektör})
\end{aligned}$$

b)$A(u)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}$ bu eşitliği $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ simetri matrisi ile soldan çarparsak

$$DA(u)\overrightarrow{\mathbf{x}} = D\overrightarrow{\mathbf{y}}$$

buradan

$$\begin{bmatrix} \sinh(u) & \cosh(u) \\ \cosh(u) & \sinh(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned}
x_1 \sinh(u) + x_2 \cosh(u) &= y_2 \\
x_1 \cosh(u) + x_2 \sinh(u) &= y_1
\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, D\overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle &= \langle (x_1, x_2), (y_2, y_1) \rangle \\
&= \langle (x_1, x_2), (x_1 \sinh(u) + x_2 \cosh(u), x_1 \cosh(u) + x_2 \sinh(u)) \rangle \\
&= x_1^2 \sinh(u) + x_1 x_2 \cosh(u) - x_1 x_2 \cosh(u) - x_2^2 \sinh(u) \\
&= (x_1^2 - x_2^2) \sinh(u) \\
&= -\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\| \sinh(u) = -\sinh(u) \;\; (\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\| = 1, \overrightarrow{\mathbf{x}} \text{ birim vektör}) \\
\Longrightarrow & \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, D\overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle = -\sinh(u)
\end{aligned}$$

□

Teorem 3.10. *Hiperbolik açı yönü birim future pointing timelike vektör $\overrightarrow{\mathbf{x}}$'den birim past pointing timelike vektör olan $-\overrightarrow{\mathbf{y}}$'ye doğru olup açı $-u$ olmak üzere*

$$\begin{aligned}
a)\; \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, -\overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle &= \cosh(u) \\
b)\; \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, D\overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle &= \sinh(u)
\end{aligned}$$

dır.

İspat a)

$$-A(-u)\overrightarrow{\mathbf{x}} = -\overrightarrow{\mathbf{y}}$$

eşitliği kullanılırsa,

$$-\begin{bmatrix} \cosh(-u) & \sinh(-u) \\ \sinh(-u) & \cosh(-u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_1 \\ -y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\cosh(u) & \sinh(u) \\ \sinh(u) & -\cosh(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_1 \\ -y_2 \end{bmatrix}$$

buradan ise,

$$\begin{aligned} -x_1\cosh(u) + x_2\sinh(u) &= -y_1 \\ x_1\sinh(u) - x_2\cosh(u) &= -y_2 \end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, -\overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle &= \langle (x_1, x_2), (-y_1, -y_2) \rangle \\ &= \langle (x_1, x_2), (-x_1\cosh(u) + x_2.\sinh(u), x_1\sinh(u) - x_2\cosh(u)) \rangle \\ &= -x_1^2\cosh(u) - x_1x_2\sinh(u) + x_1x_2\sinh(u) - x_2^2\cosh(u) = (x_2^2 - x_1^2)\cosh(u) \\ &= \left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\|^2 \cosh(u) = \cosh(u) \\ \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, -\overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle &= \cosh(u) \end{aligned}$$

elde edilir.

b)

$$\begin{bmatrix} -\cosh(u) & \sinh(u) \\ \sinh(u) & -\cosh(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_1 \\ -y_2 \end{bmatrix}$$

eşitliği $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi ile soldan çarpılırsa,

$$\begin{bmatrix} \sinh(u) & -\cosh(u) \\ -\cosh(u) & \sinh(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_2 \\ -y_1 \end{bmatrix} = D(-\overrightarrow{\mathbf{y}}) \tag{3.18}$$

3.18'den,

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, D\overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle &= \langle (x_1, x_2), (y_2, y_1) \rangle \\
&= -\langle (x_1, x_2), (x_1 \sinh(u) - x_2 \cosh(u), -x_1 \cosh(u) + x_2 \sinh(u)) \rangle \\
&= -x_1^2 \sinh(u) + x_1 x_2 \cosh(u) - x_1 x_2 \cosh(u) + x_2^2 \sinh(u) \\
&= (x_2^2 - x_1^2) \sinh(u) = \left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\|^2 \sinh(u) = \sinh(u) \\
\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, D\overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle &= \sinh(u)
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 3.11. $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (y_1, y_2)$ *iki birim spacelike vektör* $sgnx_1 = sgny_1$ *ve* $u \in R$ *hiperbolik açı yönü* $\overrightarrow{\mathbf{x}}$*'den* $\overrightarrow{\mathbf{y}}$*'ye olmak üzere*

$$\begin{aligned}
a)\ \cosh(u) &= \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle \\
b)\ \sinh(u) &= \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, D\overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle
\end{aligned}$$

dır.

İspat a)$A(u)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}$ eşitliğini kullanılırsa,

$$\begin{bmatrix} \cosh(u) & \sinh(u) \\ \sinh(u) & \cosh(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

buradan,

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle &= \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \langle (x_1, x_2), (x_1 \cosh(u) + x_2 \sinh(u), x_1 \sinh(u) + x_2 \cosh(u)) \rangle \\
&= x_1^2 \cosh(u) + x_1 x_2 \sinh(u) - x_1 x_2 \sinh(u) - x_2^2 \cosh(u) = (x_1^2 - x_2^2) \cosh(u)
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathbf{x}}$ spacelike olduğundan, $\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle > 0$ olup,

$$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle = (x_1^2 - x_2^2) \cosh(u) = \left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\|^2 \cosh(u) = \cosh(u)$$

olur.

b)$A(u)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}$ bu eşitliği $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ simetrik matrisi ile soldan çarpılırsa

$$DA(u)\overrightarrow{\mathbf{x}} = D\overrightarrow{\mathbf{y}}$$

olur.Bu eşitliğin matris formu,

$$\begin{bmatrix} \sinh(u) & \cosh(u) \\ \cosh(u) & \sinh(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned} x_1 \sinh(u) + x_2 \cosh(u) &= y_2 \\ x_1 \cosh(u) + x_2 \sinh(u) &= y_1 \end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, D\overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle &= \langle (x_1, x_2), (y_2, y_1) \rangle = \\ & \langle (x_1, x_2), (x_1 \sinh(u) + x_2 \cosh(u), x_1 \cosh(u) + x_2 \sinh(u)) \rangle \\ &= x_1^2 \sinh(u) + x_1 x_2 \cosh(u) - x_1 x_2 \cosh(u) - x_2^2 \sinh(u) \\ &= (x_1^2 - x_2^2) \sinh(u) \\ &= \left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\|^2 \sinh(u) = \sinh(u) \end{aligned}$$

olur. $\square$

Teorem 3.12. *$\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ birim spacelike vektör $u \in R$ için hiperbolik açı yönü $\overrightarrow{\mathbf{x}}$'den $\overrightarrow{\mathbf{y}}$'ye doğru ise*

$$\begin{aligned} a) \ \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle &= -\cosh(u) \\ b) \ \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, D\overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle &= -\sinh(u) \end{aligned}$$

dır.

İspat a) $u \in R$ için hiperbolik açı yönü $\overrightarrow{\mathbf{x}}$'den $\overrightarrow{\mathbf{y}}$'ye doğru ise, $-A(u)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}$'dir.

$$-\begin{bmatrix} \cosh(u) & \sinh(u) \\ \sinh(u) & \cosh(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

ise matrisi açarsak,

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle &= \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \langle (x_1, x_2), (-x_1 \cosh(u) - x_2 \sinh(u), -x_1 \sinh(u) - x_2 \cosh(u)) \rangle \\ &= -x_1^2 \cosh(u) - x_1 x_2 \sinh(u) + x_1 x_2 \sinh(u) + x_2^2 \cosh(u) \\ &= (x_2^2 - x_1^2) \cosh(u) = -\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\|^2 \cosh(u) = -\cosh(u) \end{aligned}$$

dir.

b) $-DA(u)\overrightarrow{\mathbf{x}} = D\overrightarrow{\mathbf{y}}$ ise

$$\begin{bmatrix} -\sinh(u) & -\cosh(u) \\ -\cosh(u) & -\sinh(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

bu eşitliği kullanırsak,

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, D\overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle &= \langle (x_1, x_2), (y_2, y_1) \rangle \\ &= \langle (x_1, x_2), (-x_1 \sinh(u) - x_2 \cosh(u), -x_1 \cosh(u) - x_2 \sinh(u)) \rangle \\ &= -x_1^2 \sinh(u) - x_1 x_2 \cosh(u) + x_1 x_2 \cosh(u) + x_2^2 \sinh(u) \\ &= (x_2^2 - x_1^2) \sinh(u) = -\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\|^2 \sinh(u) = -\sinh(u) \end{aligned}$$

bulunur. □

Teorem 3.13. $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$ *birim spacelike vektör ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (y_1, y_2)$ *birim timelike vektör, Eğer* $sgn(x_1) = sgn(y_2)$ *ve* $u \in R$ *hiperbolik açı yönü* $\overrightarrow{\mathbf{x}}$*'den,* $\overrightarrow{\mathbf{y}}$*'ye doğru ise*

$$\begin{aligned} a)\ \sinh(u) &= \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle \\ b)\ \cosh(u) &= \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, D\overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle \end{aligned}$$

dir.

İspat a) $B(u) = DA(u)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}$ ise

$$\begin{bmatrix} \sinh(u) & \cosh(u) \\ \cosh(u) & \sinh(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

dir.

$$\begin{aligned} x_1 \sinh(u) + x_2 \cosh(u) &= y_1 \\ x_1 \cosh(u) + x_2 \sinh(u) &= y_2 \end{aligned} \tag{3.19}$$

3.19'den

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle &= \langle (x_1, x_2), (x_1 \sinh(u) + x_2 \cosh(u), x_1 \cosh(u) + x_2 \sinh(u)) \rangle \\ &= x_1^2 \sinh(u) + x_1 x_2 \cosh(u) - x_2^2 \sinh(u) - x_1 x_2 \cosh(u) \\ &= (x_1^2 - x_2^2) \sinh(u) = \sinh(u) \end{aligned}$$

dur.

b) $B(u) = DA(u)$ ise

$$DA(u)\overrightarrow{\mathbf{x}} = B(u)\overrightarrow{\mathbf{x}} \tag{3.20}$$

3.20'den $DA(u)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}$ her taraftan D matrisi ile soldan çarparsak,

$$\begin{aligned} DB(u)\overrightarrow{\mathbf{x}} &= D\overrightarrow{\mathbf{y}} \\ \begin{bmatrix} \cosh(u) & \sinh(u) \\ \sinh(u) & \cosh(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, D\overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle &= \langle (x_1, x_2), (y_2, y_1) \rangle \\ &= \langle (x_1, x_2), (x_1 \cosh(u) + x_2 \sinh(u), x_1 \sinh(u) + x_2 \cosh(u)) \rangle \\ &= x_1^2 \cosh(u) + x_1 x_2 \sinh(u) - x_1 x_2 \sinh(u) - x_2^2 . \cosh(u) \\ &= (x_1^2 - x_2^2). \cosh(u) = \cosh(u) \end{aligned}$$

dur. □

Teorem 3.14. $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *birim spacelike,* $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ *birim timelike vektörler* $sgn(x_1) \neq sgn(y_2)$ *ve* $u \in R$,

$$\begin{aligned} a)\ \sinh(u) &= -\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle \\ b)\ \cosh(u) &= -\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, D\overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle \end{aligned}$$

dir.

İspat a) $-B(u)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}$ eşitliğinden;

$$-\begin{bmatrix} \sinh(u) & \cosh(u) \\ \cosh(u) & \sinh(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle &= \langle (x_1, x_2), (-x_1 \sinh(u) - x_2 \cosh(u), -x_1 . \cosh(u) - x_2 \sinh(u)) \rangle \\ &= -x_1^2 \sinh(u) - x_1 x_2 \cosh(u) + x_2^2 . \sinh(u) + v_1 x_2 \cosh(u) \\ &= (x_2^2 - x_1^2) \sinh(u) = -\sinh(u) \end{aligned}$$

dır.

b) $-DB(u)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}$ bu eşitlikten,

$$-\begin{bmatrix} \cosh(u) & \sinh(u) \\ \sinh(u) & \cosh(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, D\overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle &= \langle (x_1, x_2), (y_2, y_1) \rangle \\ &= \langle (x_1, x_2), (-x_1 \cosh(u) - x_2 \sinh(u), -x_1 \sinh(u) - x_2 \cosh(u)) \rangle \\ &= -x_1^2 \cosh(u) - x_1 x_2 \sinh(u) + x_1 x_2 \sinh(u) + x_2^2 \cosh(u) \\ &= (x_2^2 - x_1^2) \cosh(u) = -\cosh(u) \end{aligned}$$

elde edilir. □

3.5. Hiperbolik Küre Üzerindeki Üçgen ve Özelikleri

$e = (0, 0, 1) \in R^3$, $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)$ timelike vektörü future pointing veya past pointing ise $\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, e \right\rangle < 0$ veya $\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, e \right\rangle > 0$dır.

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)$ future pointing ise $x_1^2 + x_2^2 < x_3^2$ ve $x_3 > 0$. Timelike birim vektörler kümesi hiperbolik birim küre ile gösterilir.

$$H_0^2 = \left\{ \overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in L^3 \mid \langle x, x \rangle = -1 \right\}$$

H_0^2 hiperbolik birim küresinin iki bileşeni vardır. Bu bileşenler $(0, 0, 1)$ ve $(0, 0, -1)$ boyunca Future pointing hiperbolik birim küre ve Past pointing hiperbolik birim küre sırasıyla H_0^{2+} ve H_0^{2-} ile ifade edilir.

$$\begin{aligned} H_0^{2+} &= \left\{ \overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in L^3 \mid \text{a,Future pointing vektör} \right\} \\ H_0^{2-} &= \left\{ \overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in L^3 \mid \text{a,Past pointing vektör} \right\} \end{aligned}$$

bundan dolayı H_0^{2+} yerine H_0^2 gösterimi kullanacağız. $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3) \in L^3$olmak üzere $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve$\overrightarrow{\mathbf{y}}$'nin Lorentz uzayda vektörel çarpımı

$\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} = (x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3)$ şeklinde tanımlanır (Özdemir ve Kazaz 2005).

Vektörel çarpım aşağıdaki özellikleri sağlar,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} &= \begin{vmatrix} i & j & -k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\
&= x_3y_2 - x_2y_3, x_1y_3 - x_3y_1, x_1y_2 - x_2y_1 \\
\bullet \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle &= -\det(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}) \\
\bullet \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} &= -\overrightarrow{\mathbf{y}} \times \overrightarrow{\mathbf{x}} \\
\bullet (\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}) \times \overrightarrow{\mathbf{z}} &= -\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle \overrightarrow{\mathbf{y}} + \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle \overrightarrow{\mathbf{x}} \\
\bullet \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \times \overrightarrow{\mathbf{t}} \right\rangle &= -\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{t}} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{t}} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle \\
\bullet \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle &= 0 \text{ ve } \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle = 0
\end{aligned}$$

dir.

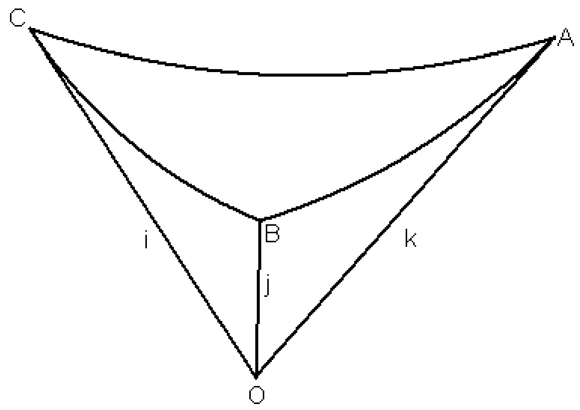
3.6. Hiperbolik Geodezik Üçgenlerde Sinüs ve Kosinüs Teoremleri

A ve B L^3 üç boyutlu lorentz uzayında iki future pointing timelike birim vektörler olsun. $|A|$ ve $|B|$ vektörlerin uzunluğu ve θ, A ve B arasındaki hiperbolik açı olsun, ozaman A ve B için Lorentz iç çarpımı $\langle A, B \rangle = -|A|\,|B| \cosh(\theta)$ şeklinde tanımlanır. A ve B vektörleri için Lorentz vektörel çarpımı $K = A \times B = |A|\,|B| \sinh(\theta) n$ (Özdemir ve Kazaz 2005). n, K yönünde birim spacelike vektör ve $|A|\,|B| \sinh(\theta)$ ise K vektörünün uzunluğudur. Böylece A, B ve K vektörleri doğru sistemi oluşmaktadır.

AOBC üç yüzlü, i, j, k birim timelike vektörleri sırası ile OC, OB, OA yönündedirler. Böylece $|i| = 1, |j| = 1, |k| = 1$. Burada, i, j, k vektörleri için çifter çifter iç çarpım ve vektörel çarpım uygulandığında,

$$\begin{aligned}
\langle i, j \rangle &= -|i|\,|j| \cosh(a) = -\cosh(a) \text{ ve } j \times i = |i|\,|j| \sinh(a) h_{ji} \\
\langle i, k \rangle &= -\cosh(b) \text{ ve } k \times i = \sinh(b) h_{ki} \\
\langle j, k \rangle &= -\cosh(c) \text{ ve } k \times j = \sinh(c) h_{kj}
\end{aligned}$$

bulunur.



Şekil 3.5: Hiperbolik geodezik üçgen

h_{ji}, h_{ki} ve h_{kj} birim vektörleri sırasıyla OCB, OAC ve OAB düzlemlerinde dikey çizgidir. i, j, k için karma çarpım

$$V = \langle i, j \times k \rangle = \langle j, k \times i \rangle = \langle k, i \times j \rangle$$

şekildedir (Özdemir ve Kazaz 2005). Bu çarpımlar paralel yüzlünün hacmini verir ve hacmi i, j, k'nın determinantına eşittir. Hiperbolik sinüs, cosinüs1 ve cosinüs 2 teoremleri hiperbolik geodezik üçgende gösterilecektir.

3.7. Hiperbolik Sinüs Kuralı

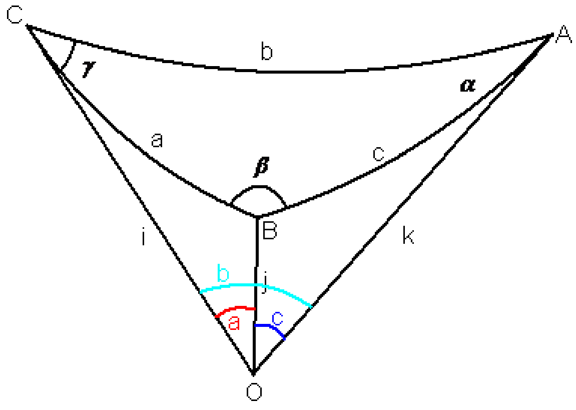
Önteorem 3.15. $(\overset{\triangle}{ABC})$ *hiperbolik birim küre üstünde hiperbolik geodezik üçgen olsun. o halde,*

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}$$

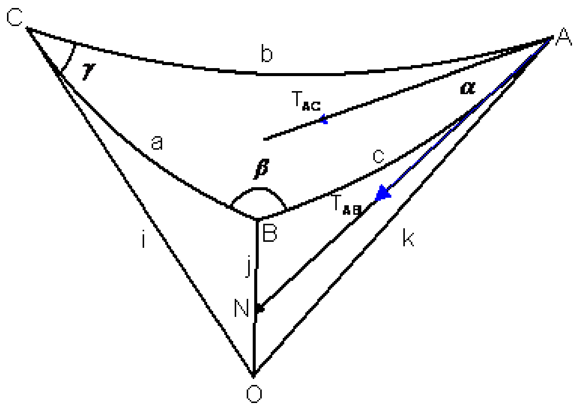
dır (Özdemir ve Kazaz 2005).

İspat OABC üç yüzlüsü göz önüne alınırsa, A noktasından AB ve AC ile aynı tarafta birim teğet doğruları T_{AB} ve T_{AC} olup A noktasından AB'ye çizilen teğet OB ile bir N noktasında kesişmekte o halde şu bağıntıyı yazalım.

$$OA + AN = ON \tag{3.21}$$



Şekil 3.6: Hiperbolik geodezik üçgen 1



Şekil 3.7: Hiperbolik geodezik üçgen 2

o zaman,

$$\begin{aligned} OA &= k\,|OA| \\ AN &= T_{AB}\,|AN| \\ ON &= j\,|ON| \end{aligned}$$

OAN üçgeninden,

$$\begin{aligned} |AN| &= |OA|\tanh(c) \\ |OA| &= \cosh(c)\,|ON| \end{aligned}$$

Böylece 3.21 eşitliğinden,

$$k\,|OA| + T_{AB}\,|OA|\tanh(c) = j\frac{|OA|}{\cosh(c)}$$

yazılabilir. Buradan eşitlik $|OA|$ ile sadeleştirilirse aşağıdaki eşitlikler bulunur.

$$j = k\cosh(c) + T_{AB}\sinh(c) \quad (3.22)$$

benzer biçimde, $i = k\cosh(b) + T_{AC}\sinh(b)$ (3.23)

dir. i ve j vektörlerinin karma çarpımı,

$$\begin{aligned} j \times i &= (k\cosh(c) + T_{AB}\sinh(c)) \times (k\cosh(b) + T_{AC}\sinh(b)) \\ &= \cosh(c)\cosh(b)k \times k + \cosh(c)\sinh(b)k \times T_{AB} \\ &\quad + \sinh(c)\cosh(b)T_{AB} \times k + \sinh(c)\sinh(b)T_{AB} \times T_{AC} \end{aligned}$$

dir. $k \times k = |k|\,|k|\sinh(0) = 0, T_{AB} \times T_{AC} = |T_{AB}|\,|T_{AC}|\sinh(\alpha)k = \sinh(\alpha)k$ elde edilir.

$$\begin{aligned} j \times i &= \cosh(c)\sinh(c)k \times T_{AC} + \sinh(c)\cosh(b)T_{AB} \times k \\ &\quad + \sinh(c)\sinh(b)\sin(\alpha)k \end{aligned} \quad (3.24)$$

dır. k ve $j \times i$ için Lorentz iç çarpım,

$$\begin{aligned} \langle k, j \times i\rangle &= \cosh(c)\sinh(b)\langle k, k \times T_{AC}\rangle + \sinh(c)\cosh(b)\langle k, T_{AB} \times k\rangle \\ &\quad + \sinh(c)\sinh(b)\sin(\alpha)\langle k, k\rangle \end{aligned}$$

burada $j \times i$ yerine 3.24 yazıldı.

$$\langle k, k\rangle = -|k|\,|k|\cosh(0) = -1$$

ve

$$\langle k, k \times T_{AC}\rangle = \langle k, T_{AC} \times k\rangle = \langle T_{AC}, k \times k\rangle = \langle k, T_{AB} \times k\rangle = \langle k, T_{AB} \times k\rangle = \langle T_{AB}, k \times k\rangle = 0$$

$k \times k = 0$ olduğundan,

$$\langle k, j \times k\rangle = \sinh(b)\sinh(c)\sin(\alpha) \quad (3.25)$$

$$\langle j, i \times k\rangle = \sinh(c)\sinh(a)\sin(\beta) \quad (3.26)$$

$$\langle i, k \times j \rangle = \sinh(a)\sinh(b)\sinh(\gamma) \tag{3.27}$$

Buradan,3.25,3.26 ve 3.27 vektörleri i, j, k tarafından belirlenen paralel yüzlünün hacmini verir.

$$V = \sinh(b)\sinh(c)\sin(\alpha) = \sinh(c)\sinh(a)\sin(\beta) = \sinh(a)\sinh(b)\sinh(\gamma) \tag{3.28}$$

Denklem 3.28'i $\sinh(a)\sinh(b)\sinh(c)$ ile bölünüp gerekli sadeleştirmeler yapılarak hiperbolik sinüs kuralını bulunur.

$$\frac{\sinh(b)\sinh(c)\sin(\alpha)}{\sinh(a)\sinh(b)\sinh(c)} = \frac{\sinh(c)\sinh(a)\sin(\beta)}{\sinh(a)\sinh(b)\sinh(c)} = \frac{\sinh(a)\sinh(b)\sinh(\gamma)}{\sinh(a)\sinh(b)\sinh(c)}$$

$$\frac{\sinh a}{\sin\alpha} = \frac{\sinh b}{\sin\beta} = \frac{\sinh c}{\sin\gamma}$$

(Özdemir ve Kazaz 2005). □

Önteorem 3.16. ***(1.Hiperbolik cosinüs kuralı)*** *$(\overset{\triangle}{ABC})$,$H_0^2$ hiperbolik birim küresi üzerinde geodezik üçgen ise hiperbolik cosinüs kuralı*

$$\cos\alpha = \frac{\cosh b\cosh c - \cosh a}{\sinh b\sinh c}$$

dir(Özdemir ve Kazaz 2005).

İspat i ve j vektörlerinin iç çarpımı,

$$\langle i, j \rangle = -\cosh a \tag{3.29}$$

,3.22 ve eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\langle j, i \rangle &= \langle k\cosh(c) + T_{AB}\sinh(c), k\cosh(b) + T_{AC}\sinh(b)\rangle \\ &= \cosh b\cosh c\,\langle k, k\rangle + \sinh b\sinh c\,\langle k, T_{AC}\rangle \\ &\quad + \cosh b\sinh c\,\langle T_{AB}, k\rangle + \sinh b\sinh c\,\langle T_{AB}, T_{AC}\rangle\end{aligned}$$

elde edilir.

T_{AC} ve T_{AB} spacelike vektörleri k timelike vektörüne dik olduğundan $\langle k, T_{AB}\rangle = \langle k, T_{AC}\rangle = 0$ olur.

$$\langle j, i \rangle = -\cosh b\cosh c + \sinh b\sinh c\cos\alpha \tag{3.30}$$

elde edilir.

3.29 ve 3.30'ten

$$\cosh a = \cosh b . \cosh c - \sinh b . \sinh c . \cos\alpha \tag{3.31}$$

olur.

Benzer şekilde,

$$\cosh b = \cosh c \cosh a - \sinh c \sinh a \cos\beta \tag{3.32}$$

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos\gamma \tag{3.33}$$

elde edilir (Özdemir ve Kazaz 2005). □

Önteorem 3.17. ***(2.Hiperbolik cosinüs kuralı)*** *Hiperbolik birim küre üzerinde* $(\overset{\triangle}{ABC})$ *hiperbolik geodezik üçgen hiperbolik cosinüs kuralı 2*

$$\cosh c = \frac{\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}$$

dır (Özdemir ve Kazaz 2005).

İspat Kısaltmak için $\cosh a, \cosh b, \cosh c$ sırasıyla X, Y, Z olarak kullanılırsa hiperbolik cosinüs kuralı 1'den

$$\cos\gamma = \frac{XY - Z}{(X^2-1)^{\frac{1}{2}}(Y^2-1)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.34}$$

$$\cos\beta = \frac{XZ - Y}{(X^2-1)^{\frac{1}{2}}(Z^2-1)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.35}$$

$$\cos\alpha = \frac{YZ - X}{(Y^2-1)^{\frac{1}{2}}(Z^2-1)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.36}$$

elde edilir. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ eşitliğinden

$$\sin^2\alpha = \frac{D}{(Y^2-1)(Z^2-1)}\ ,\ D = 1 + 2XYZ - (X^2+Y^2+Z^2) \tag{3.37}$$

D işareti pozitif ve simetrik X, Y, Z için

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{D}}{(Y^2-1)^{\frac{1}{2}}(Z^2-1)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.38}$$

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{D}}{(X^2-1)^{\frac{1}{2}}(Z^2-1)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.39}$$

$$\sin\gamma = \frac{\sqrt{D}}{(X^2-1)^{\frac{1}{2}}(Y^2-1)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.40}$$

3.34'den 3.40'e kadar olan eşitlikleri $\cosh c = \dfrac{\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}$ eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}\cosh c &= \frac{(YZ-X)(XZ-Y)+(XY-Z)(Z^2-1)}{(X^2-1)^{\frac{1}{2}}(Y^2-1)^{\frac{1}{2}}(Z^2-1)^{\frac{1}{2}}}\frac{(X^2-1)^{\frac{1}{2}}(Y^2-1)^{\frac{1}{2}}(Z^2-1)^{\frac{1}{2}}}{D}\\ &= \frac{XYZ^2-Y^2Z-X^2Z+XY+XYZ^2-XY-Z^3+Z}{D}\\ &= \frac{Z(1+2XYZ-X^2-Y^2-Z^2)}{D}=Z\end{aligned}$$

dir.Aynı yöntemle,

$$\begin{aligned}\cosh b &= \frac{\cos\alpha.\cos\gamma+\cos\beta}{\sin\alpha\sin\gamma}\\ \cosh a &= \frac{\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}\end{aligned}$$

elde edilir (Özdemir ve Kazaz 2005). □

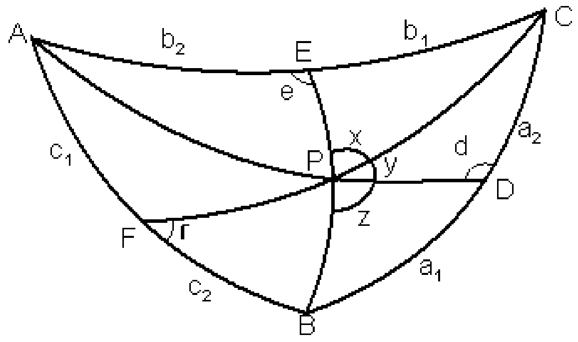
3.8. Hiperbolik Birim Küre Üzerindeki Jeodezik Üçgenler İçin Ceva, Menalaus ve Stewart Teoremleri

$(\overset{\triangle}{ABC})$ geodezik üçgen ve AD, BE ve CF hiperbolik birim küre üstünde geodezik eğriler ve burada D,E ve F;BC,AC ve AB geodezik eğrileri üzerinde noktalardır. Geodezik eğriler AD, BE ve CF bir P noktasında kesişmektedir. H_0^2 birim hiperbolik küre üzerindeki üçgen için ceva teoremi veriliyor.

Teorem 3.18. ***(Ceva teoremi)*** $(\overset{\triangle}{ABC})$ *hiperbolik geodezik üçgenini oluşturan geodezik eğri parçaları arasında trigonometrik bir ilişki vardır.*

$$\frac{\sinh a_1}{\sinh a_2}\frac{\sinh b_1}{\sinh b_2}\frac{\sinh c_1}{\sinh c_2}=1$$

dir (Önder 2007).



Şekil 3.8: Hiperbolik geodezik üçgen 3

İspat Eğer sırasıyla $(B\overset{\triangle}{D}P)$,$(D\overset{\triangle}{P}C), (C\overset{\triangle}{P}E), (E\overset{\triangle}{P}A), (A\overset{\triangle}{P}F)$ ve$(F\overset{\triangle}{B}P)$ geodezik üçgenlerinde hiperbolik sinüs kuralı kullanılırsa elde edilir.

$$\sinh a_1 = \frac{\sin z}{\sin d} \sinh PB \tag{3.41}$$

$$\sinh a_2 = \frac{\sin y}{\sin d} \sinh PC \tag{3.42}$$

$$\sinh b_1 = \frac{\sin x}{\sin e} \sinh PC \tag{3.43}$$

$$\sinh b_2 = \frac{\sin z}{\sin e} \sinh PA \tag{3.44}$$

$$\sinh c_1 = \frac{\sin y}{\sin f} \sinh PA \tag{3.45}$$

$$\sinh c_2 = \frac{\sin x}{\sin f} \sinh PB \tag{3.46}$$

elde edilir.3.41 ile 3.42'i,3.43 ile 3.44'yi,3.45 ile 3.46'u sırasıyla bölünerek;

$$\frac{\sinh a_1}{\sinh a_2} = \frac{\sin z}{\sin y} \frac{\sinh PB}{\sinh PC} \tag{3.47}$$

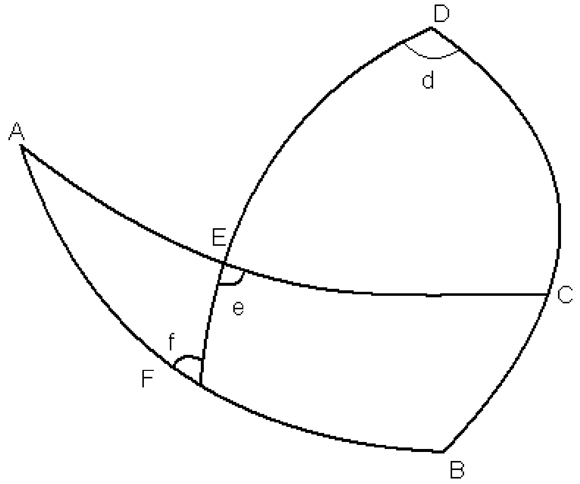
$$\frac{\sinh b_1}{\sinh b_2} = \frac{\sin x}{\sin z} \frac{\sinh PC}{\sinh PA} \tag{3.48}$$

$$\frac{\sinh c_1}{\sinh c_2} = \frac{\sin y}{\sin x} \frac{\sinh PA}{\sinh PB} \tag{3.49}$$

3.47,3.48 ve 3.49 çarpılırsa,

$$\frac{\sinh a_1}{\sinh a_2} \frac{\sinh b_1}{\sinh b_2} \frac{\sinh c_1}{\sinh c_2} = 1$$

elde edilir (Önder 2007). □



Şekil 3.9: Hiperbolik geodezik üçgen 4

Teorem 3.19. ***(Menalaus teoremi)*** *$(\overset{\triangle}{ABC})$ ve $(\overset{\triangle}{BDF})$, H_0^2 de geodezik üçgenler üzerinde trigonometrik bağıntı,*

$$\frac{\sinh BF}{\sinh AF} = \frac{\sinh AE}{\sinh CE} = \frac{\sinh CD}{\sinh BD} = -1$$

dir (Önder 2007).

İspat Geodezik üçgenler $(\overset{\triangle}{BDF})$,$(\overset{\triangle}{AEF})$ ve $(\overset{\triangle}{CDE})$ şekildeki gibidir.

$$\frac{\sinh BF}{\sinh BD} = \frac{\sin d}{\sin f} \tag{3.50}$$

$$\frac{\sinh AE}{\sinh AF} = \frac{\sin f}{\sin e} \tag{3.51}$$

$$\frac{\sinh CD}{\sinh CE} = \frac{\sin e}{\sin d} \tag{3.52}$$

$$|BF| = c_1, |FA| = c_2,\ c_1 + c_2 = c$$

$$|AE| = b_1, |EC| = b_2,\ b_1 + b_2 = b$$

$$|CD| = -a_1, |BD| = a_2,\ \ -a_1 + a_2 = a$$

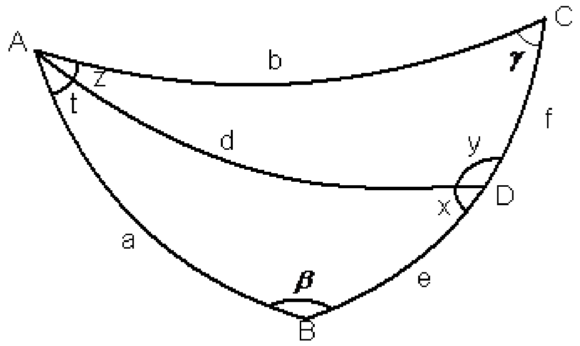
3.50,3.51,3.52'ten

$$\frac{\sinh c_1}{\sinh a_2} = \frac{\sinh b_1}{\sinh c_2} = \frac{-\sinh a_1}{\sinh b_2} = 1$$

$$\frac{\sinh BF}{\sinh AF} = \frac{\sinh AE}{\sinh CE} = \frac{\sinh CD}{\sinh BD} = -1$$

dir (Önder 2007). □

Önteorem 3.20. ***(Stewart teoremi)*** *Hiperbolik birim küre üzerinde* $(\overset{\triangle}{ABC})$ *geodezik üçgeninde,*



Şekil 3.10: Hiperbolik geodezik üçgen 5

$$\sinh f \cosh c + \sinh e \cosh b = \cosh d \sinh a$$

dır (Önder 2007).

İspat $(\overset{\triangle}{ABD})$ ve $(\overset{\triangle}{ACD})$ üçgenlerinde cosinüs kuralı yazılırsa,

$$\cos x = \frac{\cosh d \cosh e - \cosh a}{\sinh d \sinh e}$$
$$\cos y = \frac{\cosh d \cosh f - \cosh b}{\sinh d \sinh f}$$
$$x + y = 180°, \cos x + \cos y = 0$$
$$\frac{\cosh d \cosh e - \cosh a}{\sinh d \sinh e} + \frac{\cosh d \cosh f - \cosh b}{\sinh d \sinh f} = 0$$
$$\cosh d(\sinh f \cosh e + \sinh e \cosh f) = \sinh f \cosh a + \sinh e \cosh b$$

$e + f = a$

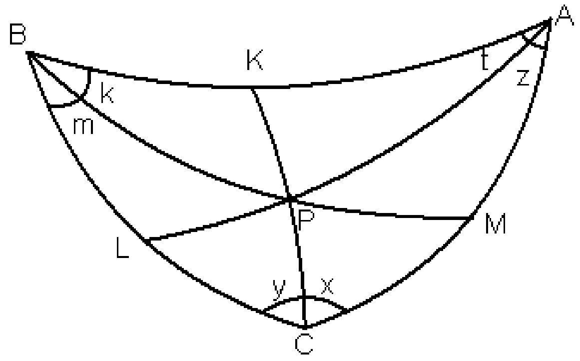
$$\cosh d \sinh(e + f) = \sinh f \cosh a + \sinh e \cosh b$$

buradan,

$$\sinh f \cosh a + \sinh e \cosh b = \cosh d \sinh a$$

dir(Önder 2007). □

Teorem 3.21. ***(Trigonometrik ceva)*** *Hiperbolik birim küre* H_0^2 *üzerinde* $(\overset{\triangle}{ABC})$ *geodezik üçgen olsun,*



Şekil 3.11: Hiperbolik geodezik üçgen 6

$$\sin x \sin t \sin m = \sin z \sin k \sin y$$

İspat

$$\frac{\sinh PB}{\sinh PA} = \frac{\sin t}{\sin k}$$
$$\frac{\sinh PC}{\sinh PB} = \frac{\sin m}{\sin y}$$
$$\frac{\sinh PA}{\sinh PC} = \frac{\sin x}{\sin z}$$

eşitliklerini alt alta çarpılırsa

$$\frac{\sinh PB}{\sinh PA}\frac{\sinh PA}{\sinh PC}\frac{\sinh PC}{\sinh PB} = \frac{\sin t}{\sin k}\frac{\sin m}{\sin y}\frac{\sin x}{\sin z} = 1$$

eşitliğinden

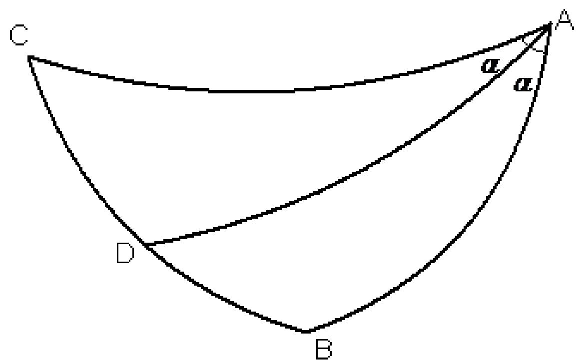
$$\sin x \sin t \sin m = \sin z \sin k \sin y$$

dir. $\square$

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde hiperbolik geodezik üçgende menalaus, ceva, cosinüs, sinüs teoremleri kullanılarak Hiperbolik geodezik üçgende açı ortay teoremi, ceva teoreminin karşıtı bulunup, bunlarla ilgili teoremler verilmiştir.

Teorem 4.22. ***(Hiperbolik geodezik üçgende açıortay teoremi)*** *Hiperbolik birim küre üzerinde* $(\overset{\triangle}{ABC})$ *geodezik üçgen*



Şekil 4.12: Hiperbolik geodezik üçgen 7

$$\frac{\sinh AB}{\sinh BD} = \frac{\sinh AC}{\sinh DC}$$

İspat Sinüs kuralı kullanılırsa $(\overset{\triangle}{ADC})$ geodezik üçgeninde

$$\frac{\sinh DC}{\sin \alpha} = \frac{\sinh AD}{\sin C} \tag{4.1}$$

$(\overset{\triangle}{ADB})$ üçgeninde

$$\frac{\sinh BD}{\sin \alpha} = \frac{\sinh AD}{\sin B} \tag{4.2}$$

4.1 ve 4.2'den,

$$\frac{\sinh DC}{\sinh BD} = \frac{\sin B}{\sin C} \tag{4.3}$$

elde edilir. Şimdi $(\overset{\triangle}{ABC})$ geodezik üçgeninde sinüs kuralı kullanılırsa,

$$\frac{\sinh AC}{\sin B} = \frac{\sinh AB}{\sin C}$$

yani

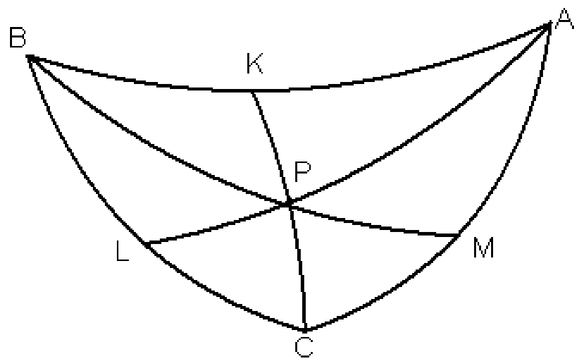
$$\frac{\sinh AC}{\sinh AB} = \frac{\sin B}{\sin C} \tag{4.4}$$

4.4'ı 4.3 da yerine yazılırsa,

$$\frac{\sinh AB}{\sinh BD} = \frac{\sinh AC}{\sinh DC}$$

eşitliği elde ederiz. □

Önteorem 4.23. ***(Hiperbolik ceva teoreminin karşıtı)*** *$(\overset{\triangle}{ABC})$ üçgeni Hiperbolik geodezik üçgen, $(\overset{\triangle}{ABC})$ üçgeninin, AB, BC ve AC yayları üzerinde*



Şekil 4.13: Hiperbolik geodezik üçgen 8

$$\frac{\sinh AK}{\sinh KB}\frac{\sinh BL}{\sinh LC}\frac{\sinh CM}{\sinh MA} = 1$$

olacak şekilde K,L,M noktaları alınsın o zaman AL, BM, CK yayları kesişirler.

İspat

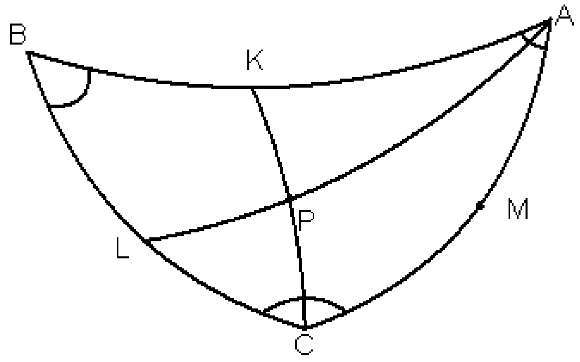
AL ve CK yayları bir noktada kesişsin, BP yayı birleştirilsin. CP yayının AC'yi kestiği nokta M olsun, ceva teoremi kullanılırsa,

$$\frac{\sinh AK}{\sinh KB}\frac{\sinh BL}{\sinh LC}\frac{\sinh CM}{\sinh MA} = 1 \tag{4.5}$$

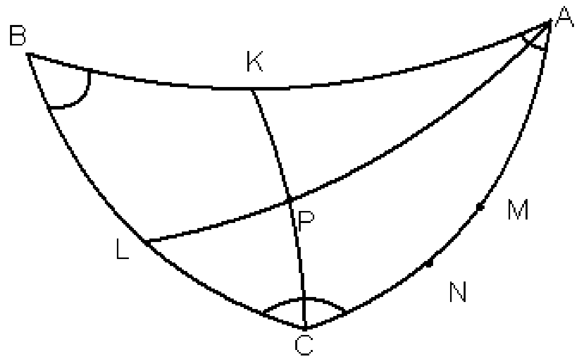
ceva teoreminden eşitlik açıktır. Şimdi BP yayı AC yayını M'den farklı bir N noktada kessin

burada kesişen doğrular için tekrar ceva teoremi yazılırsa,

$$\frac{\sinh AK}{\sinh KB}\frac{\sinh BL}{\sinh LC}\frac{\sinh CN}{\sinh NA} = 1 \tag{4.6}$$



Şekil 4.14: Hiperbolik geodezik üçgen 9



Şekil 4.15: Hiperbolik geodezik üçgen 10

eşitliği elde edilir.4.5 ve 4.6 yanyana oranlanırsa,

$$\frac{\sinh CM}{\sinh MA} = \frac{\sinh CN}{\sinh NA}$$

eşitliği elde edilir biz buradaki eşitlikteki ifadeleri $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ şeklinde açarsak,

$$\frac{\dfrac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2}}{\dfrac{e^z - e^{-z}}{2}} = \frac{\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}}{\dfrac{e^{y+z} - e^{-(y+z)}}{2}}$$

bu eşitlikten,

$$e^{x+z} - e^{z-x} - e^{x-z} + e^{-(x+z)} = e^{x+2y+z} - e^{-x+z} - e^{x-z} + e^{-(x+2y+z)}$$

sadeleştirmeler yapıldığında

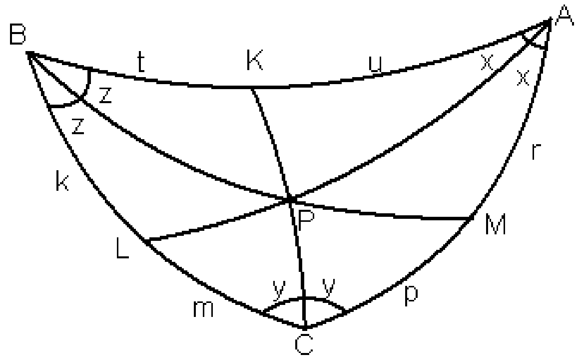
$$e^{x+z} + e^{-(x+z)} = e^{x+2y+z} + e^{-(x+2y+z)}$$

$$\frac{e^{x+z}+e^{-(x+z)}}{2}=\frac{e^{x+2y+z}+e^{-(x+2y+z)}}{2}$$
$$\sinh(x+z)=\sinh(x+2y+z)$$

eşitliği ancak $y=0$ iken sağlanır bu ise $N=M$ olduğunu gösterir. □

Teorem 4.24. *Hiperbolik geodezik üçgende iç açıortaylar bir noktada kesişir.*

İspat



Şekil 4.16: Hiperbolik geodezik üçgen 11

Açı ortay teoreminden,

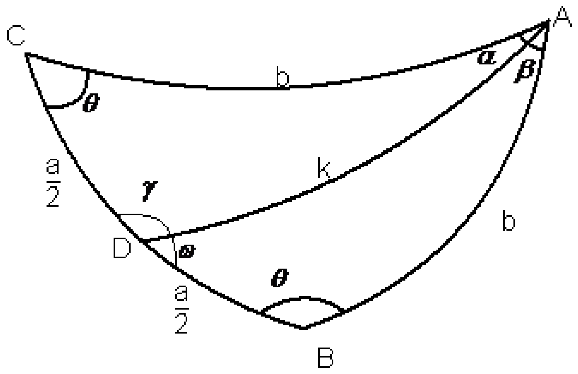
$$\frac{\sinh b}{\sinh c}=\frac{\sinh m}{\sinh k}$$
$$\frac{\sinh a}{\sinh b}=\frac{\sinh t}{\sinh u}$$
$$\frac{\sinh c}{\sinh a}=\frac{\sinh r}{\sinh p}$$

eşitlikleri taraftarafa çarpılırsa,

$$\frac{\sinh b}{\sinh c}\frac{\sinh a}{\sinh b}\frac{\sinh c}{\sinh a}=\frac{\sinh m}{\sinh k}\frac{\sinh t}{\sinh u}\frac{\sinh r}{\sinh p}=1$$

ceva teoreminin karşıtından eğer bu üçünün çarpımı 1 ise AL, CK, BM yayları bir noktada kesişirler. □

Teorem 4.25. *Bir ikizkenar hiperbolik geodezik üçgende tepe noktasından ve karşı kenarın orta noktasından geçen büyük çember yayı karşı kenarla dik kesişir.*



Şekil 4.17: Hiperbolik geodezik üçgen 12

İspat $(\overset{\triangle}{ACD})$ üçgeninden,

$$\frac{\sinh \frac{a}{2}}{\sin\alpha} = \frac{\sinh k}{\sin\theta}$$

$(\overset{\triangle}{ABD})$ üçgeninden,

$$\frac{\sinh \frac{a}{2}}{\sin\beta} = \frac{\sinh k}{\sin\theta}$$

elde edilir.Bu iki eşitlikten

$$\sin\alpha = \sin\beta \Longrightarrow \alpha = \beta$$

elde edilir.$(\overset{\triangle}{ACD})$ ve $(\overset{\triangle}{ABD})$ üçgeninde sinüs teoreminden

$$\frac{\sinh \frac{a}{2}}{\sin\alpha} = \frac{\sinh b}{\sin\gamma}$$

$$\frac{\sinh \frac{a}{2}}{\sin\beta} = \frac{\sinh b}{\sin\omega}$$

eşitliklerinden,

$$\sin\gamma = \sin\omega \Longrightarrow \gamma = \omega \text{ ve } \gamma + \omega = \pi \text{ ise } \gamma = \omega = \frac{\pi}{2}$$

dir. □

5. SONUÇLAR

Lorentz uzayda yönlü hiperbolik açı kavramı ve spacelike timelike vektörler arasındaki yönlü açı kavramı incelenip, bu vektörlerin iç çarpım özellikleri açı yönüne bağlı olarak incelenmiştir. R^3'te Küre üzerindeki geodezik üçgenlerde menalaus, ceva, Trigonometrik ceva, cosinüs ve sinüs teoremleri bulunmuştur. Lorentz uzayda ise Hiperbolik küre üzerindeki geodezik üçgenlerde Ceva teoremi, Menalaus Teoremi Cosinüs ve Sinüs teoremleri bulunmuştur. Bu çalışmada daha önceki teorem özelliklerinden yararlanılarak Hiperbolik küre üzerindeki geodezik üçgenlerde açıortay teoremi ve ceva teoreminin karşıtı bulunmuştur.

a) açıortay teoremi:

$$\frac{\sinh AB}{\sinh BD} = \frac{\sinh AC}{\sinh DC}$$

b) ceva teoreminin karşıtı:$(\overset{\triangle}{ABC})$ üçgeni Hiperbolik geodezik üçgen, $(\overset{\triangle}{ABC})$ üçgeninin, AB, BC ve AC yayları üzerinde

$$\frac{\sinh AK}{\sinh KB}\frac{\sinh BL}{\sinh LC}\frac{\sinh CM}{\sinh MA} = 1$$

olacak şekilde K,L,M noktaları alınsın o zaman AL, BM, CK yayları kesişirler. Açıortay teoremi hiperbolik geodezik üçgenin kenarları arasındaki orantıyı vermektedir. Ceva teoreminin karşıtı ise bazı teoremlerin ispatlanmasına yardımcıdır. Açıortay teoremi ve ceva teoreminin karşıtından yararlanarak bazı teoremler ve ispatları verilmiştir.

6. KAYNAKLAR

G. S. Birman and K. Nomizu, The Gauss-Bonnet theorem for 2-dimensional spacetimes, to appear in Michigan Mathematical Journal, 31(1984), 77-81

G. S. Birman and K. Nomizu, Trigonometry in Lorentzian geometry, American Mathematical (1984), 543-549

Ergin A.A, "Lorentz düzleminde kinematik geometri" Doktora Tezi A.Ü.Fen Bilimleri Enstitüsü, 1989.

E. Nesovic, M. Petrovic-Torgasev, L. Verstraelen, Curves in Lorentzian spaces,Bolletino dell'unione Matematica İtaliana, Seri no:8 (2005),685-696

Uğurlu, H. H; Çalışkan, A. "Darboux Ani Dönme Vektörleri ile Space-like ve Time-like Yüzeyler Geometrisi" Celal Bayar Üniversitesi Yayınları Yayın no:0006, 2012.

Özdemir, A.; Kazaz, M. Hyperbolic Sine and Cosine Rules for Geodesic Triangles on the Hyperbolic Unit Sphere H20. Math. Comput. Appl. 2005, 10, 203-209.

Önder Mehmet, Ceva, Menelaus and stewart theorems for geodesıc trıangles on the hyperbolic unıt sphere H_0^2,Celal Bayar Üniversitesi,Fen-Edebiyat Fakültesi 2007.

Çelik Muhsin; Güngör M.A; - Hiperbolik Düzlemde İki Parametreli Homotetik Hareketler Üzerine Bir Çalışma - Fen ve Mühendislik bilimleri dergisi, Beykent Üniversitesi - Vol.7 - pp.1-20 - ISSN : -DOI : 2014

ÖZGEÇMİŞ

ALİ TAŞ

ali_tas_1189@hotmail.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Lisans:	Akdeniz Üniversitesi
2010-2014	Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya
Yüksek Lisans:	Akdeniz Üniversitesi
2015-2018	Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya