T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİLİNDİRİK VE KÜRESEL KAVİTELERDE FOTON DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

CAVİT TEKİNÇAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI

2017

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİLİNDİRİK VE KÜRESEL KAVİTELERDE FOTON DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

CAVİT TEKİNÇAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI

2017

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİLİNDİRİK VE KÜRESEL KAVİTELERDE FOTON DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

CAVİT TEKİNÇAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI

Bu tez 06/07/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile kabul/~~red~~ edilmiştir.

Doç. Dr. Yusuf SUCU

Doç. Dr. Orhan BAYRAK

Doç. Dr. Özlem YEŞİLTAŞ

ÖZET

SİLİNDİRİK VE KÜRESEL KAVİTELERDE FOTON DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

CAVİT TEKİNÇAY

Yüksek Lisans Tezi, Fizik Anabilim Dalı
Danışman : Doç. Dr. Yusuf SUCU
Temmuz 2017, 45 sayfa

Kırılma indisi, ışığın bir optik ortamdaki hareketini tanımlamak için kullanılan önemli bir fiziksel niceliktir. Optik ortamlar, nükleer etkileşmelerin yanı sıra elektromanyetik etkileşmelerin varlığındaki ortamlar da olabilmektedir. Ancak, bu çalışmadaki kırılma indisi, kozmolojik boyutlarda kütle çekim alanının etkin olduğu optik ortamı tanımlamaktadır. Basamak kırılma indisi kütle çekim alanı etkisinin sabit olduğu ortamı tanımlarken, dereceli kırılma indisi radyal olarak etkisini değiştiren kütle çekim alanının varlığındaki ortamı tanımlamaktadır. Bu ortamlar, genel görelilik kapsamında uzay-zaman zeminini oluşturmaktadır.

Bu çalışmada, relativistik kuantum mekaniksel kütleli ve kütlesiz vektör bozon denklemleri, basamak ve dereceli kırılma indisli hem silindirik hem de küresel kavite zeminlerinde çözülmüştür. Bu zeminlerde dereceli kırılma indisinin yapısını belirleyebilmek için, foton ile kütle çekimsel alanın minimal çiftlenimi sonucunda elde edilen noktasal parçacık Lagranjiyeni kullanılmaktadır. Bu şekilde elde edilen uzay-zaman zeminlerinde, kütleli foton denklemi $M^2 \to 0$ limitinde çözülerek hesaplanan rezonans frekansları ve kütle çekimsel kırmızıya kayma fonksiyonları tartışılmaktadır.

ANAHTAR KELİMELER: Basamak ve Dereceli Kırılma İndisi, Kütle Çekimsel Kırmızıya Kayma, Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) Denklemi, Barut Modeli, Kütleli ve Kütlesiz Vektör Bozon Denklemi, 3+1 Boyutlu Eğri Uzay-zaman, Minimal Çiftlenim, Maxwell Denklemleri, Silindirik Kavite, Küresel Kavite, Rezonans Kavitesi, Rezonans Frekansı, Yarı-Normal Modlar

JÜRİ: Doç. Dr. Yusuf SUCU (Danışman)
Doç. Dr. Orhan BAYRAK
Doç. Dr. Özlem YEŞİLTAŞ

ABSTRACT

SOLUTIONS OF PHOTON EQUATION IN CYLINDRICAL AND SPHERICAL CAVITY

CAVİT TEKİNÇAY

MSc Thesis, in Department of Physics
Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Yusuf SUCU
July 2017, 45 pages

Refractive index is one of the important physical quantity defining the motion of light in a optical medium. Optical mediums can be a zone in the presence of nuclear interactions as well as electromagnetic interactions. However, in this study, a refractive index is defined as an optical medium of which gravitational field is effective in cosmological dimensions. In this sense, as a step refractive index describes a zone where the effect of gravitational field is constant, a graded refractive index describes a zone where the effect of gravitational field is radially change. In the context of general relativity, these mediums construct the space-time background.

In this study, massive and massless relativistic quantum mechanical vector boson equations are solved in both cylindrical and spherical cavity background with step and graded refractive index. Besides, to determine the form of the refractive index in these backgrounds, point particle Lagrangian which is derived from the minimal coupling of massive photon with gravitational field is used. Thus, the calculated resonance frequencies by solving massive photon equation in the limit of $M^2 \to 0$ and redshift functions are discussed.

KEYWORDS: Step and Graded Refractive Index, Gravitational Redshift, Duffin - Kemmer - Petiau (DKP) Equation, the Model of Barut, Massive and Massless Vector Boson Equations, (3+1) Curved Space-time, Minimal Coupling, Maxwell Equations, Cylindrical Cavity, Spherical Cavity, Resonance Cavity, Resonance Frequency, Quasi - Normal Modes

COMMITTEE: Assoc. Prof. Dr. Yusuf SUCU (Supervisor)
Assoc. Prof. Dr. Orhan BAYRAK
Assoc. Prof. Dr. Özlem YEŞİLTAŞ

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında bana yardımcı olan, danışmanım Doç. Dr. Yusuf Sucu ile Dr. Ganim Geçim'e ve her zaman maddi ve manevi bana destek olan sevgili eşim Merve Sema Yiğit Tekinçay'a çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\beta^{\mu}(x)$	Eğri uzay-zamanda Kemmer matrisleri
$\gamma^{\mu}(x)$	Eğri uzay-zamanda Dirac matrisleri
D_{μ}	Kovaryant türev işlemcisi
Λ_{μ}	Spin bağlantı tensörü
Γ_{μ}	Spin bağlantı katsayısı
$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$	İkinci çeşit Christoffel Sembolleri
$S^{\lambda\nu}$	Spin komütasyonu
$\Sigma^{\mu}(x)$	Eğri uzay-zamanda Spin-1 matrisleri
$\vec{\sigma}$	Pauli matrisleri
ψ	Spinör
$\psi^{\dagger}$	Spinörün adjointi
Ψ	Spinörün bilineer fonksiyonu
$\psi_{\alpha\beta}$	Simetrik dalga fonksiyonu
$g_{\mu\nu}$	Eğri uzay-zamanda metrik tensörü
$\|g\|$	Metrik tensörünün determinantı
η_{ab}	Minkowski metrik tensörü
m_0	Spin-1 parçacığının kütlesi
c	Işığın boşluktaki hızı
$\hbar$	Planck sabiti

Kısaltmalar

DKP	Duffin-Kemmer-Petiau
E-H	Einstein-Hilbert

1. GİRİŞ

Işığın klasik teorisi Maxwell (1865) tarafından kurulmuştur. Bu teori, ışığı sonlu hıza sahip, kütlesiz ve enine titreşen elektrik ve manyetik alanların birleşimi olarak tanımlamaktadır. Yük ve akım yoğunluğunun bulunmadığı, kartezyen koordinatlarda boşluktaki Maxwell elektromanyetik dalga denklemleri

$$\left[\nabla_t^2 + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\right]\left\{\begin{matrix} E_z(x,y) \\ B_z(x,y) \end{matrix}\right\} = 0 \tag{1.1}$$

şeklindedir (Jackson , 1975). Burada $\nabla_t^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ enine laplasyen ve düzlem dalga fonksiyonunun z bileşeni ise e^{ikz} biçimindedir. Bu denklemler, ışığın boşlukta sabit hızla ilerleyebildiğini ve Huygens (1690) tarafından önerilen esirin olmadığını göstermektedir. Ayrıca, Michelson ve Morley (1887) tarafından yapılan deneylerde de ışığın hareketinin gözlemcinin hareketinden bağımsız olduğu gözlemlenmiştir. Ancak, bu durumda Maxwell denklemleri Galile dönüşümleri altında invaryant kalma koşulunu ihlal etmektedir. Bunun üzerine Lorentz (1904), Galile dönüşümlerini düzelterek tanımladığı yeni dönüşümler altında Maxwell denklemlerinin değişmediğini göstermiştir. Einstein (1905a) ise, boş uzaydaki ışık hızının evrensel bir sabit olduğunu kabul ederek zaman genleşmesi, uzunluk büzülmesi, eylemsiz kütle-enerji özdeşliği ve uzay-zaman bütünlüğü gibi kavramları içeren özel görelilik teorisini kurmuştur. Böylece, Maxwell denklemlerinin relativistik dalga denklemi olduğu gösterilmiştir. Bunun yanı sıra, yük ve akım yoğunluğunun bulunmadığı durumda, boşluktaki Maxwell alanları $F^{\mu\nu}$ ve $G^{\mu\nu}$ sırasıyla,

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0 \qquad \partial_\nu G^{\mu\nu} = 0 \tag{1.2}$$

şeklinde kovaryant formdaki elektromanyetik tensör alanları cinsinden yazılabilmektedir (Jackson , 1975). Burada, A_μ vektör potansiyel olmak üzere $F^{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu}$ elektrik ve manyetik alanların bileşenlerinden oluşan antisimetrik tensör ve $G^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu}/2$ tensörü, $F_{\mu\nu}$ tensörünün dualidir.

Işığın modern teorisinin kurulmasında ise, özellikle kara cisim ışıması ve fotoelektrik olayın klasik fizik ile açıklanamaması etkili olmuştur. Planck (1900) tarafından, termal ışımanın $h\nu$ enerjili *kuantalar* halinde gerçekleştiğinin önerilmesi, hem termal ışımanın hem de fotoelektrik olayın açıklanabilmesini sağlamıştır. Fotoelektrik olay Hertz (1887) tarafından, ışığın elektromanyetik dalga olduğunu doğrulamak için yapılan deneyde gözlemlenmiştir. Einstein (1905b) ise, Planck'ın kuanta hipotezini kullanıp ışığın foton denilen kuantumlanmış elektromanyetik dalga paketi olduğunu önererek fotoelektrik olayı açıklamıştır. Işığı nasıl test ettiğimize bağlı olarak ortaya çıkan hem dalga hem de parçacık karakteri, kuantum teorisinin temelini oluşturmaktadır. Kuantum teorisindeki diğer bir gelişme ise, temel parçacıkların spin denilen kuantize bir iç yapıya sahip olduğunun gözlemlenmesidir (Gerlach ve Stern, 1922). Bu spinli yapıya göre temel parçacıklar; spini kesirli sayı olanlar fermiyon ve spini tamsayı olanlar bozon olmak üzere sınıflandırılmıştır. Bu sınıflandırmaya göre, kuantum mekaniksel ışık;

kütlesiz, yüksüz ve spin-1 relativistik foton parçacığıdır ve standart parçacık modeline göre elektromanyetik kuvvetin taşıyıcısıdır.

1930'larda, spin-1 parçacıklar için relativistik kuantum mekaniksel yeni bir denklem önerilmiştir. Bu denklem, düz uzay-zamanda hem spin-1 hem de spin-0 kütleli parçacıklar için çözümler sağlamaktadır ve kaynaklarda Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) denklemi olarak bilinmektedir (Duffin 1938, Kemmer 1939, Petiau 1936). DKP denkleminin önemli bir özelliği, $\Psi_{\alpha\beta}$ dalga fonksiyonunun α,β'ya göre simetrik seçilmesi durumunda spin-1 ve spin-0 kısımlarının ayrışmasıdır (Belinfante , 1939). Bu sayede, DKP denklemi simetrik dalga fonksiyonu koşulunda, foton için bir formalizm geliştirmede kullanılabilmektedir. Barut (1989) tarafından yapılan çalışmada, elektronun zitterbewegung modelinin Schrödinger kuantizasyonu yapılarak, spinli parçacıklar için düz uzay-zamanda denklemler elde edilmiştir. Bu denklemler arasında, DKP denklemine özdeş olan kütleli spin-1 parçacık denklemi de bulunmaktadır. Sucu ve Ünal (2005) tarafından yapılan çalışmada ise, düz uzay-zamandaki kütleli spin-1 parçacık denkleminin, eğri uzay zamana genelleştirilmesi yapılmış ve $M^2 \to 0$ limit durumunda Proca denklemine özdeşliği gösterilmiştir.

Spin-1 DKP denkleminin kütlesiz parçacık limiti ise, Jena vd (1980) tarafından yapılan çalışmada DKP Lagrange yoğunluğu kullanılarak Euler-Lagrange varyasyon ilkesi yöntemiyle Maxwell denklemine denkliği gösterilmişir. Başka bir çalışmada ise, zitterbewegung'un Schrödinger kuantizasyonu yöntemiyle düz uzay-zamanda kütlesiz spin-1 parçacık denklemi türetilmiştir (Ünal , 1997). Sucu ve Ünal (2002) tarafından yapılan çalışmada ise, düz uzay-zamandaki kütlesiz spin-1 parçacık denkleminin, eğri uzay zamana genelleştirilmiş ve Maxwell denklemlerine eşdeğerliliği gösterilmiştir.

Kaynaklarda çeşitli uzay-zamanlardaki, değişik yöntemlerle DKP denkleminin tutarlılığı tartışılmaktadır. Casana vd (2002) tarafından yapılan çalışmada, Riemann-Cartan uzay-zamanda, spin-1 alanı ile uzay-zaman burulmasının minimal çiftlenimi sonucunda DKP denkleminin Proca denklemine özdeş olmadığı gösterilirken, genel göreliliğin teleparalel teorisi kapsamında özdeş olduğu bulunmuştur. Çünkü, teleparalel teorideki kütle çekimsel alanlar, Riemann eğriliği yerine uzay-zaman burulmasıyla ilişkilidir. Casana vd (2003) tarafından yapılan başka bir çalışmada ise, DKP denkleminin eğri uzay-zamana genelleştirilmesi yapılarak kütlesiz DKP denklemi elde edilmiştir ve daha sonra bu denklemin konformal değişmezliği gösterilmiştir (Casana vd , 2005). Casana vd (2007) tarafından burulmayla çiftlenmiş Lyra geometrisinde kütlesiz DKP denklemi elde edilirken, Ünal (2006) tarafından elektromanyetik alan ile burulmanın çiftlenimi çalışılmıştır. Ayrıca, minimal ve non-minimal çiflenim için DKP denkleminin hem spin-0 hem de spin-1 kısmının, Kemmer matrislerinin temsilinden bağımsız oldukları bildirilmiştir (Abreu vd , 2010).

Kaynaklardaki diğer çalışmalarda, spin-1 parçacık denklemleri çeşitli uzay-zamanda ve potansiyellerde incelenmektedir. 3+1 boyutlu uzay-zamanda vektör bozonun sabit bir manyetik alandaki hareketini Yaltkaya (1997), 2+1 boyutlu uzay-zamanda kurt deliği uzay-zamanda ise Gürtaş (2013) tartışmıştır. 1+1 boyutlu uzay-zamandaki vektör bozonun, Robertson-Walker ve de Sitter uzay-zamanda Falek ve Merad (2012) tarafından, skaler potansiyel ile etkileşimi ise Chargui ve Trabelsi (2013) tarafından incelenmiştir. Ayrıca, 3+1 boyutlu uzay-zamanda vektör parçacıklarının non-minimal etkileşimleri de incelenmiştir (Castro ve de Oliveira 2014). Başka bir çalışmada ise, vektör bozonun çift basamak potansiyeli ile etkişimi çalışılmıştır (de Oliveira ve de Castro 2015). Bunların yanı sıra, spin-1 DKP denklemi, Einstein alan denklemlerinin çözümleri sonucu ortaya çıkan kara delik ve kurt deliğinde de araştırılmıştır. 2+1 boyutlu uzay-zamandaki kara delikte kütleli vektör bozonun tünellemesi incelenmiştir (Gecim 2015, Gecim ve Sucu 2017a, Gecim ve Sucu 2017b).

Kütle çekim alanının bir optik ortam olarak ele alınması, Einstein (1911) tarafından önerilmiş ve bu önerinin deneysel sonuçlarla uyumluluğu Eddington (1920) tarafından gösterilmiştir. Bu bakış açısını kullanarak, genel görelilik kapsamında geometrik optiği inceleyen hem klasik çalışmalar (Felice 1971, Nandi ve Islam 1995, Evans vd 1996) hem de kuantum mekaniksel çalışmalar (Gloge ve Marcuse 1969, Ahmadi ve Nouri-Zonoz 2006) bulunmaktadır. Böylelikle, kütle çekim alanının bulunduğu optik ortamın dielektrik özellikleri ve kırılma indisi üzerine çalışmalar da yapılmıştır (Leonhardt , 2000).

Tez kapsamında, silindirik ve küresel kavitedeki fotonun davranışlarını incelemek için, kütlesiz spin-1 parçacık denklemi (Sucu ve Ünal , 2002) ve kütleli spin-1 parçacık denklemi (Sucu ve Ünal, 2005) kullanılmaktadır. Özellikle, basamak kırılma indisine sahip silindirik ve küresel kavitede kütlesiz spin-1 parçacık denkleminin çözümlerinden elde edilen rezonans frekansları ile aynı kavitelerde Maxwell denklemlerinden elde edilen rezonans frekansları karşılaştırılmaktadır. Bilinmeyen dereceli kırılma indisi fonksiyonları bulabilmek için spin-1 DKP alanı ile kütle çekimsel alanın minimal çiftlenimi sonucunda eylem fonksiyonu oluşturulmaktadır ve buradan kırılma indisinin radyal fonksiyonları bulunmaktadır. Bulunan kırılma indisleri için kütleli spin-1 parçacık denklemi çözülerek, elde edilen rezonans frekansları tartışılmaktadır.

Bu tez çalışmasının, kuramsal bilgiler ve kaynak taramaları bölümünde Maxwell denklemlerinin silindirik ve küresel kavitedeki çözümleri ile spin-1 parçacık denklemi ile ilgili teorik çalışmalar; materyal ve metod bölümünde, tez kapsamında kullanılan kırmızıya kayma metrikleri, kütleli spin-1 alanı ile kütle çekimsel alanın minimal çiftlenimi ve diferansiyel denklemler; bulgular bölümünde, rezonans kavitesinde Maxwell denklemlerinden elde edilen çözümler ile kütlesiz-kütleli spin-1 parçacık denkleminden elde edilen çözümler; tartışma bölümünde, kuantum mekaniksel olarak elde edilen rezonans frekanslarının klasik sonuçlarla karşılaştırılması ve kavitelerin nitelik çarpanlarının bulunması; sonuç bölümünde elde edilen etkin kırılma indisleri ve kütle çekimsel kırmızıya kayma ifadeleri tartışılmıştır.

2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI

2.1. Fotonun Klasik Relativistik Denklemleri

Foton, klasik olarak boşluktaki elektrik ve manyetik alanların birleşiminden oluşan ve enine titreşen dalgadır. Fotonun elektromanyetik dalga karakteri ilk kez Maxwell (1865) tarafından oluşturulmuştur. Yük ve akım yoğunluğunun bulunmadığı durumda, boşluktaki Maxwell denklemlerinin diferansiyel formu

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= 0\,, \qquad \vec{\nabla}\mathrm{x}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,, \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= 0\,, \qquad \vec{\nabla}\mathrm{x}\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\,, \end{aligned} \tag{2.1}$$

şeklindedir (Jackson , 1975). Burada, $\vec{\nabla}\mathrm{x}(\vec{\nabla}\mathrm{x}\vec{E})$ ve $\vec{\nabla}\mathrm{x}(\vec{\nabla}\mathrm{x}\vec{B})$ işlemleri yapılırsa

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\begin{Bmatrix}\vec{E}\\ \vec{B}\end{Bmatrix} = 0 \tag{2.2}$$

elektrik alan ve manyetik alan için klasik dalga denklemi elde edilmektedir (Jackson , 1975). Denklem 2.2 sonucunda ışık hızının sabit olduğu görülmektedir. Ayrıca, Maxwell denklemleri Lorentz dönüşümü altında değişmediği için relativistik denklemlerdir ve bu sayede 2.1 denklemi

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0 \qquad \partial_\nu G^{\mu\nu} = 0 \tag{2.3}$$

kovaryant formda yazılabilmektedir (Jackson , 1975).

Elektromanyetik dalga enine olduğu için, kartezyen koordinatlarda z doğrultusunda ilerleyen ω frekanslı düzlem dalga için

$$\left[\nabla_t^2 + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\right]\psi(x,y) = 0 \tag{2.4}$$

elektromanyetik dalga denklemi elde edilmektedir (Jackson , 1975). Burada $\nabla_t^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ enine laplasyen ve düzlem dalga fonksiyonu ise $\Psi(x,y)e^{ikz}$ biçimindedir. Bu denklem, rezonans kavitesi probleminde kullanılmaktadır (Jackson , 1975).

2.1.1. Silindirik rezonans kavitesi içinde elektromanyetik dalga

a yarıçaplı L boyundaki silindirik rezonans kavitesinde elektromanyetik dalga denklemini çözebilmek için, $x = rcos\phi$ ve $y = rsin\phi$ koordinat dönüşümleri 2.4 denklemine uygulanırsa

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\right]\psi(r,\phi) = 0 \tag{2.5}$$

şeklinde Bessel diferansiyel denklemi elde edilmektedir. $u^2 = \omega^2/c^2 - k^2$ olmak üzere düzlem dalga fonksiyonu

$$\psi(r,\phi,z) = \left[N_1 J_m(ur) + N_2 Y_m(ur)\right] e^{i(m\phi+kz)} \tag{2.6}$$

olarak bulunur (Jackson , 1975).

Silindirik kaviteyi tanımlayan sınır koşulları,

$$\begin{aligned} J_m(ur) &= \begin{cases} 0, & r = 0 \text{ için} \\ 0, & r = a \text{ için} \end{cases} \\ e^{ikz} &= C_1 cos(kz) + C_2 sin(kz) = \begin{cases} 0, & z = 0 \text{ için} \\ 0, & z = L \text{ için} \end{cases} \end{aligned} \tag{2.7}$$

şeklindedir. Burada, a silindirik kavitenin yarıçapı, L silindirik kavitenin boyudur. $r = 0$ için Neumann fonksiyonu $Y_m(ur)$ sonsuza gittiği için $N_2 = 0$ seçilmektedir. $r = a$ için Bessel fonksiyonunu sıfır yapan değerler, $\chi_{m,n}$ Bessel fonksiyonunun kökleri olmak üzere $ua = \chi_{m,n}$ rezonans frekansını belirlemek için kullanılmaktadır. Diğer taraftan, $z = 0$ koşulundan $C_1 = 0$ olması gerektiği ve $z = L$ koşulundan $kL = p\pi$ olması gerektiği anlaşılmaktadır. Ayrıca, m, n ve p elektromanyetik dalganın mod sayılarıdır.

Böylelikle, $u^2 = \omega^2/c^2 - k^2 = \frac{\chi^2_{m,n}}{a^2}$ tanımı kullanılarak elde edilen rezonans frekansları,

$$f_{m,n,p} = \frac{c}{2\pi a}\sqrt{\chi^2_{m,n} + p^2\pi^2\left(\frac{a}{L}\right)^2} \tag{2.8}$$

şeklindedir (Jackson , 1975).

2.1.2. Küresel rezonans kavitesi içinde elektromanyetik dalga

a yarıçaplı küresel bir kavitede elektromanyetik dalga denklemini çözebilmek için, $x = rcos\theta sin\phi$, $y = rsin\theta sin\phi$ ve $z = rcos\theta$ koordinat dönüşümleri 2.2 denklemine uygulanırsa

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\right]\psi(r,\theta,\phi) = 0 \tag{2.9}$$

elde edilmektedir (Jackson , 1975). Bu denklemde ise, $\psi(r,\theta,\phi) = R(r)Y(\theta,\phi)$ değişkenlere ayırma metodu kullanılarak

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\right]R(r) = 0 \tag{2.10}$$

$$\left[\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + l(l+1)\right]Y(\theta,\phi) = 0 \tag{2.11}$$

radyal ve açısal denklemler elde edilmektedir (Jackson , 1975).

Radyal denklem, küresel Bessel diferansiyel denklemidir ve çözümü

$$R(r) = N_1 j_l(\frac{\omega r}{c}) + N_2 n_l(\frac{\omega r}{c}) \tag{2.12}$$

şeklindedir. Burada, $j_l(\frac{\omega r}{c})$ küresel Bessel fonksionu, $n_l(\frac{\omega r}{c})$ küresel Neumann fonksiyonu ve N_1, N_2 integrasyon sabitleridir.

Açısal denklem ise, kuantum mekaniğinden iyi bilinen küresel harmonik çözümlerini vermektedir ve açısal momentum operatörü cinsinden

$$L^2 Y_{lm} = l(l+1) Y_{lm} \tag{2.13}$$

şeklindedir. Açısal momentumun bileşenleri, arttırma-eksiltme operatörleri sayesinde

$$L_{\pm} Y_{lm} = \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} Y_{l,m\pm 1} \tag{2.14}$$

şeklindeki indirgeme bağıntılarını vermektedir (Jackson , 1975).

Küresel kaviteyi tanımlayan sınır koşulları,

$$\mathrm{j}_l(\omega r) = \begin{cases} 0, & r = 0 \text{ için} \\ 0, & r = a \text{ için} \end{cases} \tag{2.15}$$

Burada, a silindirik kavitenin yarıçapıdır. $r = 0$ için Neumann fonksiyonu $Y_m(ur)$ sonsuza gittiği için $N_2 = 0$ seçilmektedir. $r = a$ için küresel Bessel fonksiyonunu sıfır yapan değerler, $\rho_{l,n}$ Bessel fonksiyonunun kökleri olmak üzere $\frac{\omega a}{c} = \rho_{m,n}$ rezonans frekansını belirlemek için kullanılmaktadır. Ayrıca, n ve l elektromanyetik dalganın mod sayılarıdır.

Böylelikle, $\frac{\omega a}{c} = \rho_{m,n}$ tanımı kullanılarak bulunan rezonans frekansları

$$f_{l,n} = \frac{c\rho_{l,n}}{2\pi a} \tag{2.16}$$

şeklinde elde edilmektedir. Ayrıca,

$$\frac{dR(r)}{dr} = 0, \quad r = a \text{ için} \tag{2.17}$$

sınır koşulundan

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{l(l+1)}{a^2} = 0 \tag{2.18}$$

ifadesi elde edilir. Bu sınır koşulu ile birlikte, yaklaşık rezonans frekansı

$$f \approx \frac{c}{2\pi a}\sqrt{l(l+1)} \tag{2.19}$$

olarak elde edilmektedir. Bu frekans bağıntısına, iyonosfer tabakasında oluşan Schumann rezonansları da denilmektedir (Jackson , 1975).

2.1.3. Proca denklemi

Proca denklemi, klasik kütleli spin-1 relativistik parçacık denklemidir ve bu sistemin Lagranjiyeni

$$L = \frac{h^2c^2}{2}F_{rs}G_{rs} + m_0^2c^4\psi_r^*\psi_r \tag{2.20}$$

şeklinde verilmektedir. Burada,

$$F_{rs} = \partial_r\psi_{sr}^* - \partial_{sr}^*\psi_r \qquad G_{rs} = \partial_r\psi_s - \partial_s\psi_r \tag{2.21}$$

ikinci rank antisimetrik tensör olmak üzere

$$A_s = \frac{e}{hc}\Phi_s \qquad k = \frac{mc}{h} \tag{2.22}$$

olarak verilmektedir. Hareket denklemleri ise

$$(\partial_r + iA_r)F_{rs} = k^2\psi_r^* \qquad (\partial_r - iA_r)G_{rs} = k^2\psi_r \tag{2.23}$$

şeklindedir (Proca 1936, Greiner 2000)

2.2. Fotonun Relativistik Kuantum Mekaniksel Denklemleri

2.2.1. Duffin-Kemmer-Petiau denklemi

1930'larda ışığın kuantum mekaniksel teorisini kurmak için daha gerçekçi çalışmalar ortaya çıkmaya başlamıştır. Bu çalışmalara, Dirac (1928) tarafından oluşturulan elektronun relativistik kuantum mekaniksel teorisi ilham kaynağı olmuştur (de Broglie 1934, Petiau 1936). Bununla birlikte, Proca (1936) tarafından önerilen klasik tensör denkleminin (genelleştirilmiş Maxwell denklemleri) ikinci kuantizasyonu Duffin (1938) tarafından kovaryant formda yapılmıştır. Düz uzay-zamandaki bu denklem

$$\sum_s \beta_s p_s \psi = \mu\psi \tag{2.24}$$

şeklindedir (Duffin , 1938). Burada $p_s = \hbar\partial/i\partial_s$ kanonik momentum operatörü ve $\mu = m_0c/i$ olarak tanımlanmaktadır. Ayrıca, β_s matrisleri Dirac matrislerinden farklı olarak indirgenemeyen, 10x10'luk hermitik matrislerdir ve

$$\begin{aligned} &\beta_s^3 = \beta_s, \\ &\beta_s\beta_k^2 + \beta_k^2\beta_s = \beta_s \qquad s \neq k, \\ &\beta_s\beta_k\beta_l + \beta_l\beta_k\beta_s = 0 \qquad s \neq k, \quad l \neq k, \end{aligned} \tag{2.25}$$

şeklinde verilen Duffin komütasyon kuralını sağlamaktadır (Duffin , 1938). Bu kuralın sağlanması için gerekli koşul

$$\sum_{skl} \beta_s\beta_k\beta_l c_{skl} = \sum_{sk} \beta_s c_{skk} \tag{2.26}$$

şeklinde verilmektedir (Duffin , 1938).

Diğer taraftan Kemmer (1939) ise, Duffin denkleminin kuantizasyonunu, Lorentz değişmezliğini ve komütasyon kuralını kapsamlı şekilde incelemiştir. Kemmer'e göre, Duffin denklemi serbest mezon dalga denklemidir ve bu denklem kovaryant formda

$$\beta_\mu \partial_\mu \psi + \kappa\psi = 0 \tag{2.27}$$

şeklindedir (Kemmer , 1939). Burada $\kappa = m_0 c/\hbar$, $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$, $x_4 = ict$ ve β_μ komütasyon kuralı

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho + \beta_\rho \beta_\nu \beta_\mu = \beta_\mu \delta_{\nu\rho} + \beta_\rho \delta_{\nu\mu} \tag{2.28}$$

ile verilmektedir ve bu kural

$$\begin{aligned} &\eta_4 = 2\beta_4^2 - 1, \\ &\beta_4 = \eta_4\beta_4 = \beta_4 + \eta_4, \quad \eta_4^2 = 1, \\ &\eta_4\beta_k + \beta_k\eta_4 = 0 \qquad (k = 1,2,3), \end{aligned} \tag{2.29}$$

şeklinde verilen ilişkileri de sağlamaktadır (Kemmer , 1939). Ayrıca, adjoint spinör $\psi^\dagger = i\psi^*\eta_4$ şeklinde tanımlanırsa, 2.27 denklemi

$$\beta_\mu \partial_\mu \psi^\dagger - \kappa\psi^\dagger = 0 \tag{2.30}$$

şeklinde adjoint spinör denklemi olarak elde edilmektedir (Kemmer , 1939).

Kemmer'in yapmış olduğu diğer önemli bir katkı ise, β_μ matrislerini Dirac matrislerinin direk çarpımları cinsinden

$$\beta_\mu^{'} = \frac{1}{2}\left[\gamma_\mu I^{'} + I\gamma_\mu^{'}\right] \tag{2.31}$$

16x16'lık matrisleri elde etmiş olmasıdır . Bu katkısından dolayı, β_μ güncel kaynaklarda Kemmer matrisleri olarak geçmektedir. Böylece, düz uzay-zamanda 2.27 denklemi

$$\left(\gamma_\mu \otimes I + I \otimes \gamma_\mu\right)\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Psi + 2\kappa\Psi = 0 \tag{2.32}$$

şeklinde elde edilmektedir (Kemmer , 1939). Burada Ψ, iki Dirac fonksiyonunun çarpımından elde edilmiştir. Eğer $\Psi_{\alpha,\beta}$ dalga fonksiyonu $\alpha\beta$'ya göre iki simetrik Dirac spinörünün çarpımı ve β_μ 10x10'luk matrislere indirgenmektedir veya spin-1 kısmına ayrılmaktadır (Belinfante , 1939).

Son olarak Kemmer, Duffin formalizminin Hamilton formunu yazarak limit durumlarda spin-1 kısmı için Proca denklemini ve spin-0 kısmı için Klein-Gordon denklemini verdiğini göstermiştir. Dolayısıyla, fotonu kuantum mekaniksel olarak tanımlamaya yönelik ilk gerçekçi formalizm elde edilmiştir (Kemmer , 1939).

2.2.2. Barut modelindeki spin-1 parçacık denklemi

Barut (1989) tarafından yapılan çalışmada ise, spin-0 ve spin-1 parçacıklarının birbirine çok sıkı bağlı (zitterbewegung, Schrödinger 1930) iki tane spin-1/2 parçacıktan oluştuğu düşünülmüştür. Ancak, zitterbewegung klasik bir model olduğundan, bu modelin kovaryant formda birinci kuantizasyonu yapılarak kütleli spin-1 parçacığı için relativistik kuantum mekaniksel denklem elde edilmiştir. Düz uzay-zamanda yazılan bu denklem

$$\left(\beta^{\mu}\pi_{\mu}-M\right)\psi(x)=0 \tag{2.33}$$

şeklindedir (Barut , 1989). Burada π_{μ} kanonik momentum operatörü, $\beta^{\mu}=\left(\gamma^{\mu}\otimes I+I\otimes\gamma^{\mu}\right)/2$ Kemmer matrisleridir ve

$$\beta^{\mu}\beta^{\lambda}\beta^{\nu}+\beta^{\nu}+\beta^{\lambda}\beta^{\mu}=\beta^{\mu}\delta^{\lambda\nu}+\beta^{\nu}\delta^{\lambda\mu} \tag{2.34}$$

şeklinde verilen DKP komütasyon kuralını sağlamaktadır.

Sucu ve Ünal (2005) tarafından yapılan çalışmada ise, Barut modelinin $M^2\rightarrow 0$ limitinde foton çözümlerini ve genişleyen evreni tartışabilmek için Barut modeli eğri uzay-zamana genelleştirilmiştir. Eğri uzay-zamanda yazılan bu denklem

$$\left\{i\left[\gamma^{\mu}(x)\otimes I+I\otimes\gamma^{\mu}(x)\right]\left[\partial_{\mu}-\Gamma_{\mu}^{DKP}(x)\right]-2M\right\}_{\alpha\beta,\gamma\delta}\psi_{\gamma\delta}=0 \tag{2.35}$$

şeklindedir (Sucu ve Ünal, 2005). Burada $\gamma^{\mu}(x)$ eğri uzay-zamanda Dirac matrisleri, $\Gamma_{\mu}^{DKP}(x)$ eğri uzay-zamanda spin1/2 bağlantı katsayısı ve $\psi_{\gamma\delta}$ simetrik dalga fonksiyonu olarak seçilmiştir. Denklem 2.35 çözümleri $M^2\rightarrow 0$ limitinde Maxwell denklemlerini vermektedir. Sonuç olarak, 2.35 denklemi kütleli spin-1 parçacıkları için kullanılabileceği gibi kütlesiz foton için de kullanılabilmektedir.

Ünal (1997) tarafından yapılan çalışmada da, zitterbewegungun klasik modelinin kuantizasyonu sonucunda relativistik kütlesiz foton için,

$$\left[2\frac{\partial}{\partial t}(\psi^{+}I\otimes I\psi)+\vec{\nabla}\left(\psi^{+}(\vec{\sigma}\otimes I+I\otimes\vec{\sigma})\psi\right)\right]=0 \tag{2.36}$$

şeklinde yeni bir denklem elde edilmiştir (Ünal , 1997). Burada, $\vec{\sigma}$ Pauli matrisleridir.

Kütlesiz spin-1 parçacık denkleminin eğri-uzay zamandaki uygulaması Sucu ve Ünal (2002) tarafından yapılmıştır ve eğri uzay-zamandaki kütlesiz spin-1 parçacık denklemi

$$\left\{2iI\otimes I\frac{\partial}{\partial t}-\vec{\Sigma}(x)\left[\vec{p}+i\vec{\Gamma}(x)\otimes I+I\otimes i\vec{\Gamma}(x)\right]\right\}\Phi(\vec{x},t)=0 \tag{2.37}$$

şeklinde verilmiştir (Sucu ve Ünal , 2002). Burada $\vec{\Sigma}(x)=\vec{\sigma}(x)\otimes I+I\otimes\vec{\sigma}(x)$ Pauli matrislerinden oluşan 4x4'lük matrisler ve $\vec{\Gamma}(x)\otimes I+I\otimes\vec{\Gamma}(x)$ spin-1 bağlantı katsayısıdır.

Bu denklemden elde edilen çözümler, DKP denkleminin kütlesiz spin-1 parçacık limitini vermektedir. Sonuç olarak, 2.36 denklemi relativistik kuantum mekaniksel kütlesiz spin-1 parçacık denklemidir.

Tez kapsamında kullanılan, eğri uzay-zamandaki kütlesiz spin-1 parçacık denklemi

$$i\hbar\Sigma^{\mu}(x)D_{\mu}(x)\psi(x,t) = 0 \qquad x^4 = ct \tag{2.38}$$

şeklinde kovaryant formda yazılmaktadır (Sucu ve Ünal , 2002). Basitlik için, sabitler $\hbar = c = 1$ alınmaktadır ve $\psi(x,t)$ 4x1 simetrik dalga fonkiyonudur. Burada, 4x4 $\Sigma^{\mu}(x)$ matrisleri

$$\Sigma^{\mu}(x) = \sigma^{\mu}(x)\otimes I + I\otimes\sigma^{\mu}(x) \tag{2.39}$$

2x2 Pauli matrislerinden oluşmaktadır ve kovaryant türev işlemcisi

$$D_{\mu}(x) = \partial_{\mu} + \Lambda_{\mu}(x) \tag{2.40}$$

ve spin-1 bağlantı katsayısı

$$\Lambda_{\mu}(x) = \Gamma_{\mu}(x)\otimes I + I\otimes\Gamma_{\mu}(x) \tag{2.41}$$

olarak verilmektedir. Spin-1/2 bağlantı katsayısı ise

$$\Gamma_{\mu}(x) = -\frac{1}{4}g_{\alpha\lambda}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}S^{\lambda\nu} \tag{2.42}$$

ile hesaplanmaktadır. Burada, $g_{\alpha\lambda}$ metrik tensör, $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ ikinci çeşit Christofel sembolleri ve $S^{\lambda\nu}$ spin komütasyonudur. İkinci çeşit Christofel sembolleri

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(g_{\mu\beta;\nu} + g_{\nu\beta;\mu} - g_{\mu\nu;\beta}\right) \tag{2.43}$$

şeklinde hesaplanırken, spin komütasyonu

$$S^{\lambda\nu} = \frac{1}{2}[\sigma^{\lambda}(x),\sigma^{\nu}(x)] \tag{2.44}$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Burada, $\sigma^{\mu}(x) = \left(I,\vec{\sigma}\right)$ şeklindedir.

Düz uzay-zamandan eğri uzay-zamana geçiş tetradlar ile yapılmaktadır. Tetradlar ise

$$g^{\mu\nu} = e^{\mu}_{a}(x)e^{\nu}_{b}(x)\eta^{ab} \tag{2.45}$$

denkleminden bulunmaktadır. Burada, $e^{\mu}_{a}(x)$ tetrad ve η^{ab} Minkowski metrik tensörüdür. Böylece, eğri uzay-zamandaki Pauli matrisleri

$$\sigma^{\mu}(x) = e^{\mu}_{a}(x)\sigma^{a} \qquad \sigma^{a} = \sigma_{a} \tag{2.46}$$

dönüşümüyle elde edilmektedir.

Tez kapsamında kullanılan, 3+1 boyutlu eğri uzay-zamandaki kütleli foton denklemi

$$\left[\beta^{\mu}(x)D_{\mu}(x)+iM\right]\psi_{\alpha\beta}(x,t)=0 \qquad x^4=ct \qquad M=\frac{m_0 c}{\hbar} \tag{2.47}$$

şeklinde kovaryant formda verilmektedir (Sucu ve Ünal, 2005). Burada, $\psi_{\alpha\beta}$ dalga fonksiyonunun $\alpha\beta$'ya göre simetrik dalga fonksiyonudur ve basitlik için, sabitler $\hbar = c = 1$ alınmaktadır. Ayrıca, Kemmer matrisleri

$$\beta^{\mu}=\frac{1}{2}\left(\gamma^{\mu}\otimes I+I\otimes\gamma^{\mu}\right) \tag{2.48}$$

şeklindedir ve

$$\beta^{\mu}\beta^{\lambda}\beta^{\nu}+\beta^{\nu}\beta^{\lambda}\beta^{\mu}=\beta^{\mu}g^{\lambda\nu}+\beta^{\nu}g^{\lambda\mu} \tag{2.49}$$

ile verilen Duffin-Kemmer-Petiau ilişkisini sağlamaktadır.

Eğri uzay-zamandaki Dirac matrisleri

$$\gamma^{\mu}(x)=e^{\mu}_{a}(x)\gamma^{a} \qquad \gamma^{a}=\gamma_{a} \tag{2.50}$$

dönüşümüyle elde edilmektedir. Burada $e^{\mu}_{a}(x)$ tetradları 2.45 denklemi ile hesaplanmaktadır. Ayrıca, Dirac matrisleri

$$\gamma^{\mu}(x)\gamma^{\nu}(x)+\gamma^{\nu}(x)\gamma^{\mu}(x)=2g^{\mu\nu} \tag{2.51}$$

şeklinde verilen antikomütasyon ilişkisini sağlamalıdır.

3. MATERYAL VE METOD

3.1. Kütle Çekimsel Kırmızıya Kayma Metrikleri

Silindirik ve küresel uzay-zamanda iki nokta arası uzaklığı tanımlayan metrik tensör, en genel halde sırasıyla

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}dr^2 - r^2e^{2\beta(r)}d\phi^2 - e^{2\delta(r)}dz^2 + e^{2\gamma(r)}dt^2 \tag{3.1}$$

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}dr^2 - r^2e^{2\beta(r)}d\theta^2 - r^2e^{2\beta(r)}sin^2\theta d\phi^2 + e^{2\gamma(r)}dt^2 \tag{3.2}$$

şeklindedir (Bronnikov ve Korolyov , 2017). Burada, en genel haldeki metrik tensör $g_{\mu\nu}$, radyal katsayılarından oluşmaktadır.

Kütle çekim alanının varlığındaki bir ortam, optik ortam olarak düşünülebildiği için, buradaki metrik katsayılar dereceli kırılma indisi fonksiyonunu temsil etmektedir. Katsayıların sabit olduğu durum, basamak kırılma indisini ifade etmektedir. Öte yandan bu metrikler, $\alpha = \beta = \delta = ln\sqrt{A(r)}$, $\gamma = ln\sqrt{B(r)}$ seçiminde Xue-Jun ve Chong-ming (1988) tarafından önerilen ve $\alpha = \beta = \delta = -ln\Phi(r)$, $\gamma = ln\Omega(r)$ seçiminde ise Evans vd (1996)tarafından önerilen ışıksal (null) metrik tensöre indirgenmektedir. Işıksal metrik tensör ile ışığın izlediği yol, kütle çekimsel kırmızıya kayma ve uzay-zamanın etkin kırılma indisi hesaplanabilmektedir. $ds^2 = 0$ durumunda ışığın izlediği yolun zamanla değişimi

$$c(\mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = c_0\Phi(r)\Omega(r) = \frac{c_0}{n_{eff}(r)} \tag{3.3}$$

ve buradan etkin kırılma indisi, $n_{eff}(r)$,

$$n_{eff}(r) = \frac{1}{\Phi(r)\Omega(r)} \tag{3.4}$$

ve kırmızıya kayma miktarı

$$z = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} - 1 = \frac{1}{\Omega(r)} - 1 \tag{3.5}$$

ile hesaplanabilmektedir (Evans vd , 1996). Burada, λ_e kaynaktan yayınlanan ışığın dalgaboyu ve λ_o ölçülen dalgaboyudur.

3.2. Kütleli Spin-1 Alanı ile Kütle Çekimsel Alanın Minimal Çiftlenimi

Tez kapsamında, dereceli kırılma indisine sahip silindirik bir kavitenin kırılma indisi, kütleli spin-1 vektör bozon denklemi çözülerek belirlenecektir. 3+1 boyutlu standart Einstein kütle çekim teorisi çerçevesinde kırılma indisi fonksiyonunu belirleyebilmek için, kütleli spin-1 alanı ile kütle çekimsel alan minimal bir şekilde çiftlenim edilerek hareket denklemleri yazılacaktır.

Einstein-Hilbert eylem fonksiyonu

$$S_{E-H} = \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\sqrt{|g|}(R-2\Lambda) \tag{3.6}$$

şeklindedir. Burada, $\kappa = 8\pi G/c^4$ Einstein alan denkleminin sabiti ve Λ kozmolojik sabittir.

Einstein-Hilbert eylem fonksiyonunun metriğe göre varyasyonu alınırsa

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{3.7}$$

denklemi elde edilir. Burada, $G_{\mu\nu}$ Einstein tensörü, $T_{\mu\nu}$ enerji-momentum tensörü, $g_{\mu\nu}$ eğrisel uzay-zamanda kovaryant metrik, R Ricci skaleri ve $R_{\mu\nu}$ kovaryant Ricci tensörü olmak üzere

$$\begin{aligned} &R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \\ &R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} \\ &R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\delta;\gamma} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma;\delta} + \Gamma^{\mu}{}_{\beta\delta}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\gamma} - \Gamma^{\mu}{}_{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\delta} \end{aligned} \tag{3.8}$$

şeklinde $\Gamma^{\alpha}{}_{\nu}$ Christoffel sembolleri cinsinden hesaplanır. Burada, $R^{\alpha}{}_{\mu\beta\delta}$ Riemann tensörüdür (Weinberg , 1972).

Enerji-momentum tensörü ortonormal tabanda

$$T_{\hat{a}\hat{b}} = e^{\mu}_{a}e^{\nu}_{b}T_{\mu\nu} \tag{3.9}$$

ile hesaplanmaktadır. Burada, e^{μ}_{a} denklem 2.45 ile hesaplanan ortonormal vektör bileşenleri veya tetradlardır.

Küresel koordinatlardaki enerji-momentum tensörünün köşegen bileşenleri

$$T_{\hat{t}\hat{t}} = \rho(r)c^2 \qquad T_{\hat{r}\hat{r}} = -\tau(r) \qquad T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = T_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = p(r) \tag{3.10}$$

olarak verilmektedir. Burada, $\rho(r)$ kütle-enerji yoğunluğu, $\tau(r)$ radyal gerilme ve $p(r)$ yanal(açısal) basınç olarak tanımlanmaktadır. Silindirik koordinatlarda ise

$$T_{\hat{t}\hat{t}} = \rho(r)c^2 \qquad T_{\hat{r}\hat{r}} = -\tau(r) \qquad T_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = p(r) \qquad T_{\hat{z}\hat{z}} = p(z) \tag{3.11}$$

olarak verilmektedir. Burada, küresel koordinatlardaki tensör bileşenlerinden farklı olarak $p(z)$ z doğrultusundaki dikey basınç vardır (Misner vd , 1973).

Einstein'ın kütle çekim teorisi kapsamında, kütle çekimsel alanı ile 2.47 denkleminde verilen kütleli spin-1 alanının minimal çiftlenmiş eylem fonksiyonu

$$\begin{aligned} S = \int d^4x\sqrt{|\,g\,|}\Bigg\{ &\frac{1}{2}(R-2\Lambda) \\ &+ \frac{i}{2}\left[\overline{\psi}\beta^{\mu}(D_{\mu}\psi) - (\overline{D_{\mu}\psi})\beta^{\mu}\psi\right] - [M\Psi + V(\Psi)]\Bigg\} \end{aligned} \tag{3.12}$$

şeklindedir. Burada ψ spinör, $\bar{\psi}$ spinörün adjointi olmak üzere

$$\bar{\psi} = \psi^{\dagger}\eta^{4} \qquad \text{ve} \qquad \eta^{4} = 2(\beta^{4})^{2} - I \tag{3.13}$$

ile hesaplanmaktadır. Ayrıca, $\Psi = \bar{\psi}\psi$ bilineer fonksiyon ve $V(\Psi)$ etkileşme potansiyelidir. Bu çalışmada, kozmolojik sabit $\Lambda = 0$ ve geometrik sabitler $G = \hbar = c = 1$ alınmaktadır.

Bu tez kapsamında, basamak kırılma indisine sahip silindirik ve küresel uzay-zaman zeminleri için 2.38 denklemi ile verilen kovaryant formdaki kütlesiz spin-1 parçacık denklemi kullanılmaktadır ve bu denklemin çözümlerinden kavitenin rezonans frekansları hesaplanmaktadır. Dereceli kırılma indisine sahip silindirik uzay-zaman zeminleri için 2.47 denklemi ile verilen kovaryant formdaki kütleli spin-1 parçacık denklemi kullanılmaktadır. Çözüm aşamasında ilk olarak, kütleli spin-1 alanı ile kütle çekimsel alanın minimal çiftlenimi durumunda 3.12 denkleminde verilen eylem fonksiyonundan,

$$L = \int d^{3}x\sqrt{|g|}\left(\frac{R}{2} - [M\Psi + V(\Psi)] + \frac{i}{2}\left[\overline{\psi}\beta^{\mu}(\partial_{\mu}\psi) - (\overline{\partial_{\mu}\psi})\beta^{\mu}\psi\right]\right) \tag{3.14}$$

Lagranjiyen elde edilmektedir. Lagranjiyendeki tüm ikinci mertebe türevlerden, integralin sınırlarındaki toplam türevin sıfır olmasından faydalanılarak kurtulduktan sonra elde edilen Lagranjiyenden sırasıyla,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dr}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{'}}\right) = 0, \tag{3.15}$$

$$E_L = q_i^{'}\frac{\partial L}{\partial q_i^{'}} - L = 0, \tag{3.16}$$

hareket ve Hamilton kısıtlama denklemleri elde edilmektedir. Burada, $i = 1...4$ olmak üzere $q_i = \{\alpha, \beta, \delta, \gamma, \psi, \overline{\psi}\}$ şeklindedir ve $(^{'})$ ile verilen kesme işareti, r değişkenine göre adi türev olarak kullanılmaktadır. Bu denklemlerin çözümünden, dereceli kırılma indisi fonksiyonları ve etkileşme potansiyelleri tespit edilmektedir. İkinci olarak, belirlenen kırılma indisleri 2.47 denkleminde kullanılarak kütleli spin-1 parçacık denkleminin çözümünden kavitenin rezonans frekansları elde edilmektedir.

3.3. Diferansiyel Denklemler

Kütleli ve kütlesiz spin-1 parçacık denklemi birinci mertebeden türevler içeren matris şeklinde temsil edilir. Bu parçacığı temsil eden matristeki her bir diferansiyel denklem Klein-Gordon denklemini sağlar. Böylece, spin-1 parçacık denkleminin çözümlerinden gelen ikinci mertebe diferansiyel denklemler, Bessel ve Heun denklemleri türündendir. Elde edilen diferansiyel denklemlerin çözümlerinden kavitelerin rezonans frekansları bulunabilmektedir ve bu diferansiyel denklemlerin Schödinger tipi diferansiyel denklemlere dönüştürülmesi, etkin potansiyellerin bulunabilmesini sağlamaktadır. Bu nedenle, en genel halde ikinci mertebeden değişken katsayılı lineer homojen diferansiyel denklemi

$$y''(x)+P(x)y'(x)+Q(x)y(x)=0 \tag{3.17}$$

olarak verilmektedir. Bu denklemi Schrödinger tipi diferansiyel denkleme dönüştürmek için $y(x)=g(x)f(x)$ fonksiyon dönüşümü yapılırsa

$$f''(x)+\left(\frac{2g'(x)}{g(x)}+P(x)\right)f'(x)+\left(Q(x)+\frac{P(x)g'(x)}{g(x)}+\frac{g''(x)}{g(x)}\right)f(x)=0 \tag{3.18}$$

elde edilmektedir. Fonksiyon dönüşümündeki $g(x)$

$$g(x)=e^{-\frac{1}{2}\int P(x)dx} \tag{3.19}$$

şeklindedir. Böylece, Schrödinger tipi diferansiyel denklem

$$f''(x)+\left(Q(x)-\frac{P^2(x)}{4}-\frac{P'(x)}{2}\right)f(x)=0 \tag{3.20}$$

şeklinde elde edilmektedir (Arfken ve Weber , 2005). Burada $Q(x)-\frac{P^2(x)}{4}-\frac{P'(x)}{2}$ kısmına etkin potansiyel denilmektedir. Etkin potansiyelin içerdiği fonksiyonların türüne göre (3.20) denkleminin herzaman analitik çözümü bulunmamaktadır. Böyle durumlarda yaklaşık çözüm bulma teknikleri kullanılır.

3.3.1. Bessel diferansiyel denklemi

Bessel diferansiyel denklemi

$$y''(x)+\frac{1}{x}y'(x)+\left(u^2-\frac{m^2}{x^2}\right)y(x)=0 \tag{3.21}$$

şeklindedir (Abramowitz ve Stegun , 1964) ve çözümleri

$$y(x)=C_1J_m(ux)+C_2Y_m(ux) \tag{3.22}$$

şeklindedir. $J_m(ux)$ fonksiyonu $0<x<\infty$ aralığında sönümlenen çözümleri ifade etmektedir. $Y_m(x)$ fonksiyonu $x\to 0$ durumunda ıraksaktır; $x\to\infty$ durumunda ise sönümlenen titreşim yaparak sıfıra yakınsamaktadır. Dalga fonksiyonunun sonlu ve sınırlarda sürekli olma şartları uygulanırsa $C_2=0$ ve $J_m(ua)=0$ olmaktadır. Böylece, $\chi_{m,n}$ Bessel kökleri olmak üzere polinom olma şartı

$$u=\frac{\chi_{m,n}}{a} \tag{3.23}$$

olarak bulunmaktadır (Jackson , 1975).

Etkin potansiyeli bulabilmek için (3.21) denkleminde $y(x) = f(x)/\sqrt{x}$ dönüşümü yapılırsa

$$f''(x) + \left(u^2 - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) f(x) = 0 \tag{3.24}$$

Schrödinger tipi diferansiyel denkleme benzemektedir. Çözümleri ise

$$f(x) = C_1 \sqrt{x} J_m(ux) \tag{3.25}$$

şeklindedir.

3.3.2. Konfluent Heun diferansiyel denklemi

Konfluent Heun diferansiyel denklemi

$$\begin{aligned} & y''(x) + \left[\frac{\alpha x^2 + (2+\beta+\gamma-\alpha)x - 1 - \beta}{x(x-1)}\right] y'(x) \\ & + \left[\frac{\big((2+\beta+\gamma)\alpha + 2\delta\big)x - (1+\beta)\alpha + (1+\gamma)\beta + \gamma + 2\gamma}{2x(x-1)}\right] y(x) = 0 \end{aligned} \tag{3.26}$$

şeklindedir (Ronveaux ve Arscott , 1995) ve çözümleri

$$y(x) = C_1 H_C(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, x) + C_2 x^{-\beta} H_C(\alpha, -\beta, \gamma, \delta, \eta, x) \tag{3.27}$$

ile verilmektedir. Çözümdeki ikinci kısım $x \to 0$ durumunda, $x^{-\beta}$ teriminden dolayı ıraksamaktadır. Dalga fonksiyonunun sonlu ve sınırlarda sürekli olma şartları uygulanırsa, $C_2 = 0$ ve $H_C(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, a) = 0$ olmaktadır. Polinom olma şartı

$$\delta = -\left[n + \frac{\beta+\gamma+2}{2}\right]\alpha \qquad (n = 1, 2, 3...) \tag{3.28}$$

şeklinde verilmektedir.

3.3.3. Modifiye Bikonfluent Heun diferansiyel denklemi

Modifiye bikonfluent Heun diferansiyel denklemi

$$y''(x) + \left(\frac{1+\alpha}{x} - \beta - 2\varepsilon x\right) y'(x) + \left(\gamma - \alpha\varepsilon - 2\varepsilon - \frac{\delta}{2x} - \frac{\beta(1+\alpha)}{2x}\right) y(x) = 0 \tag{3.29}$$

şeklindedir (Ronveaux ve Arscott , 1995) ve $\rho = \sqrt{\varepsilon} x$ değişken dönüşümü yapılırsa,

$$y''(\rho) + \left(\frac{1+\alpha}{\rho} - \frac{\beta}{\sqrt{\varepsilon}} - 2\rho\right) y'(\rho) + \left(\frac{\gamma}{\varepsilon} - \alpha - 2 - \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}\rho} - \frac{\beta(1+\alpha)}{2\sqrt{\varepsilon}\rho}\right) y(\rho) = 0 \tag{3.30}$$

elde edilir ve $y(\rho) = \rho^{-(1+\alpha)/2} e^{\rho(\rho+\beta/\sqrt{\varepsilon})/2} f(\rho)$ dönüşümü yapılırsa,

$$f''(\rho) + \left(-\rho^2 - \frac{\beta\rho}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\gamma}{\varepsilon} - \frac{\beta^2}{4\varepsilon} - \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}\rho} + \frac{1-\alpha^2}{4\rho^2} \right) f(\rho) = 0 \tag{3.31}$$

Schrödinger tipi diferansiyel denkleme benzemektedir. Sınırlarda sonlu olan çözümleri ise,

$$f(\rho) = C_1 x^{(1+\alpha)/2} e^{-\rho(\rho+\beta/\sqrt{\varepsilon})/2} H_B(\alpha, \frac{\beta}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{\gamma}{\varepsilon}, \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}, \rho) \tag{3.32}$$

şeklindedir. Polinom olma şartı

$$\frac{\gamma}{\varepsilon} - \alpha = 2n + 2 \tag{3.33}$$

şeklinde verilmektedir.

4. BULGULAR

Bu bölümde, öncelikle silindirik ve küresel simetrik kavitelerde kütlesiz spin-1 parçacık denkleminin çözümleri ve rezonans frekansları elde edilmektedir. İkinci aşamada, radyal dereceli kırılma indisi fonksiyonuna sahip silindirik ve küresel uzay-zamanda kütleli spin-1 parçacık denkleminin $M^2 \to 0$ limitindeki çözümleri elde edilmektedir. Üçüncü aşamada, kütle çekimsel alan ile kütleli spin-1 alanının minimal çiftlenimi için yazılan eylem fonksiyonundan elde edilen hareket denklemlerinin çözülmesiyle radyal kırılma indisleri belirlenmektedir. Son olarak, belirlenen bu kırılma indisi fonksiyonları en genel halde elde edilen kütleli spin-1 parçacık denkleminin çözümlerinde kullanılarak, silindirik ve küresel kavitelerin rezonans frekansları elde edilmektedir.

4.1. Basamak Kırılma İndisine Sahip Kavitelerde Kütlesiz Spin-1 Parçacık Denkleminin Çözümleri

4.1.1. Silindirik kavitede kütlesiz spin-1 parçacığı

Bu kısımda, silindirik kavitedeki Maxwell denklemlerinin çözümleri ile kütlesiz spin-1 parçacık denkleminin çözümlerini karşılaştırmak için 2.38 denklemi çözülmektedir. Silindirik simetrik uzay-zamandaki metrik tensör 3.1 denkleminde $\alpha = \beta = \delta = \gamma = 0$ koşulu uygulanarak

$$g_{\mu\nu} = diag\left[1, -r^2, -1, -1\right] \tag{4.1}$$

şeklinde bulunmaktadır. Minkowski metrik tensörü ise, $\eta^{ab} = diag[1, -1, -1, -1]$ şeklindedir. Eğri uzay-zamana geçiş için 2.45 denkleminden tetradlar hesaplanırsa,

$$e_a^\mu = \left[1, \frac{1}{r}, 1, 1\right] \tag{4.2}$$

şeklinde bulunur ve 2.46 denkleminden eğri uzay-zamandaki Pauli matrisleri

$$\sigma^1(x) = \sigma_1, \qquad \sigma^2(x) = \frac{1}{r}\sigma_2, \qquad \sigma^3(x) = \sigma_3, \qquad \sigma^4(x) = \sigma_4, \tag{4.3}$$

olarak elde edilir. Bu matrislerle 2.42 denklemindeki spin bağlantı terimleri hesaplanırsa,

$$\Gamma_1 = \Gamma_3 = \Gamma_4 = 0 \qquad \text{ve} \qquad \Gamma_2 = -\frac{i}{2}\sigma_3 \tag{4.4}$$

şeklinde bulunur.

Çözüm için silindirik simetrik dalga fonksiyonu önerisi

$$\psi(r, \phi, z, t) = e^{i\omega t} e^{im\phi} e^{ikz} \begin{bmatrix} R_+(r) \\ R_0(r) \\ R_0(r) \\ R_-(r) \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

yapılıp, hesaplanan spin bağlantı terimleri ile birlikte 2.38 denkleminde yerine konulursa,

$$i(\omega+k)R_{+}+(\frac{d}{dr}+\frac{m}{r})R_{0}=0 \tag{4.6}$$

$$2i\omega R_{0}+(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r})(R_{+}+R_{-})-\frac{m}{r}(R_{+}-R_{-})=0 \tag{4.7}$$

$$i(\omega-k)R_{-}+(\frac{d}{dr}-\frac{m}{r})R_{0}=0 \tag{4.8}$$

olmak üzere üç tane birinci mertebeden diferansiyel denklem takımı elde edilir. Bu denklemler düzenlenirse,

$$R_{0}^{''}+\frac{1}{r}R_{0}^{'}+(\omega^{2}-k^{2}-\frac{m^{2}}{r^{2}})R_{0}=0 \tag{4.9}$$

Bessel diferansiyel denklemi elde edilir ve $u^2=\omega^2-k^2$ olmak üzere spinörün $R_0(r)$ bileşeni

$$R_{0}(r)=N_{1}J_{m}(ur)+N_{2}Y_{m}(ur) \tag{4.10}$$

olarak elde edilir. Burada, $J_m(ur)$ Bessel fonksiyonu, $Y_m(ur)$ Neumann fonksiyonu ve N_1, N_2 integrasyon sabitleridir.

Silindirik kaviteyi tanımlayan sınır koşulları,

$$\begin{aligned} J_{m}(ur)&=\begin{cases}0, & r=0 \text{ için}\\ 0, & r=a \text{ için'}\end{cases}\\ e^{ikz}&=C_{1}cos(kz)+C_{2}sin(kz)=\begin{cases}0, & z=0 \text{ için}\\ 0, & z=L \text{ için}\end{cases}\end{aligned} \tag{4.11}$$

şeklindedir. Burada, a silindirik kavitenin yarıçapı, L silindirik kavitenin boyudur. $r=0$ için Neumann fonksiyonu $Y_m(ur)$ sonsuza gittiği için $N_2=0$ seçilmektedir. $r=a$ için Bessel fonksiyonunu sıfır yapan değerler, $\chi_{m,n}$ Bessel fonksiyonunun kökleri olmak üzere $ua=\chi_{m,n}$ rezonans frekansını belirlemek için kullanılmaktadır. Diğer taraftan, $z=0$ koşulundan $C_1=0$ olması gerektiği ve $z=L$ koşulundan $kL=p\pi$ olması gerektiği anlaşılmaktadır. Ayrıca, m, n ve p kuantum sayılarıdır.

Spinörün diğer bileşenlerini bulmak için, Bessel fonksiyonunun indirgeme bağıntıları kullanılırsa,

$$R_{+}=iN_{1}\frac{\omega-k}{u}J_{m-1}(ur) \tag{4.12}$$

$$R_{-}=-iN_{1}\frac{\omega+k}{u}J_{m+1}(ur) \tag{4.13}$$

olarak bulunur.

$u^2 = \omega^2/c^2 - k^2$ olarak tanımlandığı hatırlanırsa, rezonans frekansları

$$f_{m,n,p} = \frac{c}{2\pi a}\sqrt{\chi^2_{m,n} + p^2\pi^2\big(\frac{a}{L}\big)^2} \tag{4.14}$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak, bulunan kuantum mekaniksel rezonans frekansı 2.8 denklemiyle tam olarak denktir. Böylece, Sucu ve Ünal (2002) tarafından önerilen kütlesiz spin-1 parçacık denkleminin tutarlılığı gösterilmiştir.

4.1.2. Küresel kavitede kütlesiz spin-1 parçacığı

Bu kısımda, küresel kavitedeki Maxwell denklemlerinin çözümleri ile kütlesiz spin-1 parçacık denkleminin çözümlerini karşılaştırmak için 2.38 denklemi çözülmektedir. Küresel simetrik uzay-zamandaki metrik tensör 3.1 denkleminde $\alpha = \beta = \delta = \gamma = 0$ koşulu uygulanarak

$$g_{\mu\nu} = diag\left[1, -r^2, -r^2 sin^2\theta, -1\right] \tag{4.15}$$

şeklinde bulunmaktadır. Minkowski metrik tensörü ise, $\eta^{ab} = diag[1,-1,-1,-1]$ şeklindedir. Eğri uzay-zamana geçiş için 2.45 denkleminden tetradlar hesaplanırsa,

$$e^{\mu}_{a} = \left[1, \frac{1}{r}, \frac{1}{rsin\theta}, 1\right] \tag{4.16}$$

şeklinde bulunur.

Kütlesiz spin-1 parçacık denklemi koordinat döndürmelerinde de invaryant kaldığı için, Pauli matrislerine

$$S(\theta^{'}, \phi^{'}) = e^{-\frac{i}{2}\sigma^2\theta^{'}} e^{-\frac{i}{2}\sigma^3\phi^{'}} \tag{4.17}$$

döndürme işlemcisi uygulanabilmektedir (Sucu ve Ünal , 2002). Böylece, döndürülmüş Pauli matrisleri

$$\sigma_1 \to -\sigma_3 \quad ,\sigma_2 \to -\sigma_1 \quad ,\sigma_3 \to -\sigma_2, \quad \sigma_4 \to \sigma_4, \tag{4.18}$$

olarak bulunmaktadır.

Hesaplanan tetradları kullanarak, 2.46 denkleminden eğri uzay-zamandaki Pauli matrisleri

$$\sigma^1(x) = -\sigma_3, \qquad \sigma^2(x) = -\frac{1}{r}\sigma_1, \qquad \sigma^3(x) = -\frac{1}{rsin\theta}\sigma_2, \qquad \sigma^4(x) = \sigma_4, \tag{4.19}$$

olarak elde edilir. Bu matrislerle 2.42 denklemindeki spin bağlantı terimleri hesaplanırsa,

$$\Gamma_1 = \Gamma_4 = 0, \qquad \Gamma_2 = -\frac{i}{2}\sigma_2, \qquad \Gamma_3 = \frac{i}{2}sin\theta\sigma_1 - \frac{i}{2}cos\theta\sigma_3, \tag{4.20}$$

şeklinde bulunur.

Hesaplanan spin bağlantı terimleri ile birlikte 2.38 denkleminde yerine konulursa,

$$2rI\otimes I\partial_t\psi-\left\{\Sigma_3(r\partial_r+1)+\left(\Sigma_1\partial_\theta+\Sigma_2\left[\frac{\partial_\phi}{sin\theta}-\frac{icot\theta}{2}\Sigma_3\right]\right)\right\}\psi=0 \tag{4.21}$$

elde edilmektedir. Biraz daha işlem yapılırsa, yukarıdaki denklem

$$2rI\otimes I\partial_t\psi-\left\{\Sigma_3(r\partial_r+1)-(\Sigma_+\partial_+-\Sigma_-\partial_-)\right\}\psi=0 \tag{4.22}$$

olarak yazılır. Burada,

$$\begin{aligned}\Sigma_\pm&=\frac{1}{2}\big(\Sigma_1\pm i\Sigma_2\big),\\ \Sigma_b&=(\sigma_b\otimes I+I\otimes\sigma_b),\qquad (b=1,2,3)\end{aligned} \tag{4.23}$$

ve arttırma-eksiltme işlemcisi

$$\partial_\pm=\mp\partial_\theta+\frac{i}{\sin\theta}\partial_\phi+\frac{\Sigma_3}{2}cot\theta \tag{4.24}$$

olarak tanımlanmaktadır ve özdeğerleri ise,

$$\partial_\pm D^j_{\alpha,m}=\sqrt{(j\pm\alpha+1)(j\mp\alpha)}D^j_{\alpha\pm1,m} \tag{4.25}$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Burada, j toplam açısal momentum kuantum sayısıdır.

Çözüm için küresel simetrik dalga fonksiyonu önerisi

$$\psi(r,\theta,\phi,t)=e^{i\omega t}\begin{bmatrix}R_+(r)D^j_{+1,m}(\theta,\phi)\\ R_0(r)D^j_{0,m}(\theta,\phi)\\ R_0(r)D^j_{0,m}(\theta,\phi)\\ R_-(r)D^j_{-1,m}(\theta,\phi)\end{bmatrix} \tag{4.26}$$

yapılıp, 4.22 denkleminde yerine konulursa, arttırma-eksiltme operatörleri sayesinde açısal kısmın özdeğerleri de hesaplanabilmektedir. Burada, $D^j_{\alpha,m}(\theta,\phi)$ küresel harmonik fonksiyonudur ve

$$\left[\Sigma_1\partial_\theta+\Sigma_2\Big(\frac{\partial_\phi}{sin\theta}-\frac{icot\theta}{2}\Sigma_3\Big)\right]D^j_{\alpha,m}=-\left[\Sigma_+\partial_+-\Sigma_-\partial_-\right]D^j_{\alpha,m} \tag{4.27}$$

şeklinde özdeğerleri bulunabilmektedir. Böylece, geriye kalan radyal denklemler

$$(-i\omega+\frac{d}{dr}+\frac{1}{r})R_+-\frac{\sqrt{j(j+1)}}{r}R_0=0 \tag{4.28}$$

$$2i\omega R_0 - \frac{\sqrt{j(j+1)}}{r}(R_+ - R_-) = 0 \tag{4.29}$$

$$(i\omega + \frac{d}{dr} + \frac{1}{r})R_- - \frac{\sqrt{j(j+1)}}{r}R_0 = 0 \tag{4.30}$$

birinci mertebeden diferansiyel denklemlerdir. Bu denklemlerde $f_+ = R_+ + R_-$ ve $f_- = R_+ - R_-$ tanımlandıktan sonra tekrar düzenlenirse,

$$f_-'' + \frac{2}{r}f_-' + \left(\omega^2 - \frac{j(j+1)}{r^2}\right)f_- = 0 \tag{4.31}$$

küresel bessel diferansiyel denklemi elde edilir. Spinör bileşenlerinden R_+ ve R_-'nin farkı f_-,

$$f_- = N_1 \mathrm{j}_j(\omega r) + N_2 n_j(\omega r) \tag{4.32}$$

olarak elde edilir. Burada, $\mathrm{j}(\omega r)$ küresel Bessel fonksiyonu, $n_j(\omega r)$ küresel Neumann fonksiyonu ve N_1, N_2 integrasyon sabitleridir.

Küresel kaviteyi tanımlayan sınır koşulları,

$$\mathrm{j}_j(\omega r) = \begin{cases} 0, & r = 0 \text{ için} \\ 0, & r = a \text{ için} \end{cases} \tag{4.33}$$

şeklindedir. Burada, a küresel kavitenin yarıçapı, $\rho_{j,n}$ Bessel fonksiyonunun kökleri ve n, j sırasıyla kavite içindeki fotonun baş kuantum sayısı ve toplam açısal momentum kuantum sayısıdır. Ayrıca, f_-'nin ikinci çözümü $r = 0$ için sonsuza gittiği için $N_2 = 0$ seçilmektedir.

Böylelikle, $u^2 = \omega^2/c^2 - k^2 = \frac{\chi^2_{m,n}}{a^2}$ tanımı kullanılarak elde edilen rezonans frekansları,

$$f_{j,n} = \frac{c\rho_{j,n}}{2\pi a} \tag{4.34}$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$\frac{dR(r)}{dr} = 0, \quad r = a \text{ için} \tag{4.35}$$

sınır koşulundan

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{j(j+1)}{a^2} = 0 \tag{4.36}$$

ifadesi bulunur. Bu sınır koşulu ile birlikte yaklaşık rezonans frekansı

$$f \approx \frac{c}{2\pi a}\sqrt{j(j+1)} \tag{4.37}$$

elde edilmektedir. Bu frekans bağıntısına, iyonosfer tabakasında oluşan kuantum mekaniksel Schumann rezonansları da denilebilir. Sonuç olarak, bulunan kuantum mekaniksel rezonans frekansı 2.19 denklemine eşdeğerdir. Böylece, Sucu ve Ünal (2002) tarafından önerilen kütlesiz spin-1 parçacık denkleminin klasik sonuçlarla uyumlu olduğu gösterilmiştir.

4.2. Dereceli Kırılma İndisine Sahip Kavitelerde Kütleli Spin-1 Parçacık Denkleminin Çözümleri

4.2.1. Silindirik kavitede kütleli spin-1 parçacığı

Silindirik uzay-zamandaki metrik tensör, en genel halde 3.1 denkleminde verilmektedir. Bu metrik tensör kullanılarak spin-1 parçacık denkleminin çözümü için Dirac matrislerinin silindirik uzay-zamana geçişi

$$e_b^{\mu}(x) = diag\left[e^{-\alpha}, \frac{e^{-\beta}}{r}, e^{-\delta}, e^{-\gamma}\right] \tag{4.38}$$

tetradlar ile

$$\gamma^{\mu}(x) = e_b^{\mu}(x)\gamma^b \qquad veya \qquad \sigma^{\mu}(x) = e_b^{\mu}(x)\sigma^b \tag{4.39}$$

yapılmaktadır. Burada, $\gamma^b = \gamma_b$ sabit Dirac matrisleri ve $\sigma^b = \sigma_b$ sabit Pauli matrisleridir.

Böylece, silindirik uzay-zamanda Dirac matrisleri

$$\begin{aligned} \gamma^b(x) &= \begin{bmatrix} 0 & \sigma^b(x) \\ -\sigma^b(x) & 0 \end{bmatrix}, \\ \gamma^4(x) &= \begin{bmatrix} \sigma^4(x) & 0 \\ 0 & -\sigma^4(x) \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{4.40}$$

elde edilmektedir.

Silindirik uzay-zamandaki Dirac matrisleri kullanılarak (2.48) denkleminde verilen Kemmer matrisleri

$$\beta^b(x) = \begin{bmatrix} 0 & I\otimes\sigma^b(x) & \sigma^b(x)\otimes I & 0 \\ -I\otimes\sigma^b(x) & 0 & 0 & \sigma^b(x)\otimes I \\ -\sigma^b(x)\otimes I & 0 & 0 & I\otimes\sigma^b(x) \\ 0 & -\sigma^b(x)\otimes I & -I\otimes\sigma^b(x) & 0 \end{bmatrix} \tag{4.41}$$

$$\beta^4(x) = 2e_4^4(x)(I\otimes I)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{4.42}$$

olarak elde edilmiştir.

Denklem (2.41) ile verilen spin-1 bağlantı katsayıları için, denklem (2.42)'deki spin-1/2 katsayıları hesaplanmalıdır. Silindirik uzay-zamandaki Dirac matrisleri kullanılarak hesaplama yapılırsa,

$$\Gamma_1(x) = 0 \qquad \Gamma_2(x) = \frac{i(r\beta' + 1)e^{\beta-\alpha}}{2}\begin{bmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \tag{4.43}$$

$$\Gamma_3(x) = -\frac{i\delta' e^{\delta-\alpha}}{2}\begin{bmatrix}\sigma_2 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{bmatrix} \qquad \Gamma_4(x) = -\frac{i\gamma' e^{\gamma-\alpha}}{2}\begin{bmatrix}0 & \sigma_1\\ \sigma_1 & 0\end{bmatrix} \tag{4.44}$$

terimleri elde edilir ve bu terimler kullanılarak spin-1 bağlantı katsayıları

$$\Lambda_1(x) = 0 \tag{4.45}$$

$$\Lambda_2(x) = \frac{i(r\beta' + 1)e^{\beta-\alpha}}{2}\Sigma_3(I \otimes I) \tag{4.46}$$

$$\Lambda_3(x) = -\frac{i\delta' e^{\delta-\alpha}}{2}\Sigma_2(I \otimes I) \tag{4.47}$$

$$\Lambda_4(x) = -\frac{i\gamma' e^{\gamma-\alpha}}{2}\begin{bmatrix}0 & I\otimes\sigma_1 & \sigma_1\otimes I & 0\\ I\otimes\sigma_1 & 0 & 0 & \sigma_1\otimes I\\ \sigma_1\otimes I & 0 & 0 & I\otimes\sigma_1\\ 0 & \sigma_1\otimes I & I\otimes\sigma_1 & 0\end{bmatrix} \tag{4.48}$$

olarak bulunmaktadır. Burada, $b = 1,2,3$ olmak üzere düz uzay-zamanda $\Sigma_b = (\sigma_b \otimes I + I \otimes \sigma_b)$ spin-1 matrisleridir.

16 bileşenli simetrik spinör

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= e^{i(kz+\omega t+m\phi)}\begin{bmatrix}R_{1+}\\ R_{10}\\ R_{10}\\ R_{1-}\end{bmatrix} \qquad \Psi_2 = e^{i(kz+\omega t+m\phi)}\begin{bmatrix}R_{2+}\\ R_{20}\\ R_{2\tilde{0}}\\ R_{2-}\end{bmatrix},\\ \Psi_3 &= e^{i(kz+\omega t+m\phi)}\begin{bmatrix}R_{2+}\\ R_{2\tilde{0}}\\ R_{20}\\ R_{2-}\end{bmatrix} \qquad \Psi_4 = e^{i(kz+\omega t+m\phi)}\begin{bmatrix}R_{4+}\\ R_{40}\\ R_{40}\\ R_{4-}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{4.49}$$

olmak üzere; silindirik simetrik uzay-zamanda elde edilen Kemmer matrislerini ve spin bağlantı katsayılarını spin-1 dalga denkleminde yerine koyarsak

$$\begin{aligned}&2e^{-\gamma}\partial_t(\Psi_1 + \Psi_4) + 2iM(\Psi_1 - \Psi_4)\\ &+ \left[\vec{\Sigma}(x).\vec{\nabla} + \Delta_1\Sigma_2\Sigma_3 + \Delta_2\Sigma_3\Sigma_2 + \Delta_3\Sigma_1\right](\Psi_2 + \Psi_3) = 0\end{aligned} \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned}&2e^{-\gamma}\partial_t(\Psi_1 - \Psi_4) + 2iM(\Psi_1 + \Psi_4)\\ &- \left[\vec{\bar{\Sigma}}(x).\vec{\nabla} + \Delta_1\bar{\Sigma}_2\Sigma_3 + \Delta_2\bar{\Sigma}_3\Sigma_2 + \Delta_3\bar{\Sigma}_1\right](\Psi_2 - \Psi_3) = 0\end{aligned} \tag{4.51}$$

$$2iM(\Psi_2 + \Psi_3) - \left[\vec{\Sigma}(x).\vec{\nabla} + \Delta_1\Sigma_2\Sigma_3 + \Delta_2\Sigma_3\Sigma_2\right](\Psi_1 - \Psi_4) = 0 \tag{4.52}$$

$$2iM(\Psi_2 - \Psi_3) + \left[\vec{\bar{\Sigma}}(x).\vec{\nabla} + \Delta_1\bar{\Sigma}_2\Sigma_3 + \Delta_2\bar{\Sigma}_3\Sigma_2\right](\Psi_1 + \Psi_4) = 0 \tag{4.53}$$

dörtlü denklem sistemi elde edilir. Burada, $\Delta_1 = -i(r\beta' + 1)e^{-\alpha}/2r$, $\Delta_2 = i\delta' e^{-\alpha}/2$ ve $\Delta_3 = \gamma' e^{-\alpha}$ olarak tanımlanmıştır ve $b = 1,2,3$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\vec{\Sigma}(x) = \sigma_b(x) \otimes I + I \otimes \sigma_b(x),\\
&\vec{\bar{\Sigma}}(x) = \bar{\sigma}_b(x) \otimes I - I \otimes \bar{\sigma}_b(x),\\
&\bar{\Sigma}_b = \bar{\sigma}_b \otimes I - I \otimes \bar{\sigma}_b,
\end{aligned} \tag{4.54}$$

olarak verilmektedir ve $\Sigma_b(x)$ eğri uzay-zamanda, Σ_b düz uzay-zamanda spin-1 matrisleridir. Dalga fonksiyonu, elde edilen bu denklem sisteminde yerine konulursa,

$$\begin{aligned}
&i\Big[\omega e^{-\gamma}(R_1+R_4)_+ + M(R_1-R_4)_+\Big]\\
&+\Big[e^{-\alpha}(\frac{d}{dr}+\gamma'+\delta')+\frac{me^{-\beta}}{r}\Big](R_{20}+R_{2\tilde{0}})+2ike^{-\delta}R_{2+}=0
\end{aligned} \tag{4.55}$$

$$\begin{aligned}
&i\Big[\omega e^{-\gamma}(R_1+R_4)_- + M(R_1-R_4)_-\Big]\\
&+\Big[e^{-\alpha}(\frac{d}{dr}+\gamma'+\delta')-\frac{me^{-\beta}}{r}\Big](R_{20}+R_{2\tilde{0}})-2ike^{-\delta}R_{2-}=0
\end{aligned} \tag{4.56}$$

$$\begin{aligned}
&i\Big[\omega e^{-\gamma}(R_1+R_4)_0 + M(R_1-R_4)_0\Big]\\
&+e^{-\alpha}(\frac{d}{dr}+\gamma'+\beta'+\frac{1}{r})(R_{2+}+R_{2-})-\frac{me^{-\beta}}{r}(R_{2+}-R_{2-})=0
\end{aligned} \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned}
&i\Big[\omega e^{-\gamma}(R_1-R_4)_+ + M(R_1+R_4)_+\Big]+\\
&\Big[e^{-\alpha}(\frac{d}{dr}+\gamma')+\frac{me^{-\beta}}{r}\Big](R_{20}-R_{2\tilde{0}})=0
\end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned}
&i\Big[\omega e^{-\gamma}(R_1-R_4)_- + M(R_1+R_4)_-\Big]\\
&+\Big[-e^{-\alpha}(\frac{d}{dr}+\gamma')+\frac{me^{-\beta}}{r}\Big](R_{20}-R_{2\tilde{0}})=0
\end{aligned} \tag{4.59}$$

$$i\Big[\omega e^{-\gamma}(R_1-R_4)_0 + M(R_1+R_4)_0\Big]-ike^{-\delta}(R_{20}-R_{2\tilde{0}})=0 \tag{4.60}$$

$$-2iMR_{2+}+\Big[e^{-\alpha}(\frac{d}{dr}+\delta')+\frac{me^{-\beta}}{r}\Big](R_1-R_4)_0+ike^{-\gamma}(R_1-R_4)_+=0 \tag{4.61}$$

$$-2iMR_{2-}+\Big[e^{-\alpha}(\frac{d}{dr}+\delta')-\frac{me^{-\beta}}{r}\Big](R_1-R_4)_0-ike^{-\gamma}(R_1-R_4)_-=0 \tag{4.62}$$

$$
\begin{aligned}
&-2iM(R_{20}+R_{2\tilde{0}})+e^{-\alpha}(\frac{d}{dr}+\beta'+\frac{1}{r})\big[(R_1-R_4)_+ +(R_1-R_4)_-\big]\\
&-\frac{me^{-\beta}}{r}\big[(R_1-R_4)_+ -(R_1-R_4)_-\big]=0
\end{aligned} \tag{4.63}
$$

$$
\begin{aligned}
&2iM(R_{20}-R_{2\tilde{0}})-e^{-\alpha}(\frac{d}{dr}+\beta'+\delta'+\frac{1}{r})\big[(R_1+R_4)_+ -(R_1+R_4)_-\big]\\
&+\frac{me^{-\beta}}{r}\big[(R_1+R_4)_+ +(R_1+R_4)_-\big]+2ike^{-\delta}(R_1+R_4)_0=0
\end{aligned} \tag{4.64}
$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi, $(R_1 \pm R_4)_\pm, (R_1-R_4)_0, (R_{2+}+R_{2-}) ve (R_{20} \pm R_{2\tilde{0}})$ olmak üzere 8 adet fonksiyonun birinci mertebeden türevlerini içermektedir. Ancak, ele alınan bu sistemde simetrik dalga fonksiyonunun tam olarak sağlanması için $(R_{2+}-R_{2-})=0$ olmalıdır. Ayrıca, onlu denklem sisteminde $M^2 \to 0$ limiti uygulanmıştır. Böylece,

$$
\begin{aligned}
&\Big\{\frac{d^2}{dr^2}+\Big(\beta'+\delta'+3\gamma'-\alpha'+\frac{1}{r}\Big)\frac{d}{dr}+\big(\delta''+\gamma''+\big(\beta'+2\gamma'-\alpha'+\frac{1}{r}\big)\\
&(\delta'+\gamma')+e^{2\alpha}\big(\omega^2e^{-2\gamma}-k^2e^{-2\delta}-\frac{m^2}{r^2}e^{-2\beta}\big)\Big\}(R_{20}+R_{2\tilde{0}})=0
\end{aligned} \tag{4.65}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Big\{\frac{d^2}{dr^2}+\Big(\beta'+\delta'+3\gamma'-\alpha'+\frac{1}{r}\Big)\frac{d}{dr}+\gamma''+\big(\beta'+2\gamma'+\delta'-\alpha'+\frac{1}{r}\big)\gamma'\\
&+e^{2\alpha}\big(\omega^2e^{-2\gamma}-k^2e^{-2\delta}-\frac{m^2}{r^2}e^{-2\beta}\big)\Big\}(R_{20}-R_{2\tilde{0}})=0
\end{aligned} \tag{4.66}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Big\{\frac{d^2}{dr^2}+\Big(\beta'+\delta'+3\gamma'-\alpha'+\frac{1}{r}\Big)\frac{d}{dr}+\beta''+\gamma''-\frac{1}{r^2}+\big(2\gamma'+\delta'-\alpha'\big)\\
&(\beta'+\gamma'+\frac{1}{r})+e^{2\alpha}\big(\omega^2e^{-2\gamma}-k^2e^{-2\delta}-\frac{m^2}{r^2}e^{-2\beta}\big)\Big\}(R_{2+}+R_{2-})=0
\end{aligned} \tag{4.67}
$$

şeklinde ikinci mertebeden diferansiyel denklemler elde edilmektedir. Eğer α, β, γ radyal katsayılar bilinirse, bu ikinci mertebeden diferansiyel denklemler çözülerek $R_{20}+R_{2\tilde{0}}$, $R_{20}-R_{2\tilde{0}}$ ve $R_{2+}-R_{2-}$ fonksiyonları tespit edilebilir. Tespit edilen bu fonksiyonlar kullanılarak, 16x1 bileşenli ψ spinörünün diğer bileşenleri de aşağıdaki denklemlerle hesaplanabilir.

$$
\begin{aligned}
&(R_1+R_4)_\pm=\frac{i}{u}\Big\{\omega e^{-\gamma}\Big[\big(e^{-\alpha}[\frac{d}{dr}+\gamma'+\delta']\pm\frac{me^{-\beta}}{r}\big)(R_{20}+R_{2\tilde{0}})\\
&\pm 2ike^{-\delta}R_{2\pm}\Big]-M\Big[\pm e^{-\alpha}(\frac{d}{dr}+\gamma')+\frac{me^{-\beta}}{r}\Big](R_{20}-R_{2\tilde{0}})\Big\}
\end{aligned} \tag{4.68}
$$

$$
\begin{aligned}
&(R_1-R_4)_\pm=\frac{i}{u}\Big\{\omega e^{-\gamma}\Big[\big(\pm e^{-\alpha}[\frac{d}{dr}+\gamma']+\frac{me^{-\beta}}{r}\big)(R_{20}-R_{2\tilde{0}})\Big]\\
&-M\Big[\big(e^{-\alpha}[\frac{d}{dr}+\gamma'+\delta']\pm\frac{me^{-\beta}}{r}\big)(R_{20}+R_{2\tilde{0}})\pm 2ike^{-\delta}R_{2\pm}\Big]\Big\}
\end{aligned} \tag{4.69}
$$

$$\begin{aligned}(R_1+R_4)_0 = \frac{i}{u}\Bigg\{\omega e^{-\gamma}\Bigg[e^{-\alpha}(\frac{d}{dr}+\gamma^{'}+\beta^{'}+\frac{1}{r})(R_{2+}+R_{2-})\\ -\frac{me^{-\beta}}{r}(R_{2+}-R_{2-})\Bigg]+ikMe^{-\delta}(R_{20}-R_{2\tilde{0}})\Bigg\}\end{aligned} \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned}(R_1-R_4)_0 = \frac{i}{u}\Bigg\{\omega e^{-\gamma}\Bigg[-ike^{-\delta}(R_{20}-R_{2\tilde{0}})\Bigg]\\ -M\Bigg[e^{-\alpha}(\frac{d}{dr}+\gamma^{'}+\beta^{'}+\frac{1}{r})(R_{2+}+R_{2-})-\frac{me^{-\beta}}{r}(R_{2+}-R_{2-})\Bigg]\Bigg\}\end{aligned} \tag{4.71}$$

4.2.2. Küresel kavitede kütleli spin-1 parçacığı

Küresel uzay-zamandaki metrik tensör, en genel halde 3.2 denkleminde verilmektedir. Bu metrik tensör kullanılarak spin-1 parçacık denkleminin çözümü için Dirac matrislerinin küresel uzay-zamana geçişi

$$e_a^{\mu}(x) = diag\left[e^{-\alpha},\frac{e^{-\beta}}{r},\frac{e^{-\beta}}{rsin\theta},e^{-\gamma}\right] \tag{4.72}$$

tetratlar ile

$$\gamma^{\mu}(x) = e_b^{\mu}(x)\gamma^b \qquad veya \qquad \sigma^{\mu}(x) = e_b^{\mu}(x)\sigma^b \tag{4.73}$$

dönüşümleri yapılmaktadır. Burada, $\gamma^b = \gamma_b$ sabit Dirac matrisleri ve $\sigma^b = \sigma_b$ sabit Pauli matrisleridir.

Kütleli spin-1 parçacık denklemi de koordinat döndürmelerinde invaryant kaldığı için, Pauli matrislerine

$$S(\theta^{'},\phi^{'}) = e^{-\frac{i}{2}\sigma^2\theta^{'}}e^{-\frac{i}{2}\sigma^3\phi^{'}} \tag{4.74}$$

döndürme işlemcisi uygulanabilmektedir. Böylece, döndürülmüş Pauli matrisleri

$$\sigma_1 \to -\sigma_3, \quad \sigma_2 \to -\sigma_1, \quad \sigma_3 \to -\sigma_2, \quad \sigma_4 \to I, \tag{4.75}$$

olarak bulunmaktadır. Küresel uzay-zamandaki Dirac matrisleri için döndürülmüş Pauli matrisleri cinsinden

$$\begin{aligned}\gamma^b(x) = \begin{bmatrix}0 & \sigma^b(x)\\ -\sigma^b(x) & 0\end{bmatrix}\\ \gamma^4(x) = \begin{bmatrix}\sigma^4(x) & 0\\ 0 & -\sigma^4(x)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{4.76}$$

olarak yazılır.

Küresel uzay-zamandaki Dirac matrisleri kullanılarak (2.48) denkleminde verilen Kemmer matrisleri

$$\beta^b(x) = \begin{bmatrix}0 & I\otimes\sigma^b(x) & \sigma^b(x)\otimes I & 0\\ -I\otimes\sigma^b(x) & 0 & 0 & \sigma^b(x)\otimes I\\ -\sigma^b(x)\otimes I & 0 & 0 & I\otimes\sigma^b(x)\\ 0 & -\sigma^b(x)\otimes I & -I\otimes\sigma^b(x) & 0\end{bmatrix} \tag{4.77}$$

$$\beta^4(x) = 2e_4^4(x)(I \otimes I) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{4.78}$$

olarak elde edilmiştir.

Denklem (2.41) ile verilen spin-1 bağlantı katsayıları için, denklem (2.42)'deki spin-1/2 katsayıları hesaplanmalıdır. Küresel uzay-zamandaki Dirac matrisleri kullanılarak hesaplama yapılırsa,

$$\Gamma_1(x) = 0 \qquad \Gamma_2(x) = \frac{i(r\beta' + 1)e^{\beta-\alpha}}{2} \begin{bmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \tag{4.79}$$

$$\Gamma_3(x) = -\frac{i(r\beta' + 1)sin\theta e^{\beta-\alpha}}{2} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{bmatrix} + \frac{icot\theta}{2} \begin{bmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \tag{4.80}$$

$$\Gamma_4(x) = \frac{\gamma' e^{\gamma-\alpha}}{2} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.81}$$

terimleri elde edilir ve bu terimler kullanılarak spin-1 bağlantı katsayıları

$$\Lambda_1(x) = 0 \tag{4.82}$$

$$\Lambda_2(x) = \frac{i(r\beta' + 1)e^{\beta-\alpha}}{2} \Sigma_2(I \otimes I) \tag{4.83}$$

$$\Lambda_3(x) = \left[-\frac{i(r\beta' + 1)sin\theta e^{\beta-\alpha}}{2} \Sigma_1 + \frac{icot\theta}{2} \Sigma_3 \right] (I \otimes I) \tag{4.84}$$

$$\Lambda_4(x) = \frac{\gamma' e^{\gamma-\alpha}}{2} \begin{bmatrix} 0 & I \otimes \sigma_3 & \sigma_3 \otimes I & 0 \\ I \otimes \sigma_3 & 0 & 0 & \sigma_3 \otimes I \\ \sigma_3 \otimes I & 0 & 0 & I \otimes \sigma_3 \\ 0 & \sigma_3 \otimes I & I \otimes \sigma_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.85}$$

olarak bulunmaktadır. Burada, $b = 1, 2, 3$ olmak üzere düz uzay-zamanda $\Sigma_b = (\sigma_b \otimes I + I \otimes \sigma_b)$ spin-1 bağlantı katsayılarıdır.

Değişkenlerine ayırma yöntemi sayesinde, 16 bileşenli simetrik spinör

$$\Psi_1 = e^{i\omega t} \begin{bmatrix} R_{1+}(r) D^j_{+1,m}(\theta,\phi) \\ R_{10}(r) D^j_{0,m}(\theta,\phi) \\ R_{10}(r) D^j_{0,m}(\theta,\phi) \\ R_{1-}(r) D^j_{-1,m}(\theta,\phi) \end{bmatrix} \quad \Psi_2 = e^{i\omega t} \begin{bmatrix} R_{2+}(r) D^j_{+1,m}(\theta,\phi) \\ R_{20}(r) D^j_{0,m}(\theta,\phi) \\ R_{2\tilde{0}}(r) D^j_{0,m}(\theta,\phi) \\ R_{2-}(r) D^j_{-1,m}(\theta,\phi) \end{bmatrix},$$
$$\Psi_3 = e^{i\omega t} \begin{bmatrix} R_{2+}(r) D^j_{+1,m}(\theta,\phi) \\ R_{2\tilde{0}}(r) D^j_{0,m}(\theta,\phi) \\ R_{20}(r) D^j_{0,m}(\theta,\phi) \\ R_{2-}(r) D^j_{-1,m}(\theta,\phi) \end{bmatrix} \quad \Psi_4 = e^{i\omega t} \begin{bmatrix} R_{4+}(r) D^j_{+1,m}(\theta,\phi) \\ R_{40}(r) D^j_{0,m}(\theta,\phi) \\ R_{40}(r) D^j_{0,m}(\theta,\phi) \\ R_{4-}(r) D^j_{-1,m}(\theta,\phi) \end{bmatrix}, \tag{4.86}$$

olarak tanımlanır; küresel uzay-zamanda yazılan Kemmer matrisleri ve spin bağlantı katsayıları spin-1 dalga denkleminde yerine konursa,

$$\begin{aligned}&2e^{-\gamma}\partial_t(\Psi_1+\Psi_4)+2iM(\Psi_1-\Psi_4)\\&+\Big[\vec{\Sigma}(x).\vec{\nabla}+\Delta_1\big(\Sigma_1\Sigma_2-\Sigma_2\Sigma_1\big)+\Delta_2\Sigma_2\Sigma_3+\Delta_3\Sigma_3\Big](\Psi_2+\Psi_3)=0\end{aligned}\tag{4.87}$$

$$\begin{aligned}&2e^{-\gamma}\partial_t(\Psi_1-\Psi_4)+2iM(\Psi_1+\Psi_4)\\&-\Big[\vec{\bar{\Sigma}}(x).\vec{\nabla}+\Delta_1\big(\bar{\Sigma}_1\Sigma_2-\bar{\Sigma}_2\Sigma_1\big)+\Delta_2\bar{\Sigma}_2\Sigma_3+\Delta_3\bar{\Sigma}_3\Big](\Psi_2-\Psi_3)=0\end{aligned}\tag{4.88}$$

$$2iM(\Psi_2+\Psi_3)-\Big[\vec{\Sigma}(x).\vec{\nabla}+\Delta_1\big(\Sigma_1\Sigma_2-\Sigma_2\Sigma_1\big)+\Delta_2\Sigma_2\Sigma_3\Big](\Psi_1-\Psi_4)=0\tag{4.89}$$

$$2iM(\Psi_2-\Psi_3)+\Big[\vec{\bar{\Sigma}}(x).\vec{\nabla}+\Delta_1\big(\bar{\Sigma}_1\Sigma_2-\bar{\Sigma}_2\Sigma_1\big)+\Delta_2\bar{\Sigma}_2\Sigma_3\Big](\Psi_1+\Psi_4)=0\tag{4.90}$$

dörtlü denklem sistemi elde edilir. Burada, $b=1,2,3$ olmak üzere

$$\begin{aligned}&\vec{\Sigma}(x)=\sigma_b(x)\otimes I+I\otimes\sigma_b(x),\\&\vec{\bar{\Sigma}}(x)=\bar{\sigma}_b(x)\otimes I-I\otimes\bar{\sigma}_b(x),\\&\bar{\Sigma}_b=\bar{\sigma}_b\otimes I-I\otimes\bar{\sigma}_b,\end{aligned}\tag{4.91}$$

olarak verilmektedir ve $\Sigma_b(x)$ eğri uzay-zamanda, Σ_b düz uzay-zamanda spin-1 bağlantı katsayılarıdır. Ayrıca, $\Delta_1=i(r\beta^{'}+1)e^{-\alpha}/2r$, $\Delta_2=icot\theta e^{-\beta}/2r$ ve $\Delta_3=-\gamma^{'}e^{-\alpha}$ kısaltmaları yapılmaktadır. Bu denklem sisteminde açısal kısım,

$$\Big[\Sigma_1\partial_\theta+\Sigma_2\big(\frac{\partial_\phi}{sin\theta}-\frac{icot\theta}{2}\Sigma_3\big)\Big]D^j_{\alpha,m}=-\Big[\Sigma_+\partial_+-\Sigma_-\partial_-\Big]D^j_{\alpha,m}\tag{4.92}$$

$$\Big[\bar{\Sigma}_1\partial_\theta+\bar{\Sigma}_2\big(\frac{\partial_\phi}{sin\theta}-\frac{icot\theta}{2}\Sigma_3\big)\Big]D^j_{\alpha,m}=-\Big[\bar{\Sigma}_+\partial_+-\bar{\Sigma}_-\partial_-\Big]D^j_{\alpha,m}\tag{4.93}$$

şeklinde düzenlenir. Buradaki $\Sigma_\pm$ ve $\partial_\pm D^j_{\alpha,m}$ terimleri, 4.24, 4.24 ve 4.24 denklemlerinde verilmiştir. Ayrıca, $\overline{\Sigma}_\pm=\frac{1}{2}\big(\overline{\Sigma}_1\pm i\overline{\Sigma}_2\big)$ şeklinde hesaplanmaktadır. Elde edilen dörtlü denklem sisteminde spinörün açısal kısmının özdeğerleri ile radyal kısım ve spin matrisleri yerine konulursa

$$i\omega e^{-\gamma}(R_1-R_4)_++iM(R_1+R_4)_++\sqrt{j(j+1)}\frac{e^{-\beta}}{r}(R_{20}-R_{2\tilde{0}})=0\tag{4.94}$$

$$i\omega e^{-\gamma}(R_1-R_4)_-+iM(R_1+R_4)_-+\sqrt{j(j+1)}\frac{e^{-\beta}}{r}(R_{20}-R_{2\tilde{0}})=0\tag{4.95}$$

$$i\omega e^{-\gamma}(R_1-R_4)_0+iM(R_1+R_4)_0+e^{-\alpha}[\frac{d}{dr}+\gamma^{'}](R_{20}-R_{2\tilde{0}})=0\tag{4.96}$$

$$i\omega e^{-\gamma}(R_1+R_4)_+ + iM(R_1-R_4)_+ - 2e^{-\alpha}[\frac{d}{dr}+\beta^{'}+\gamma^{'}+\frac{1}{r}]R_{2+} + \sqrt{j(j+1)}\frac{e^{-\beta}}{r}(R_{20}+R_{2\tilde{0}}) = 0 \tag{4.97}$$

$$i\omega e^{-\gamma}(R_1+R_4)_- + iM(R_1-R_4)_- + 2e^{-\alpha}[\frac{d}{dr}+\beta^{'}+\gamma^{'}+\frac{1}{r}]R_{2-} - \sqrt{j(j+1)}\frac{e^{-\beta}}{r}(R_{20}+R_{2\tilde{0}}) = 0 \tag{4.98}$$

$$i\omega e^{-\gamma}(R_1+R_4)_0 + iM(R_1-R_4)_0 - \sqrt{j(j+1)}\frac{e^{-\beta}}{r}(R_{2+}-R_{2-}) = 0 \tag{4.99}$$

$$2iMR_{2+} + e^{-\alpha}[\frac{d}{dr}+\beta^{'}+\frac{1}{r}](R_1-R_4)_+ - \sqrt{j(j+1)}\frac{e^{-\beta}}{r}(R_1-R_4)_0 = 0 \tag{4.100}$$

$$2iMR_{2-} - e^{-\alpha}[\frac{d}{dr}+\beta^{'}+\frac{1}{r}](R_1-R_4)_- + \sqrt{j(j+1)}\frac{e^{-\beta}}{r}(R_1-R_4)_0 = 0 \tag{4.101}$$

$$2iM(R_{20}+R_{2\tilde{0}}) + \sqrt{j(j+1)}\frac{e^{-\beta}}{r}[(R_1-R_4)_+ - (R_1-R_4)_-] = 0 \tag{4.102}$$

$$iM(R_{20}-R_{2\tilde{0}}) - e^{-\alpha}[\frac{d}{dr}+2\beta^{'}+\frac{2}{r}](R_1+R_4)_0 + \sqrt{j(j+1)}\frac{e^{-\beta}}{r}[(R_1+R_4)_+ + (R_1-R_4)_-] = 0 \tag{4.103}$$

şeklinde birinci mertebeden diferansiyel denklemden oluşan denklem sistemi elde edilmektedir. Buradaki on adet denklem, birbirine ekleme-çıkarma yapılarak $M^2 \to 0$ limitinde de düzenlenirse

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}+\left(2\beta^{'}+\gamma^{'}-\alpha^{'}+\frac{2}{r}\right)\frac{d}{dr}+2\beta^{''}-\frac{2}{r^2}+2\big(2\beta^{'}+2\gamma^{'}-\alpha^{'}+\frac{2}{r}\big)(\beta^{'}+\frac{1}{r})+e^{2\alpha}\big(\omega^2e^{-2\gamma}-\frac{j(j+1)}{r^2}e^{-2\beta}\big)\right\}(R_{20}+R_{2\tilde{0}}) = 0 \tag{4.104}$$

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}+\left(2\beta^{'}+3\gamma^{'}-\alpha^{'}+\frac{2}{r}\right)\frac{d}{dr}+\gamma^{''}-\big(2\beta^{'}+\gamma^{'}+\frac{1}{r}\big)\gamma^{'}+e^{2\alpha}\big(\omega^2e^{-2\gamma}-\frac{j(j+1)}{r^2}e^{-2\beta}\big)\right\}(R_{20}-R_{2\tilde{0}}) = 0 \tag{4.105}$$

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}+\left(2\beta^{'}+3\gamma^{'}-\alpha^{'}+\frac{2}{r}\right)\frac{d}{dr}+\beta^{''}+\gamma^{''}-\frac{1}{r^2}+\big(\beta^{'}+2\gamma^{'}-\alpha^{'}+\frac{1}{r}\big)(\beta^{'}+\gamma^{'}+\frac{1}{r})+e^{2\alpha}\big(\omega^2e^{-2\gamma}-\frac{j(j+1)}{r^2}e^{-2\beta}\big)\right\}(R_{2+}-R_{2-}) = 0 \tag{4.106}$$

şeklinde ikinci mertebeden diferansiyel denklemler elde edilmektedir. Eğer α, β, γ radyal katsayılar bilinirse, bu ikinci mertebeden diferansiyel denklemler çözülerek $R_{20}+R_{2\tilde{0}}$, $R_{20}-R_{2\tilde{0}}$ ve $R_{2+}-R_{2-}$ fonksiyonları tespit edilebilir. Tespit edilen bu fonksiyonlar kullanılarak, 16x1 bileşenli ψ spinörünün diğer bileşenleri de aşağıdaki denklemlerle hesaplanabilir.

$$\begin{aligned}(R_1+R_4)_{\pm} = \frac{i}{u}\Big\{ &\pm\omega e^{-\gamma}\big[2e^{-\alpha}\big(\frac{d}{dr}+\beta^{'}+\gamma^{'}+\frac{1}{r}\big)R_{2\pm} \\ &-\sqrt{j(j+1)}\frac{e^{-\beta}}{r}(R_{20}+R_{2\tilde{0}})\big]+M\sqrt{j(j+1)}\frac{e^{-\beta}}{r}(R_{20}-R_{2\tilde{0}})\Big\}\end{aligned} \tag{4.107}$$

$$\begin{aligned}(R_1-R_4)_{\pm} = \frac{i}{u}\Big\{ &-\omega e^{-\gamma}\sqrt{j(j+1)}\frac{e^{-\beta}}{r}(R_{20}-R_{2\tilde{0}}) \\ &\pm M\big[2e^{-\alpha}\big(\frac{d}{dr}+\beta^{'}+\gamma^{'}+\frac{1}{r}\big)R_{2\pm}-\sqrt{j(j+1)}\frac{e^{-\beta}}{r}(R_{20}+R_{2\tilde{0}})\big]\Big\}\end{aligned} \tag{4.108}$$

$$\begin{aligned}(R_1+R_4)_{0} = \frac{i}{u}\Big\{ &\omega e^{-\gamma}\sqrt{j(j+1)}\frac{e^{-\beta}}{r}(R_{2+}-R_{2-}) \\ &+Me^{-\alpha}\big(\frac{d}{dr}+\gamma^{'}\big)(R_{20}-R_{2\tilde{0}})\Big\}\end{aligned} \tag{4.109}$$

$$\begin{aligned}(R_1-R_4)_{0} = \frac{i}{u}\Big\{ &-\omega e^{-\gamma-\alpha}\big(\frac{d}{dr}+\gamma^{'}\big)(R_{20}-R_{2\tilde{0}}) \\ &-M\sqrt{j(j+1)}\frac{e^{-\beta}}{r}(R_{2+}-R_{2-})\Big\}\end{aligned} \tag{4.110}$$

$$R_{2+}+R_{2-} = \frac{e^{\beta-\alpha}}{\sqrt{j(j+1)}}\big[r\frac{d}{dr}+2r\beta^{'}+2\big](R_{20}+R_{2\tilde{0}}) \tag{4.111}$$

4.3. Dereceli Kırılma İndislerinin Belirlenmesi

Bu kısımda, silindirik ve küresel kaviteleri tanımlayan en genel haldeki metrik tensörlerin bilinmeyen radyal katsayıları, spin-1 alanı ile kütle çekimsel alanın minimal çiftleniminden elde edilen hareket denklemleri çözülerek belirlenmektedir.

4.3.1. Kütle çekimsel kırmızıya kayma için silindirik kavitenin yapısı

Xue-Jun ve Chong-ming (1988) tarafından önerilen izotropik küresel metrik, silindirik koordinatlarda

$$ds^2 = -A^2\big(dr^2+r^2d\phi^2+dz^2\big)+B^2dt^2 \tag{4.112}$$

şeklindedir. Bu metrik için 3.14 denklemi kullanılarak sistemin Lagranjiyeni hesaplanırsa

$$L = -\frac{rBA^{'2}}{A}-2rB^{'}A'-rBA^3V_e+\frac{irBA^2}{2}\psi_e \tag{4.113}$$

olarak bulunur. Burada, $\psi_e = \bar{\psi}\beta_1\psi^{'}-\bar{\psi}'\beta_1\psi$ ve $V_e = M\Psi+V(\Psi)$ kısaltmaları yapılır ve kısmi integrasyon sayesinde ikinci mertebe türevlerden kurtulduktan sonra; Ricci skaleri R, $-rBA^{'2}/A-2rB^{'}A'$ olarak hesaplanır.

Sistemin Lagranjiyeni, 3.15 ve 3.16 denklemlerinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&-\frac{2A^{''}}{A^3}-\frac{2A^{'}}{rA^3}+\frac{A^{'2}}{A^4}-\frac{2B^2A^{'}}{BA^3}-\frac{2B^{'}}{rBA^2}-\frac{2B^{''}}{BA^2}=\frac{i\psi_e}{A}-3V_e \\
&=-G_{\hat{z}\hat{z}}-G_{\hat{\phi}\hat{\phi}}-G_{\hat{r}\hat{r}}=\tau-p(r)-p(z)
\end{aligned} \tag{4.114}$$

$$-\frac{4A^{''}}{A^3}-\frac{4A^{'}}{rA^3}+\frac{2A^{'2}}{A^4}=\frac{i\psi_e}{A}-2V_e=2G_{\hat{t}\hat{t}}=2\rho \tag{4.115}$$

$$V_e=\frac{A^{'2}}{A^4}+\frac{2B^{'}A^{'}}{BA^3} \tag{4.116}$$

$$\frac{i\psi_e}{A}=2\Psi\left[M+\frac{\partial V(\Psi)}{\partial\Psi}\right] \tag{4.117}$$

denklemleri elde edilir. Çözüm aşamasında etkileşim potansiyelinin, $V(\Psi)=-M\Psi$ varsayımı altında;

$$\begin{aligned}
&\bar{\psi}\beta_1\psi^{'}-\bar{\psi}^{\prime}\beta_1\psi=0, \\
&A(r)=C_1 \qquad B(r)=C_2+C_3lnr,
\end{aligned} \tag{4.118}$$

çözümleri elde edilir. Burada, C_1, C_2 ve C_3 integrasyon sabitleridir. Sınır koşulları,

$$B(r)=\begin{cases}+\infty, & r\to\infty \\ -\infty, & r\to 0 \\ 0, & r=a\end{cases} \tag{4.119}$$

şeklinde a yarıçaplı kavitenin yüzeyinde spin-1 parçacığı hapsolacak şekilde düzenlenirse, $C_2=-lna$ ve $C_3=1$ olmak üzere

$$B(r)=ln(r/a) \tag{4.120}$$

elde edilir. Ayrıca, basitlik için $A(r)=C_1=1$ alınmıştır. Böylece, enerji momentum tensörünün bileşenleri

$$\rho(r)=p(z)=0 \qquad \tau(r)=p(r)=-\frac{1}{r^2ln(r/a)} \tag{4.121}$$

olarak elde edilirken, metrik ise

$$ds^2=-dr^2-r^2d\phi^2-dz^2+ln(r^2/a^2)dt^2 \tag{4.122}$$

şeklinde bulunur.

4.3.2. Kütle çekimsel kırmızıya kayma için küresel kavitenin yapısı

Evans vd (1996) tarafından önerilen izotropik küresel metrik

$$ds^2 = -\frac{1}{\Phi^2(r)}\left(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\phi^2\right) + \Omega^2(r)dt^2 \tag{4.123}$$

şeklindedir. Bu metrik için 3.14 denklemi kullanılarak Lagranjiyen hesaplanırsa

$$L = \frac{2r^2\Omega'\Phi'}{\Phi^2} - \frac{r^2\Omega\Phi'^2}{\Phi^3} - \frac{r^2\Omega}{\Phi^3}V_e + \frac{ir^2\Omega}{2\Phi^2}\psi_e \tag{4.124}$$

bulunur. Burada, yine $V_e = M\Psi + V(\Psi)$ ve $\Psi_e = \bar{\psi}\beta_1\psi' - \bar{\psi}'\beta_1\psi$ kısaltmaları yapılır ve kısmi integrasyon yapılarak ikinci mertebe türevlerden kurtulduktan sonra elde edilen Ricci skaleri R, $2r^2\Omega'\Phi'/\Phi^2 - r^2\Omega\Phi'^2/\Phi^3$ şeklindedir.

Sistemin Lagranjiyeni, 3.15 ve 3.16 denklemlerinde yerine yazılırsa

$$4\Phi\Phi'' + \frac{8\Phi\Phi'}{r} - 6\Phi'^2 = i\Phi\psi_e - 2V_e = 2G_{\hat{t}\hat{t}} = 2\rho \tag{4.125}$$

$$\begin{aligned} &-\frac{2\Phi^2\Omega''}{\Omega} - \frac{4\Phi^2\Omega'}{r\Omega} + \frac{2\Phi\Phi'\Omega'}{\Omega} + 2\Phi\Phi'' + \frac{4\Phi\Phi'}{r} - 3\Phi'^2 = i\Phi\psi_e - 3V_e \\ &= -2G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} - G_{\hat{r}\hat{r}} = \tau - 2p \end{aligned} \tag{4.126}$$

$$V_e = \Phi'^2 - \frac{2\Phi\Phi'\Omega'}{\Omega} \tag{4.127}$$

$$i\Phi\Psi_e = 2\Psi\left[M + \frac{\partial V(\Psi)}{\partial\Psi}\right] \tag{4.128}$$

denklemleri elde edilmektedir. Çözüm aşamasında, etkileşim potansiyeli $V(\Psi) = -M\Psi$ olması durumunda

$$\begin{aligned} &\bar{\psi}\beta_1\psi' - \bar{\psi}'\beta_1\psi = 0, \\ &\Phi(r) = C_1 \qquad \Omega(r) = C_2 + \frac{C_3}{r}, \end{aligned} \tag{4.129}$$

şeklinde çözümler elde edilir. Burada, C_1, C_2 ve C_3 integrasyon sabitleridir. Sınır koşulları,

$$\Omega(r) = \begin{cases} 1, & r \to \infty \\ -\infty, & r \to 0 \\ 0, & r = a \end{cases} \tag{4.130}$$

şeklinde a yarıçaplı kavitenin yüzeyinde spin-1 parçacığı hapsolacak şekilde düzenlenirse, $C_2 = 1$ ve $C_3 = -a$ olmak üzere

$$\Omega = 1 - \frac{a}{r} \tag{4.131}$$

elde edilir. Ayrıca, basitlik için $\Phi(r) = C_1 = 1$ alınmıştır. Böylece, enerji momentum tensörünün bileşenleri

$$\rho(r) = 0 \qquad \tau(r) = p(r) = -\frac{2a}{r^2(r-a)} \tag{4.132}$$

olarak elde edilirken, metrik ise

$$ds^2 = -dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 sin^2\theta d\phi^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 dt^2 \tag{4.133}$$

şeklinde elde edilir.

4.4. Kütleli spin-1 parçacığının rezonans frekansları

Kütleli spin-1 parçacığının 4.122 denklemi ile verilen silindirik uzay-zamandaki rezonans frekansı 4.65, 4.66 ve 4.67 denklemleri çözülerek doğrudan bulunabilmektedir. İkinci mertebeden türevli bu denklemlerde $\alpha = \beta = \delta = 0$ ve $\gamma = ln(r/a)$ dönüşümleri yapıldıktan sonra, 3.17 denklemi ile verilen dönüşüm yapılırsa Schrödinger benzeri diferansiyel denklemler

$$f_1'' + \left[\frac{1}{4r^2\big(ln(r/a)\big)^2} + \frac{\omega^2}{\big(ln(r/a)\big)^2} - k^2 - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{r^2}\right] f_1 = 0 \tag{4.134}$$

$$f_2'' + \left[\frac{1}{4r^2\big(ln(r/a)\big)^2} + \frac{\omega^2}{\big(ln(r/a)\big)^2} - k^2 - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{r^2}\right] f_2 = 0 \tag{4.135}$$

$$f_3'' + \left[\frac{1}{4r^2\big(ln(r/a)\big)^2} + \frac{1}{r^2 ln(r/a)} + \frac{\omega^2}{\big(ln(r/a)\big)^2} - k^2 - \frac{m^2 + \frac{3}{4}}{r^2}\right] f_3 = 0 \tag{4.136}$$

denklemleri elde edilir. Burada, $f_1 = R_{20} + R_{2\tilde{0}}$, $f_2 = R_{20} - R_{2\tilde{0}}$ ve $f_3 = R_{2+} + R_{2-}$ olarak tanımlanmıştır. Bu denklemlerde $\mu^2 = \omega^2 a^2$ ve $\nu^2 = a^2k^2/4$ olmak üzere $r = ae^{x/2}$ ve $f(x) = e^{x/4}y(x)$ dönüşümleri yapılırsa,

$$y_1'' + \left[\frac{1}{4x^2} + \mu^2\frac{e^x}{x^2} - \nu^2 e^x - \frac{m^2}{4}\right] y_1 = 0 \tag{4.137}$$

$$y_2'' + \left[\frac{1}{4x^2} + \mu^2\frac{e^x}{x^2} - \nu^2 e^x - \frac{m^2}{4}\right] y_2 = 0 \tag{4.138}$$

$$y_3'' + \left[\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{2x} + \mu^2\frac{e^x}{x^2} - \nu^2 e^x - \frac{m^2+1}{4}\right] y_3 = 0 \tag{4.139}$$

denklemleri elde edilir ve etkin potansiyeller, V_{eff},

$$V_{eff_1} = V_{eff_2} = \frac{1}{4x^2} + \mu^2\frac{e^x}{x^2} - \nu^2 e^x - \frac{m^2}{4} \tag{4.140}$$

$$V_{eff_3} = \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{2x} + \mu^2 \frac{e^x}{x^2} - \nu^2 e^x - \frac{m^2+1}{4} \tag{4.141}$$

olarak elde edilir. Denklemlerin bu formunda bilinen analitik çözümleri yoktur. Bu durumda $x = 0$ civarında ve $x \to \pm\infty$ sınırlarında etkin potansiyelin davranışına bakılarak yaklaşık çözümler elde edilebilir.

$x \to -\infty$ durumunda etkin potansiyeller

$$V_{eff_1} = -m^2/4 \qquad V_{eff_3} = -(m^2+1)/4 \tag{4.142}$$

olmak üzere dalga fonksiyonları

$$y_1 = C_1 e^{mx/2} + C_2 e^{-mx/2} \qquad y_3 = C_1 e^{\sqrt{m^2+1}x/2} + C_2 e^{-\sqrt{m^2+1}x/2} \tag{4.143}$$

olur. Bu sınırda, dalga fonksiyonunun sonlu olması için $C_2 = 0$ seçilirse,

$$y_1 = C_1 e^{mx/2} \qquad y_3 = C_1 e^{\sqrt{m^2+1}x/2} \tag{4.144}$$

elde edilmektedir.

$x \to \infty$ durumunda etkin potansiyeldeki e^x diğer tüm terimleri bastırdığı için etkin potansiyeller ıraksamaktadır. Bu nedenle, dalga fonksiyonları bu koşulda sıfır olmak zorundadır.

$x \to 0$ durumunda etkin potansiyeller, $x = 0$ civarında $e^x \approx 1 + x + x^2/2$ şeklinde seriye açmak etkin potansiyelin $-1 < x < 1$ aralığındaki davranışını değiştirmemektedir.

Bu yaklaşımla birlikte etkin potansiyeller

$$V_{eff_1} \approx \frac{1+4\mu^2}{4x^2} + \frac{\mu^2}{x} - \nu^2 x - \frac{\nu^2 x^2}{2} + \frac{\mu^2}{2} - \nu^2 - \frac{m^2}{4} \tag{4.145}$$

$$V_{eff_3} \approx \frac{1+4\mu^2}{4x^2} + \frac{1+2\mu^2}{2x} - \nu^2 x - \frac{\nu^2 x^2}{2} + \frac{\mu^2}{2} - \nu^2 - \frac{m^2+1}{4} \tag{4.146}$$

olarak elde edilmektedir.

Yaklaşık etkin potansiyeller için (4.137) ve (4.139) denklemlerinde $\varepsilon = \nu/\sqrt{2}$ olmak üzere $\rho = \sqrt{\varepsilon}x$ değişken dönüşümü yapılırsa, (3.31) denkleminde verilen bikonfluent diferansiyel denklemi elde edilmektedir ve çözümü de

$$f(\rho) = C_1 x^{(1+\alpha)/2} e^{-\rho(\rho+\beta/\sqrt{\varepsilon})/2} H_B(\alpha, \frac{\beta}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{\gamma}{\varepsilon}, \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}, \rho) \tag{4.147}$$

şeklinde elde edilmektedir. Buradaki sabit katsayılar

$$\begin{aligned}
\alpha &= 2i\mu, \\
\beta &= \frac{\nu}{\sqrt{2}}, \\
\frac{\gamma_1}{\varepsilon} &= \frac{\mu^2}{2} - \left(\nu - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{2m^2-1}{8}, \\
\frac{\gamma_2}{\varepsilon} &= \frac{\mu^2}{2} - \left(\nu - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{2m^2+1}{8}, \\
\delta_1 &= -2\mu^2, \\
\delta_2 &= -2-4\mu^2,
\end{aligned} \tag{4.148}$$

ile verilmektedir.

Denklem (3.33)'de verilen polinom olma ifadesi çözülerek,

$$\omega_{nmq} = \mp\frac{c}{a}\sqrt{4n \mp \frac{1}{8} + \left(\frac{q\pi a}{\sqrt{2}L}\right)^2 + \frac{m^2}{4}} + 2i\frac{c}{a} \tag{4.149}$$

şeklinde rezonans frekansları elde edilmektedir. Burada, n, baş kuantum sayısı; j, toplam açısal momentum kuantum sayısıdır. Ayrıca, c, vakumdaki ışık hızı; a, kavitenin yarıçapıdır.

Kütleli spin-1 parçacığının 4.133 denklemi ile verilen küresel uzay-zamandaki rezonans frekansı 4.104, 4.105 ve 4.106 denklemleri çözülerek doğrudan bulunabilmektedir. İkinci mertebeden türevli bu denklemlerde $\alpha = \beta = \delta = 0$ ve $\gamma = 1 - a/r$ dönüşümleri yapılırsa

$$f_1'' + \left[\frac{2r-a}{r(r-a)}\right]f_1' + \left[\frac{2}{r(r-a)} + \frac{\omega^2 r^2}{c^2(r-a)^2} - \frac{j(j+1)}{r^2}\right]f_1 = 0 \tag{4.150}$$

$$f_2'' + \left[\frac{2r+a}{r(r-a)}\right]f_2' + \left[\frac{a^2-3ar}{r^2(r-a)^2} + \frac{\omega^2 r^2}{c^2(r-a)^2} - \frac{j(j+1)}{r^2}\right]f_2 = 0 \tag{4.151}$$

$$f_3'' + \left[\frac{2r+a}{r(r-a)}\right]f_3' + \left[\frac{a}{r(r-a)^2} + \frac{\omega^2 r^2}{c^2(r-a)^2} - \frac{j(j+1)}{r^2}\right]f_3 = 0 \tag{4.152}$$

denklemleri elde edilir. Burada, $f_1 = R_{20} + R_{2\tilde{0}}$, $f_2 = R_{20} - R_{2\tilde{0}}$ ve $f_3 = R_{2+} + R_{2-}$ olarak tanımlanmıştır. Bu denklemlerde

$$\begin{aligned}
f_1 &= e^{i\omega r/c} r^{\sqrt{j(j+1)}} (r-a)^{i\omega a/c} y_1(r), \\
f_2 &= e^{i\omega r/c} r^{\sqrt{j(j+1)}+1} (r-a)^{\sqrt{3-\omega^2 a^2/c^2}-1} y_2(r), \\
f_3 &= e^{i\omega r/c} r^{\sqrt{j(j+1)+1}+1} (r-a)^{i\omega a/c-1} y_3(r),
\end{aligned} \tag{4.153}$$

dönüşümleri ve $r = ax$ değişken dönüşümü yapılırsa çözümler

$$
\begin{aligned}
y_1 &= C_1 H_C\Big(\frac{2i\omega a}{c}, 2\sqrt{j(j+1)}, \frac{2i\omega a}{c}, \frac{2\omega^2 a^2}{c^2}, 2, x\Big) \\
&+ C_2 x^{-2\sqrt{j(j+1)}} H_C\Big(\frac{2i\omega a}{c}, -2\sqrt{j(j+1)}, \frac{2i\omega a}{c}, \frac{2\omega^2 a^2}{c^2}, 2, x\Big), \\
y_2 &= C_1 H_C\Big(\frac{2i\omega a}{c}, 2\sqrt{j(j+1)}, \frac{2i\omega a}{c}, \frac{2\omega^2 a^2}{c^2}, 2, x\Big) \\
&+ C_2 x^{-2\sqrt{j(j+1)+1}} H_C\Big(\frac{2i\omega a}{c}, -2\sqrt(j(j+1), 2\sqrt{3-\frac{\omega^2 a^2}{c^2}}, 2\frac{\omega^2 a^2}{c^2}, 3, x\Big), \\
y_3 &= C_1 H_C\Big(\frac{2i\omega a}{c}, 2\sqrt{j(j+1)+1}, \frac{2i\omega a}{c}, \frac{2\omega^2 a^2}{c^2}, 1, x\Big) + \\
& C_2 x^{-2\sqrt{j(j+1)+1}} H_C\Big(\frac{2i\omega a}{c}, -2\sqrt{j(j+1)+1}, \frac{2i\omega a}{c}, \frac{2\omega^2 a^2}{c^2}, 1, x\Big),
\end{aligned}
\tag{4.154}
$$

şeklinde elde edilmektedir. $x \to 0$ durumunda çözümler ıraksadığı için integrasyon sabitlerinden $C_2 = 0$ alınmaktadır.

Denklem (3.28)'de verilen polinom olma ifadesi kullanılarak,

$$
\omega = -\frac{ic}{a}\left[n+1+\sqrt{j(j+1)} - \frac{3}{n+1+\sqrt{j(j+1)}}\right] \tag{4.155}
$$

şeklinde rezonans frekansı bulunmaktadır. Burada, n, baş kuantum sayısı; j, toplam açısal momentum kuantum sayısıdır. Ayrıca, c, vakumdaki ışık hızı; a, kavitenin yarıçapıdır.

5. TARTIŞMA

Çalışmanın bu kısmında, silindirik ve küresel kavitede kütlesiz spin-1 parçacık denkleminden elde edilen sonuçlar ile Maxwell denkleminden elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak Barut modelinden elde edilen denklemin tutarlılığı tartışılmıştır. Ayrıca, silindirik ve küresel uzay-zamandaki kütleli spin-1 alanı ile gravitasyon alanın minimal çiftleniminden elde edilen hareket denklemleri çözülerek kütle çekimsel kırmızıya kayma için metrik katsayıları bulunmuştur. Belirlenen bu metriklerde kütleli spin-1 parçacık denklemi çözülerek elde edilen rezonans frekansları tartışılmaktadır.

5.1. Kütlesiz Spin-1 Parçacık Denkleminin Çözümlerinden Elde Edilen Rezonans Frekansları

Silindirik kavite içindeki kararlı elektromanyetik dalga için elde edilen rezonans frekansı 2.8 denkleminde

$$f_{m,n,q} = \frac{c}{2\pi a}\sqrt{\chi^2_{m,n} + p^2\pi^2\left(\frac{a}{L}\right)^2} \tag{5.1}$$

olarak bulunmuştur. Kütlesiz spin-1 parçacık denkleminin aynı koşuldaki çözümünden elde edilen rezonans frekansı 4.14 denkleminde verilmektedir ve karşılaştırıldığında, sonuçlarının aynı olduğu görülmektedir.

Küresel kavite içindeki kararlı elektromanyetik dalga için elde edilen rezonans frekansı 2.19 denkleminde

$$f \approx \frac{c}{2\pi a}\sqrt{l(l+1)} \tag{5.2}$$

olarak bulunmuştur. Kütlesiz spin-1 parçacık denkleminin aynı koşuldaki çözümünden elde edilen rezonans frekansı 4.34 denkleminde verilmektedir ve karşılaştırıldığında, sonuçlarının benzer olduğu görülmektedir. Klasik çözümdeki yörünge mod sayısı, kuantum mekaniksel çözümde yerini toplam açısal momentum kuantum sayısına bırakmaktadır.

5.2. Kütleli Spin-1 Parçacık Denkleminin Çözümlerinden Rezonans Frekansları

Silindirik kavite için hesaplanan kütle çekimsel kırmızıya kayma metriği 4.122 denklemi ile verilmektedir. Bu uzay-zamanda, $M^2 \to 0$ limitinde kütleli spin-1 parçacığı için elde edilen rezonans frekansı

$$\omega_{nmq} = \mp\frac{c}{a}\sqrt{4n \mp \frac{1}{8} + \left(\frac{q\pi a}{\sqrt{2}L}\right)^2 + \frac{m^2}{4}} + 2i\frac{c}{a} \tag{5.3}$$

şeklindedir. Açısal frekansın hem gerçel hem de sanal kısmının olması, kuasinormal modları ifade etmektedir. Parçacık hareketini sürdürürken, bir yandan da sönüm yapmaktadır. Sönümün nasıl olacağı ise genellikle nitelik çarpanı Q ile belirlenmektedir.

Nitelik çarpanı ne kadar büyükse sönüm o kadar yavaş olmaktadır. Nitelik çarpanı $Q = \omega_{\mathcal{R}}/\omega_{I\mathcal{M}}$ ile hesaplanabilir. Bu durumda nitelik çarpanı

$$Q = \sqrt{n \mp \frac{1}{32} + \frac{q^2\pi^2a^2}{8L^2} + \frac{m^2}{16}} \tag{5.4}$$

olarak elde edilir. Açıkça görüldüğü gibi, kavitenin yarıçapının kavitenin boyundan çok büyük olması durumunda çok yavaş sönüm yapan yüksek performanslı bir silindirik kavite elde edilebilmektedir.

Küresel kavite için hesaplanan kütle çekimsel kırmızıya kayma metriği 4.133 denklemi ile verilmektedir. Bu uzay-zamanda, $M^2 \to 0$ limitinde kütleli spin-1 parçacığı için elde edilen rezonans frekansı

$$\omega = -\frac{ic}{a}\left[n+1+\sqrt{j(j+1)} - \frac{3}{n+1+\sqrt{j(j+1)}}\right] \tag{5.5}$$

şeklindedir. Açısal frekansın sadece sanal olması, parçacığın çok hızlıca sönümlü bir hareket yaptığını göstermektedir. Bu durumda nitelik çarpanı $Q = 0$ olmaktadır.

6. SONUÇ

Barut modelindeki kütlesiz spin-1 parçacık denkleminin çözümlerinden elde edilen rezonans frekansları ile klasik Maxwell denklemlerinin çözümlerinden elde edilen rezonans frekansları vakumdaki silindirik ve küresel kavitelerde karşılaştırıldığında, bu frekans bağıntılarının birbirine denk olduğu bulunmuştur. Vakumdaki silindirik kavitenin frekansları aynı bulunurken, vakumdaki küresel kavitenin frekansları klasik çözümlerdeki yörünge açısal momentum mod sayısının kuantum mekaniksel çözümde yerini toplam açısal momentum kuantum sayısına bırakması dışında birbirine eşdeğer olduğu görülmüştür. Böylece, Maxwell denklemlerinin içermediği spin bilgisi, Barut modeli kullanılarak rezonans frekans bağıntısına kuantum mekaniksel olarak dahil edilmektedir.

Barut modelinden elde edilen kütleli spin-1 parçacık denklemi ise $M^2 \to 0$ limitinde radyal bağımlı katsayılardan oluşan anizotropik metrik için en genel halde çözülmüştür. Bilinmeyen bu katsayılar, kütleli spin-1 alanı ile Einstein kütle çekimsel alanının minimal çiftlenimi sonucu, Euler-Lagrange hareket denklemleri ve Hamilton kısıtlama denklemlerinin çözülmesiyle kütle çekimsel kırmızıya kayma için belirlenmiştir. Belirlenen metrikler, kütleli spin-1 parçacık denkleminin en genel halde çözülmesiyle elde edilen diferansiyel denklemlerde yerine konularak, böyle bir geometriye sahip uzay-zamanda $M^2 \to 0$ limitli kütleli spin-1 parçacığının rezonans frekansları tespit edilmiştir.

Rezonans frekans bağıntıları, fotonun karakteristik davranışını açıklamak için kullanılabildiği gibi kavitenin nitelik çarpanını belirlemek için de kullanılabilmektedir. Vakumda ve kütle çekim alanı etkisinin sabit olduğu ortamdaki kavitelerin rezonans frekanslarının sanal kısımları sıfır olduğu için, nitelik çarpanı sonsuza gider ve sönüm olmayan mükemmel kaviteyi tanımlamaktadır. Öte yandan, kütle çekim alanı etkisinin radyal olarak değiştiği silindirik kavitenin rezonans frekansı yarı-normal mod olarak bulunduğu için, kalite faktörü sonludur. Bu nedenle, böyle bir kavite içindeki kütleli spin-1 parçacığı bir yandan sönüm yaparken bir yandan hareketine devam etmektedir. Küresel kavitenin rezonans frekansı ise sadece sanal kısımdan oluşmaktadır. Dolayısı ile, böyle bir kavitenin nitelik çarpanı sıfırdır ve parçacık hızlı bir şekilde sönümlenir. Ayrıca, belirlenen bu izotropik metrikler için etkin kırılma indisleri ve kütle-çekimsel kırmızıya kayma hesaplanmıştır.

Silindirik kavite için hesaplanan 4.122 denklemindeki kütle çekimsel kırmızıya kayma metriği tekrar incelendiğinde; 3.4 denklemi kullanılarak etkin kırılma indisi

$$n_{eff}(r) = \frac{1}{ln(r/a)} \tag{6.1}$$

olarak elde edilmektedir. Burada, kırılma indisi kavitenin içinde ve dışında sıfır ile sonsuz arasında değişmektedir. Kavitenin yarıçapında sonsuza gitmektedir. Kütle çekimsel kırmızıya kayma ise 3.5 denklemi kullanılarak hesaplanırsa

$$z = \frac{1}{ln(r/a)} - 1 \tag{6.2}$$

şeklinde elde edilmektedir. Etkin kırılma indisi kavitenin içinde ve dışında $[0, \infty)$ aralığında değiştiği için, e doğal logaritma olmak üzere $0 < r < ae$ aralığında maviye kayma; $ae < r < \infty$ aralığında kırmızıya kayma gerçekleşmektedir.

Küresel kavite için hesaplanan 4.122 denklemindeki kütle çekimsel kırmızıya kayma metriği tekrar incelendiğinde; 3.4 denklemi kullanılarak etkin kırılma indisi

$$n_{eff}(r) = \frac{1}{1 - a/r} \tag{6.3}$$

şeklinde elde edilmektedir. Etkin kırılma indisi kavitenin içinde sıfıra giderken, kavitenin dışında bire gitmektedir ve kavitenin yarçapında ise sonsuza gitmektedir. Kütle çekimsel kırmızıya kayma ise

$$z = \frac{1}{1 - a/r} - 1 \tag{6.4}$$

şeklinde bulunmaktadır. Kavitenin içinde kırılma indisi sıfıra gittiği için maviye kayma, dışında ise kırılma indisi bire gittiği için ne kırmızıya ne de maviye kayma gerçekleşmektedir. Kavitenin yarıçapında ise, kırılma indisi sonsuza gittiği için sonsuza giden bir kırmızıya kayma gerçekleşmektedir.

7. KAYNAKLAR

ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I.A. 1964. Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Courier Corporation 55, 504 p.

ABREU, L.M., SANTOS, E.S. and VIANNA, J.D.M. 2010. Duffin–Kemmer–Petiau theory with minimal and non-minimal couplings. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 43(49): 495402.

AHMADI, N. and NOURI-ZONOZ, M. 2006. Quantum gravitational optics: Effective Raychaudhuri equation. *Physical Review D*, 74(4): 044034.

ARFKEN, G.B. and WEBER, H.J. 2005. Mathematical methods for physicists international student edition. Academic press, 1182 p.

BARUT, A.O. 1989. Excited states of zitterbewegung. *Physics Letters B*, 237(3-4): 436-439.

BELINFANTE, F.J. 1939. A New Form of the Baryteron Equation and Some Related Questions.*Nature* , 143, 201.

BRONNIKOV, K.A. and KOROLYOV, P.A. 2017. On wormholes with long throats and the stability problem. arXiv:1705.05906v2 [gr-qc].

CASANA, R., LUNARDI, J.T., PIMENTEL, B.M. and TEIXEIRA, R.G. 2002. Spin 1 fields in Riemann-Cartan space-times via Duffin-Kemmer-Petiau theory. *General Relativity and Gravitation*, 34(11): 1941-1951.

CASANA, R., FAINBERG, V.Y., LUNARDI, J.T., PIMENTEL, B. M. and TEIXERIA, R.G. 2003. Massless DKP fields in Riemann–Cartan spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 20(11): 2457.

CASANA, R., LUNARDI, J. T., PIMENTEL, B. M. and TEIXEIRA, R.G. 2005. Conformal invariance of massless Duffin–Kemmer–Petiau theory in Riemannian spacetimes.*Classical and Quantum Gravity*, 22(14): 3083.

CASANA, R., DE MELO, C.A.M. and PIMENTEL, B. M. 2007. Massless DKP field in a Lyra manifold. *Classical and Quantum Gravity*, 24(3): 723.

CASTRO, L.B. and DE OLIVEIRA, L.P. 2014. Remarks on the Spin-One Duffin-Kemmer-Petiau Equation in the Presence of Nonminimal Vector Interactions in Dimensions. *Advances in High Energy Physics*, 2014: 8.

CHARGUI, Y. and TRABELSI, A. 2013. Confinement of spin-1 and spin-0 bosons in (1+ 1)-dimensions with a scalar linear potential. *Physica Scripta*, 87(6): 065003.

DE BROGLIE, L. 1934. L'équation d'Ondes du Photon. CR Acad. Sci. Paris, 199: 445-448; DE BROGLIE, L. and WINTER M. 1934. Sur le spin du photon. CR Acad. Sci. Paris, 199: 813-816.

DE OLIVEIRA, L.P. and , DE CASTRO A.S. 2015. Transmission coefficient and two-fold degenerate discrete spectrum of spin-1 bosons in a double-step potential. *International Journal of Modern Physics E*, 24(04): 1550031.

DIRAC, P.A. 1928. The quantum theory of the electron. *In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 117(778): 610-624.

DUFFIN, R.J. 1938. On the characteristic matrices of covariant systems. *Physical Review*, 54(12): 1114.

EDDINGTON, A.S. 1920. Space, time and gravitation: an outline of the general relativity theory. Cambridge university press. 217 p.

EINSTEIN, A. 1905a. On the special theory of relativity. *Ann Phys*, 17: 891-921.

EINSTEIN, A. 1905b. On a heuristic point of view concerning the production and transformation light. *Annalen der Physik*, 17: 132-148.

EINSTEIN, A. 1911. On the Influence of Gravitation on the Propagation of Light. *Annalen der Physik*, 35: 898-908.

EVANS, J., NANDI, K. K. and ISLAM, A. 1996. The optical-mechanical analogy in general relativity: exact Newtonian forms for the equations of motion of particles and photons. *General Relativity and Gravitation*, 28(4): 413-439.

FALEK, M. and MERAD, M. 2012. Duffin-Kemmer-Petiau equation in curved space-time. In N. Mebarki, J. Mimouni, N. Belaloui, and K. Ait Moussa (Eds.), AIP Conference Proceedings 1444(1): 367-369.

FELICE, F. 1971. On the gravitational field acting as an optical medium. *General Relativity and Gravitation*, 2(4): 347-357.

GECIM, G. 2015. Kütleli gravitasyon teorilerinde spinli relativistik parçacıkların kuantum mekaniksel davranışlarının incelenmesi. Doktora tezi, Akdeniz Üniversitesi, 84 s.

GECIM, G. and SUCU, Y. 2017. Massive vector bosons tunnelled from the (2+ 1)-dimensional black holes. *The European Physical Journal Plus*, 132: 1-8.

GECIM, G. and SUCU, Y. 2017. The GUP effect on tunnelling of massive vector bosons from the 2+ 1 dimensional black hole. arXiv:1704.03537v2 [gr-gc].

GERLACH, W. and STERN, O. 1922. Der experimentelle nachweis der richtungsquantelung im magnetfeld. *Zeitschrift für Physik A Hadrons* *and Nuclei*, 9(1): 349-352.

GLOGE, D. and MARCUSE, D. 1969. Formal quantum theory of light rays. JOSA, 59(12), 1629-1631.

GURTAS, S. 2013. Spin-1 ve Spin-1/2 relativistik parçacıklarının çeşitli potansiyeller için (2+1) boyutta kuantum mekaniksel davranışlarının incelenmesi. Yüksek lisans tezi, Akdeniz Üniversitesi, 60 s.

GREINER, W. 2000. Relativistic Quantum Mechanics 3.ed. Berlin: Springer, 424 p.

HUYGENS, C. 1690. Treatise on light. Rendered into English by S.P. THOMPSON, University of Chicago Press,Macmillan And Company, Limited, 147 p.

HERTZ, H. 1887. On the photoelectric effect. *Ann Phys*, 31: 983-1000.

JACKSON, J.D. 1975. Classical Electrodynamics. Wiley-VCH Verlag GmbH and Co. KGaA., 808 p.

JENA, P.K., NAIK, P.C. and PRADHAN, T. 1980. Photon as the zero-mass limit of DKP field. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 13(9): 2975.

KEMMER, N. 1939. The particle aspect of meson theory. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, *Mathematical and Physical Sciences*, 91-116.

LEONHARDT, U. 2000. Space-time geometry of quantum dielectrics. *Physical Review A*, 62(1): 012111.

LORENTZ, H.A. 1904. Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light. In KNAW Proceedings 6: 1903-1904.

PLANCK, M.K.E.L. 1900. Zur theorie des gesetzes der energieverteilung im normalspectrum. Verhandl. *Dtsc. Phys. Ges.*, 2: 237.

MAXWELL, J.C. 1865. A dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, 155: 459-512.

MICHELSON, A.A. and MORLEY, E.W. 1887. On the Relative Motion of the Earth and of the Luminiferous Ether. *Sidereal Messenger*, 6: 306-310.

MISNER, C.W., THORNE, K.S. and WHEELER, J.A. 1973. Gravitation. W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1304 p.

NANDI, K.K. and ISLAM, A. 1995. On the optical–mechanical analogy in general relativity. *American Journal of Physics*, 63(3): 251-256.

PETIAU, G. 1939. Sur la représentation de l'équation d'ondes et l'évolution des grandeurs électromagnétiques dans la théorie du photon. *J. Phys. Radium*, 10(9): 413-419.

PROCA, A.L. 1936. Sur la théorie ondulatoire des électrons positifs et négatifs. *J. phys. radium*, 7(8), 347-353.

RONVEAUX, A. and ARSCOTT, F.M. 1995. Heun's Differential Equations. Oxford University Press., Newyork, 374 p.

SCHRODINGER, E. 1930. Sitzungsber. *Preuss. Akad. Wiss. Physik.-math. Kl*,24: 418.

SHORE, G.M. 2003. Quantum gravitational optics. *Contemporary Physics*, 44(6): 503-521.

SUCU, Y. and UNAL, N. 2002. Solution of massless spin one wave equation in Robertson-Walker space-time. *International Journal of Modern Physics A*, 17(08): 1137-1147.

SUCU, Y. and UNAL, N. 2005. Vector bosons in the expanding universe. *The European Physical Journal C-Particles and Fields*, 44(2): 287-291.

UNAL, N. 1997. A simple model of the classical zitterbewegung: Photon wave function. *Foundations of Physics*, 27(5): 731-746.

UNAL, N. 2006. Electromagnetic And Gravitational Interactions Of The Spinning Particle. *Journal of Mathematical Physics*, 092501(47): 1-13

WEINBERG, S. 1972. Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity, Wiley, New York, 688 p.

XUE-JUN, W. and CHONG-MING, X. 1988. Null geodesic equation equivalent to the geometric optics equation. *Communications in Theoretical Physics*, 9(1): 119.

YALTKAYA, N. 1997. Vektör parçacıklarının bazı dış alanlar içindeki hareketi. Yüksek lisans tezi, Akdeniz Üniversitesi, 43 s.

ÖZGEÇMİŞ

Cavit Tekinçay, 1988 yılında Rize'de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Bodrum'da tamamladı. 2007 yılında girdiği Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü'nden 2012 yılında mezun oldu. 2014 - 2017 yılları arasında, Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı.