T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(q-)UMBRAL ANALİZDE SHEFFER TİPLİ POLİNOMLAR VE UYGULAMALARI

RAHİME DERE

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2016

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(q-)UMBRAL ANALİZDE SHEFFER TİPLİ POLİNOMLAR VE UYGULAMALARI

RAHİME DERE

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 16/12/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/çokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK

Yrd. Doç. Ahmet ALTÜRK

Yrd. Doç. Dr. Seçil ÇEKEN

ÖZET

(q-)UMBRAL ANALİZDE SHEFFER TİPLİ POLİNOMLAR VE UYGULAMALARI

RAHİME DERE

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK
Aralık 2016, 52 sayfa

Bu tezin temel amacı, q-umbral analizdeki q-Sheffer polinomları ve bunların bir alt ailesi olan q-Appell polinomlarıyla ilgili çeşitli özellikler vermek ve bu özellikler yardımıyla bazı özel polinomları incelemektir. Bu tezde, ilk olarak klasik umbral cebirin tanımı ve bazı özellikleri verilmiştir. Daha sonra umbral analizin bir genellemesi olan c_n-umbral analiz verilmiş ve c_n-Bernoulli tipli polinomlar ile c_n-Euler tipli polinomlar tanımlanarak bunların bazı özellikleri elde edilmiştir. Ayrıca, q-umbral analiz yöntemleri incelenmiş ve bu yöntemler yardımıyla q-Bernoulli polinomları, q-Euler polinomları, q-Hermite polinomları, q-Hermite tabanlı Bernoulli polinomları ve q-Hermite tabanlı Euler polinomlarının üreteç fonksiyonları verilerek çeşitli özellikleri elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Umbral analiz, Umbral cebir, q-analiz, q-umbral analiz, Bernoulli polinomları, Euler Polinomları, Hermite Polinomları, Üreteç fonksiyonları

JÜRİ: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK (Danışman)
Prof. Dr. Mustafa ALKAN
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
Yrd. Doç. Ahmet ALTÜRK
Yrd. Doç. Dr. Seçil ÇEKEN

ABSTRACT

THE SHEFFER TYPE POLYNOMİALS AND THEIR APPLICATIONS ON (q-)UMBRAL CALCULUS

RAHİME DERE

PhD Thesis in Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK
December 2016, 52 pages

The main aim of this thesis is to give some identities about q-Sheffer polynomials and q-Appell polynomias on q-umbral calculus and investigate some special polynomials by using these identities. Firstly, the definition and some identities of classic umbral algebra are given. Then c_n-umbral calculus, which is a generalization of umbral calculus, is given and c_n-Bernoulli type polynomials and c_n-Euler type polynomials are defined. Some identities of these polynomials are also obtained. Furthermore, the methods of q-umbral calculus are investigated. By using these methods and generating functions for these numbers and polynomials, some relations of q-Bernoulli polynomials, q-Euler polynomials, q-Hermite polynomials, q-Hermite based Bernoulli polynomials ve q-Hermite based Euler polynomials are derived.

KEYWORDS: Umbral calculus, Umbral algebra, q-calculus, q-umbral calculus, Bernoulli polynomials, Euler polynomials, Hermite polynomials, Generating functions

COMMITTEE: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK (Supervisor)
Prof. Dr. Mustafa ALKAN
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
Asst. Prof. Ahmet ALTÜRK
Asst. Prof. Dr. Seçil ÇEKEN

ÖNSÖZ

Umbral analiz, çeşitli polinomlarla kuvvet serileri arasında bağlantı kuran bir teoridir. Umbral analizin tarihi ise 17. yüzyıla dayanır. Fakat yükselişi 19. yüzyılda olmuştur. Temel olarak umbral analizin gelişimi, bugün de birçok matematikçi tarafından çalışılan önemli bir konu olan Sheffer polinomları teorisinin ortaya atılmasıyla olmuştur. Özellikle ünlü matematikçi Appell'in yaptığı çalışmalar, bazı özel polinomların formal kuvvet serileriyle olan ilişkilerini ortaya koymuştur. Bu polinomlar Sheffer ve Appell polinomları olarak bilinir. Ayrıca fonksiyonel analizin gelişmesiyle umbral analizin operatör teorisiyle olan bağlantısı incelenmeye başlanmıştır. Böylece umbral analizin temel teorisi ortaya koyulmuştur.

Bu tezde klasik umbral analizin bir genellemesi olan q-umbral analiz çalışılmıştır. q-umbral analizin matematiğin birçok alanında ve fizik, istatistik, bilgisayar bilimleri gibi alanlarda pekçok uygulaması bulunmaktadır.

Bu tez, Giriş, Bulgular ve Tartışma, Sonuç ve Kaynaklar olmak üzere dört ana bölümden oluşur. Giriş kısmında umbral cebir, lineer operatörler, Sheffer dizileri gibi bazı temel kavram ve gösterimler verilmiştir. Bulgular ve Tartışma kısmında umbral analizin genellemesi ve q-umbral analiz verilmiş, bazı özel polinomlar incelenmiştir. Sonuç kısmında bu tez çalışmasının faydalı olabileceği alanlardan bahsedilmiştir. Kaynaklar kısmında ise bu tez çalışması sırasında kullanılan kitap ve makale gibi yayınların bir listesine yer verilmiştir.

Bu tez çalışması sırasında bilgisini ve desteğini benden bir an olsun esirgemeyen sayın danışmanım Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK'e en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, hayatım boyunca daima yanımda olan ve bana her türlü yardımda bulunan sevgili annem Nermin DERE'ye, babam Kemal DERE'ye, ablam Selbinaz BAĞIŞLAR'a, eniştem Hasan BAĞIŞLAR'a ve çok sevgili yeğenlerim Beyza Berin, Betül Berra ve Beren Buğçe BAĞIŞLAR'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler:

$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$\mathcal{P}$	Tek değişkenli polinomlar kümesi
$\mathcal{P}^*$	$\mathcal{P}$ üzerindeki bütün lineer fonksiyonellerin vektör uzayı
$\mathfrak{F}$	Formal kuvvet serilerinin kümesi
$\delta_{n,k}$	Kronecker delta fonksiyonu
$o\left(f\left(t\right)\right)$	$f\left(t\right)$ serisinin mertebesi
$der\left(p\left(x\right)\right)$	$p\left(x\right)$ polinomunun derecesi
$\left\langle L \mid p\left(x\right)\right\rangle$	L fonksiyonelinin $p\left(x\right)$ polinomuna etkisi
$\partial_t f\left(t\right)$	t'ye göre türev operatörü
$H_n^{(\alpha)}\left(x\right)$	Mertebesi α, derecesi n olan Hermite polinomları
$B_n^{(\alpha)}\left(x\right)$	Mertebesi α, derecesi n olan Bernoulli polinomları
$E_n^{(\alpha)}\left(x\right)$	Mertebesi α, derecesi n olan Euler polinomları
$\mathcal{B}_n^{(\alpha)}\left(c_n; x\right)$	Mertebesi α, derecesi n olan c_n-Bernoulli tipli polinomlar
$\mathcal{E}_n^{(\alpha)}\left(c_n; x\right)$	Mertebesi α, derecesi n olan c_n-Euler tipli polinomlar
$B_{n,q}^{(\alpha)}\left(x\right)$	Mertebesi α, derecesi n olan q-Bernoulli polinomları
$E_{n,q}^{(\alpha)}\left(x\right)$	Mertebesi α, derecesi n olan q-Euler polinomları
$H_{n,q}^{(\alpha)}\left(x\right)$	Mertebesi α, derecesi n olan q-Hermite polinomları
$B_{H,n,q}^{(a)}\left(x, v\right)$	Mertebesi α, derecesi n olan q-Hermite tabanlı Bernoulli polinomları
$E_{H,n,q}^{(a)}\left(x, v\right)$	Mertebesi α, derecesi n olan q-Hermite tabanlı Euler polinomları
$D_{t,q}$	t 'ye göre q-türev operatörü

1. GİRİŞ

Polinom dizileri analizde ve uygulamalı matematikte çok önemli rol oynar. Örneğin, $H_n(x)$ Hermite polinomları

$$y^{''} - 2xy^{'} + 2ny = 0$$

ikinci dereceden lineer diferensiyel denkleminin bir çözümüdür.

Yine Hermite polinomları gibi bazı polinomlar için, Rodrigues formülü gibi operatör içeren formüller elde edilebilir:

$$H_n(x) = e^{x^2} D^n e^{-x^2}.$$

Üreteç fonksiyonları yardımıyla yüksek mertebeden Bernoulli polinomları gibi birçok alanda uygulaması olan bazı özel polinomlar ve bunların çeşitli özellikleri verilebilir:

$$\left(\frac{t}{e^t - 1}\right)^{\alpha} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!}$$

(Erdelyi 1953).

Bu polinomlar içinde en önemlilerinden biri de Sheffer polinom ailesidir. $A_0 \neq 0$ ve $B_1 \neq 0$ olmak üzere,

$$A(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \cdots$$

ve

$$B(t) = B_1 t + B_2 t^2 + \cdots$$

iken

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k(x)}{k!} t^k = A(t) e^{xB(t)}$$

üreteç fonksiyonu yardımıyla tanımlanan $S_n(x)$ Sheffer polinom ailesi içinde birçok önemli alanda uygulaması olan polinomları içerir. Örneğin Hermite polinomları fizikte Shrödinger dalga denklemi ya da Brown hareketi gibi konularda uygulamaya sahiptir. Laguerre polinomları hidrojen atomunun dalga denkleminin çözümünde kullanılır. Bernoulli polinomları Hurwitz zeta fonksiyonu, Riemann zeta fonksiyonu gibi sayılar teorisinin önemli konularında çalışılır. Abel polinomlarıyla geometrik olasılık arasında bir bağ kurulabilir (Roman 2005).

Bu tez çalışmasında Sheffer polinomlarının bir genellemesi olan ve daha çok uygulama alanı bulunan q-Sheffer polinomları ve onların bir alt ailesi olan q-Appell polinomları incelenmiş ve bunlara bazı örnekler verilmiştir.

2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI

Bu bölümde, bu tez çalışması boyunca kullanılacak olan bazı tanımlar ve ön bilgiler verilecektir.

Bu tez çalışmasında umbral analiz yöntemleri kullanılır. Umbral analizin tarihi 17. yüzyıla dayanır. Ayrıntılı olarak gelişmesi ise 19. yüzyılda başlamıştır. Temel olarak umbral analizin gelişimi üç farklı aşamada incelenebilir. Bunlardan ilki, Sylvester, Cayley ve Blissard gibi bazı matematikçilerin 19. yüzyılda umbral analizin önemine dikkat çeken çalışmalarıyla olmuştur. Yine de bu devirdeki çalışmalar yeterli bir sonuç vermemiştir.

Umbral analiz tarihindeki ikinci gelişme, bugün de birçok matematikçi tarafından çalışılan önemli bir konu olan Sheffer polinomları teorisinin ortaya atılmasıyla olmuştur. Bu yıllarda ünlü matematikçi Appell'in yaptığı çalışmalar, bazı özel polinomların formal kuvvet serileriyle olan ilişkilerini ortaya koymuştur. Bu polinomlar Sheffer ve Appell polinomları olarak bilinir.

Umbral analiz tarihindeki üçüncü gelişme ise, lineer operatör teorisidir. Fonksiyonel analizin gelişmesiyle umbral analizin operatör teorisiyle olan bağlantısı incelenmeye başlanmıştır.

Bütün bu aşamalardan sonra ünlü matematikçi Rota ve Taylor 1970 yıllarında lineer fonksiyonel ve lineer operatörler teorisine dayanan modern umbral analiz teorisini kurmaya başlamıştır. Nihayetinde Steven Roman, Rota'nın çalışmalarına devam etmiş ve umbral analizin teorisi kurulmuştur (Di Bucchianico ve Loeb 2000, Roman 2005).

1980 yıllarından beri umbral cebir alanında pek çok matematikçi önemli çalışma yapmıştır. Bunlardan bazıları umbral cebirin diğer cebirlerle olan bağlantısını incelerken, bazıları ise bu tezde kullanılan üreteç fonksiyonu metotlarını kullanmıştır. Günümüzde umbral analiz ve üreteç fonksiyonları kullanarak yapılan çalışmalardan bazıları (Dere ve Şimşek, 2011-2015) ve (Kim ve Kim 2013,2014) yayınlarında bulunabilir.

q-umbral analiz ise ilk kez Ihrig ve Ismail (1981) ve Roman (1982) tarafından incelenmiş olup günümüzde Ernst (2006, 2008), Kim ve Kim (2014) ve Dere (2016) gibi bazı matematikçiler tarafından çalışılmaktadır.

2.1. Temel Kavram ve Gösterimler

Tanım 2.1. *F cismi üzerinde iki vektör uzayı V ve W olsun. Her $r,\ s \in F$ ve $u,\ v \in V$ için*

$$\tau\left(ru + sv\right) = r\tau\left(u\right) + s\tau\left(v\right)$$

özelliğini sağlayan $\tau : V \to W$ fonksiyonuna lineer dönüşüm denir (Roman 1992).

Tanım 2.2. *F cisim ve $\mathfrak{A}$ boştan farklı bir küme olsun. Aşağıdaki üç özellik sağlanıyorsa*

$\mathfrak{A}$'ya toplama, çarpma ve skalerle çarpma işlemlerine göre F cismi üzerinde bir cebirdir denir.
1) $\mathfrak{A}$, toplama ve skalerle çarpma işlemleri altında bir vektör uzayıdır.
2) $\mathfrak{A}$, toplama ve çarpma işlemleri altında bir halkadır.
3) $r \in F$ ve $a, b \in \mathfrak{A}$ için

$$r\left(ab\right) = \left(ra\right)b = a\left(rb\right)$$

eşitliği sağlanır (Roman 1992).

Tanım 2.3. *F cismi üzerinde bir vektör uzayı V olsun. $f : V \rightarrow F$ lineer dönüşümüne V üzerinde bir lineer fonksiyonel denir (Roman 1992).*

Tanım 2.4. *V üzerindeki bütün lineer fonksiyonellerin kümesi V^* ile gösterilir ve buna V'nin cebirsel dual uzayı denir (Roman 1992).*

Tanım 2.5. *$z \in \mathbb{C}$ olsun. Herhangi bir x karmaşık sayısı için $H_n\left(x\right)$ Hermite polinomları,*

$$\exp^{\left(2xz-z^2\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n\left(x\right)\frac{z^n}{n!}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Erdelyi 1953, Roman 2005).

Tanım 2.6. *$z \in \mathbb{C}$ olsun. Herhangi bir x karmaşık sayısı için mertebesi α olan $B_n^{(a)}\left(x\right)$ Bernoulli polinomları,*

$$\left(\frac{z}{e^z-1}\right)^a e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(a)}\left(x\right)\frac{z^n}{n!}, |z| < 2\pi$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Carlitz 1960, Erdelyi 1953, Roman 2005).

Tanım 2.7. *$z \in \mathbb{C}$ olsun. Herhangi bir x karmaşık sayısı için mertebesi α olan $E_n^{(a)}\left(x\right)$ Euler polinomları,*

$$\left(\frac{2}{e^z+1}\right)^a e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(a)}\left(x\right)\frac{z^n}{n!}, |z| < \pi$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Erdelyi 1953, Roman 2005).

Tanım 2.8. *$\alpha \in \mathbb{Z}$, $v \in \mathbb{Z}^+$, $f\left(t,\alpha\right)$ t 'ye bağlı bir fonksiyon ve $h\left(t,v\right)$ t 'ye bağlı analitik bir fonksiyon olmak üzere mertebesi α olan $\Phi_n^{(\alpha)}\left(x,v\right)$ modifiye edilmiş Milne-Thomson polinomları,*

$$f\left(t,\alpha\right)e^{xt+h(t,v)} = \sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n^{(\alpha)}\left(x,v\right)\frac{t^n}{n!} \tag{2.1}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Dere ve Şimşek 2012, 2015).

Açıklama 2.9. *(2.1)'de $v = 0$ alınırsa*

$$\Phi_n^{(\alpha)}(x, 0) = \Phi_n^{(\alpha)}(x)$$

olur ve burada Milne-Thomson (1933) tarafindan verilen $\Phi_n^{(\alpha)}(x)$ polinomuna indirgenmiş olur.

Polinom dizileri uygulamalı matematikte büyük rol oynar. Bu polinom dizilerinin en önemlilerinden birisi $S_n(x)$ ile gösterilen Sheffer dizileridir.

Bir $S_n(x)$ dizisinin Sheffer dizisi olması için gerek ve yeter koşul $A(t) = A_0 + A_1t + A_2t^2 + \ldots$, $(A_0 \neq 0)$ ve $B(t) = B_1t + B_2t^2 + \ldots$, $(B_1 \neq 0)$ iken

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k(x)}{k!} t^k = A(t) e^{xB(t)}$$

olmasıdır (Roman 2005).

$\mathcal{P}$ tek değişkenli polinomların bir cebiri olsun. $\mathcal{P}^*$ ise $\mathcal{P}$ üzerinde tanımlı bütün lineer fonksiyonellerden oluşan bir vektör uzayı olsun. $\mathcal{P}$ üzerindeki bir lineer fonksiyonel bir formal kuvvet serisi ile temsil edilebilir. Yani, $\mathcal{P}$ üzerindeki bir lineer fonksiyonel ile bir formal kuvvet serisi arasında bire bir ilişki vardır.

$\mathfrak{F}$, $\mathbb{C}$ cismi üzerinde tanımlı formal kuvvet serilerinin kümesi olsun. $\mathfrak{F}$'nin elemanları aşağıdaki şekilde yazılır. $a_k \in \mathbb{C}$ olsun.

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \tag{2.2}$$

dir.

İki formal kuvvvet serisinin eşit olabilmesi için gerek ve yeter koşul katsayılarının eşit olmasıdır. Formal kuvvet serilerinin toplamı ve çarpımı işlemleri aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) t^k,$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right) t^k$$

Bu iki işlemle birlikte $\mathfrak{F}$, bir cebirdir (Roman 2005).

Tanım 2.10. *Katsayısı sıfır olmayan t^k terimleri içindeki en küçük k tamsayısına $f(t)$'nin mertebesi denir ve $o(f(t))$ ile gösterilir (Roman 2005).*

Açıklama 2.11. *$o(f(t)) = 0$ ise $f(t)$ tersinirdir, $o(f(t)) = 1$ ise $f(t)$ delta serisidir denir.*

$f(t) = 0$ alınırsa $o(f(t)) = +\infty$ olur. Ayrıca aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$o(f(t)\,g(t)) = o(f(t)) + o(g(t)),$$

$$o(f(t) + g(t)) \geq \min\{o(f(t)), o(g(t))\}.$$

Bir $f(t)$ serisinin çarpmaya göre tersinin olabilmesi için gerek ve yeter koşul $o(f(t)) = 0$ olmasıdır. Bu şekildeki $f(t)$ serisine tersinirdir denir.

Eğer $o(f(t)) = 1$ ise, $f(t)$ serisi $f\left(\overline{f}(t)\right) = \overline{f}(f(t)) = t$ olacak şekilde $\overline{f}(t)$ bileşke tersine sahiptir. Delta serilerinin kuvveti olan $f(t)^k$ terimleri $\mathfrak{F}$ için bir pseudobaz oluştururlar. Yani a_k sabitleri için,

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f(t)^k$$

olacak şekilde $g(t) \in \mathfrak{F}$ vardır.

(2.2) bağıntısında verilen $f(t)$ serisinin türevi aşağıdaki şekilde verilir:

$$f^{'}(t) = \partial_t f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1},$$

(Roman 2005).

Kronecker delta fonksiyonu $\delta_{n,k}$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1, n = k \\ 0, n \neq k. \end{cases}$$

2.1.1. Umbral cebir

$\mathbb{C}$ cismi üzerindeki tek değişkenli polinomlar cebiri $\mathcal{P}$ olsun. $\mathcal{P}$ üzerindeki bütün lineer fonksiyonellerin vektör uzayı da $\mathcal{P}^*$ olsun. $\langle L \mid p(x)\rangle$, L lineer fonksiyonelinin $p(x)$ polinomu üzerindeki etkisi olarak tanımlanır. Burada

$$\langle L + M \mid p(x)\rangle = \langle L \mid p(x)\rangle + \langle M \mid p(x)\rangle$$

ve $c \in \mathbb{C}$ için

$$\langle cL \mid p(x) \rangle = c \langle L \mid p(x) \rangle$$

olur.

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} t^k$$

bir formal kuvvet serisi olsun. yani $f(t) \in \mathfrak{F}$ olsun. $n \geq 0$ için

$$\langle f(t) \mid x^n \rangle = a_n \tag{2.3}$$

şeklinde $\mathcal{P}$ üzerinde bir lineer fonksiyonel tanımlar (Roman 2005). Özel olarak, $f(t) = t^k$ alındığında,

$$\left\langle t^k \mid x^n \right\rangle = n! \delta_{n,k}$$

dir.

Formal kuvvet serilerinin toplama ve çarpma işlemleri altında, formal kuvvet serileri kümesi genellikle bir cebir oluştururlar. Bu şekilde elde edilen cebire *Umbral cebir denir.* Bu cebir yöntemleri ile oluşturulan analize de *Umbral analiz* denir.

Örneğin; $y \in \mathbb{C}$ için e^{yt} fonksiyoneli incelenir:

$$\left\langle e^{yt} \mid x^n \right\rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(yt)^k}{k!} \mid x^n \right\rangle = y^n.$$

Buradan; her $p(x) \in \mathcal{P}$ için

$$\left\langle e^{yt} \mid p(x) \right\rangle = p(y)$$

dir (Roman 2005).

Ayrıca, her $p(x) \in \mathcal{P}$ ve $f(t) \in \mathfrak{F}$ için aşağıdaki sonuçlar verilir:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left\langle f(t) \mid x^k \right\rangle}{k!} t^k, \tag{2.4}$$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left\langle t^k \mid p(x) \right\rangle}{k!} x^k \tag{2.5}$$

(Roman 2005).

Önerme 2.12. *$f(t)$, $g(t) \in \mathfrak{F}$ olsun. Aşağıdaki eşitlik sağlanır:*

$$\langle f(t)\, g(t) \mid x^n \rangle = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\langle f(t) \mid x^k \right\rangle \left\langle g(t) \mid x^{n-k} \right\rangle .$$

İspat. $f(t)$, $g(t) \in \mathfrak{F}$ olsun. (2.4) bağıntısından

$$\begin{aligned} f(t)\, g(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\langle f(t) \mid x^m \rangle}{m!} t^m \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\langle g(t) \mid x^m \rangle}{m!} t^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left\langle f(t) \mid x^k \right\rangle \left\langle g(t) \mid x^{m-k} \right\rangle \frac{t^m}{m!} \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte her iki taraf da x^n 'e uygulanıp (2.3) eşitliği kullanıldığında ispat tamamlanmış olur (Roman 2005). □

Önerme 2.13. *$o(f(t)) > der(p(x))$ ise*

$$\langle f(t) \mid p(x) \rangle = 0$$

olur.

İspat. (2.3)'de $o(f(t)) > n$ iken $\langle f(t) \mid x^n \rangle = 0$ olduğu açıktır (Roman 2005). □

Önerme 2.14. *Her $k \geq 0$ için $o(f_k(t)) = k$ olsun. Her $p(x) \in \mathcal{P}$ için*

$$\left\langle \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(t) \mid p(x) \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \langle f_k(t) \mid p(x) \rangle$$

olur.

İspat. Varsayalım ki $der(p(x)) = d$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(t) \mid p(x) \right\rangle &= \left\langle \sum_{k=0}^{d} a_k f_k(t) + \sum_{k=d+1}^{\infty} a_k f_k(t) \mid p(x) \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=0}^{d} a_k f_k(t) \mid p(x) \right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{d} a_k \langle f_k(t) \mid p(x) \rangle \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \langle f_k(t) \mid p(x) \rangle$$

bulunur (Roman 2005). □

Önerme 2.15. *Her $k \geq 0$ için $o(f_k(t)) = k$ olsun. Eğer bütün k değerleri için*

$$\langle f_k(t) \mid p(x) \rangle = \langle f_k(t) \mid q(x) \rangle$$

oluyorsa, $p(x) = q(x)$ olur.

İspat. $f_k(t)$ formundaki diziler $\mathfrak{F}$ için bir pseudobaz olduğundan, $n \geq 0$ için

$$t^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} f_k(t)$$

olacak şekilde $a_{n,k}$ değerleri vardır. Buradan;

$$\begin{aligned} \langle t^n \mid p(x) \rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} \langle f_k(t) \mid p(x) \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} \langle f_k(t) \mid q(x) \rangle \\ &= \langle t^n \mid q(x) \rangle \end{aligned}$$

olur ve (2.5) eşitliği kullanılarak $p(x) = q(x)$ olduğu görülür (Roman 2005). □

Önerme 2.16. *Her $k \geq 0$ için $der(p_k(x)) = k$ olsun. Eğer bütün k değerleri için*

$$\langle f(t) \mid p_k(x) \rangle = \langle g(t) \mid p_k(x) \rangle$$

oluyorsa, $f(t) = g(t)$ olur.

İspat. Her $n \geq 0$ için öyle $a_{n,k}$ değerleri vardır ki, $x^n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} p_k(x)$ olur. Buradan;

$$\begin{aligned} \langle f(t) \mid x^n \rangle &= \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \langle f(t) \mid p_k(x) \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \langle g(t) \mid p_k(x) \rangle \\ &= \langle g(t) \mid x^n \rangle \end{aligned}$$

elde edilir ve (2.4) kullanılarak $f(t) = g(t)$ olduğu görülür (Roman 2005). $\square$

Açıklama 2.17. *Lineer fonksiyonel t^k'nın bir $p(x)$ polinomuna etkisi polinomun k. türevinin sıfırdaki değerine eşittir. Yani;*

$$\left\langle t^k \mid p(x) \right\rangle = p^{(k)}(0)$$

ve

$$\left\langle t^0 \mid p(x) \right\rangle = p(0)$$

olur.

Açıklama 2.18. *$f(t) \in \mathfrak{F}$ delta serisini lineer fonksiyonel olarak ele aldığımızda, buna delta fonksiyoneli denir. Benzer şekilde, tersinir seri de tersinir fonksiyonel olarak ifade edilir.*

Önerme 2.19. *$f(t)$ serisinin delta fonksiyoneli olması için gerek ve yeter koşul $\langle f(t) \mid 1 \rangle = 0$ ve $\langle f(t) \mid x \rangle \neq 0$ olmasıdır (Roman 2005).*

Önerme 2.20. *$f(t)$ serisinin tersinir fonksiyonel olması için gerek ve yeter koşul $\langle f(t) \mid 1 \rangle \neq 0$ olmasıdır (Roman 2005).*

Teorem 2.21. *$f(t) \in \mathfrak{F}$ olsun. $\forall\, p(x) \in \mathcal{P}$ polinomu için aşağıdaki eşitlik sağlanır:*

$$\langle f(t) \mid xp(x) \rangle = \langle \partial_t f(t) \mid p(x) \rangle .$$

İspat. Özel olarak $p(x) = x^n$ alınır.

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} t^k$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \langle \partial_t f(t) \mid x^n \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k-1)!} t^{k-1} \mid x^n \right\rangle = a_{n+1} \\ &= \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} t^k \mid x^{n+1} \right\rangle = \langle f(t) \mid xx^n \rangle \end{aligned}$$

bulunur (Roman 2005). $\square$

Önerme 2.22. *$p(x) \in \mathcal{P}$ ve $a \in \mathbb{C}$ olsun.Her bir $f(t) \in \mathfrak{F}$ için*

$$\langle f(t) \mid p(ax) \rangle = \langle f(at) \mid p(x) \rangle$$

dir (Roman 2005).

Yukarıdaki önermeleri kapsayan bazı özel örnekler aşağıda verilmiştir:

Örnek. e^{yt} *tersinir fonksiyonelinin* $p(x)$ *polinomuna etkisi*

$$\left\langle e^{yt} \mid p(x)\right\rangle = p(y)$$

dir.

Örnek. $e^{yt}-1$ *delta fonksiyonelinin* $p(x)$ *polinomuna etkisi*

$$\left\langle e^{yt}-1 \mid p(x)\right\rangle = p(y)-p(0) \tag{2.6}$$

dir.

Örnek. te^{yt} *delta fonsiyonelinin* $p(x)=x^n$ *polinomuna etkisi*

$$\left\langle te^{yt} \mid x^n\right\rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} t^{k+1} \mid x^n \right\rangle = ny^{n-1}$$

dir. Lineerlik özelliğinden dolayı,

$$\left\langle te^{yt} \mid p(x)\right\rangle = p'(y)$$

bulunur.

Örnek. $(1-t)^{-1}$ *tersinir fonksiyonelinin* $p(x)=x^n$ *polinomuna etkisi*

$$\left\langle (1-t)^{-1} \mid x^n\right\rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} t^k \mid x^n \right\rangle = n!$$

dir. Ayrıca

$$n! = \int_0^{\infty} u^n e^{-u} du$$

olduğundan,

$$\left\langle (1-t)^{-1} \mid p(x)\right\rangle = \int_0^{\infty} p(u)\, e^{-u} du.$$

elde edilir.

Örnek. $\frac{e^{yt}-1}{t}$ *fonksiyonelinin* $p(x)$ *polinomuna etkisi*

$$\left\langle \frac{e^{yt}-1}{t} \mid p(x) \right\rangle = \int_0^y p(u)\, du \tag{2.7}$$

dir. Bu fonksiyonele integral fonksiyoneli denir.

2.1.2. Lineer operatörler

Bu bölümde, $\mathfrak{F}$' nin elemanları birer lineer operatör olarak ele alınacaktır.

Örneğin; $\mathcal{P}$ üzerinde *k*. türev operatörü t^k ile gösterilir. Yani

$$t^k x^n = \begin{cases} (n)_k \, x^{n-k}, & k \leq n \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Burada

$$(n)_k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$$

dir.

Herhangi bir $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} t^k$ formal kuvvet serisi verilsin. $f(t)$ operatörünün $p(x) = x^n$ polinomuna etkisi

$$f(t)\, x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} \left(t^k x^n\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k x^{n-k}$$

dir. O halde $f(t)$, $\mathcal{P}$ üzerinde bir lineer operatördür.f 'nin lineerliğinden dolayı,

$$f(t)\, p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} \left(t^k p(x)\right) = \sum_{k\geq 0} \frac{a_k}{k!} p^{(k)}(x)$$

elde edilir (Roman 2005).

Açıklama 2.23. *$f(t)$ bir fonksiyonel olsun. $f(t)$ fonksiyonelinin $p(x)$ polinomuna etkisi*

$$\langle f(t) \mid p(x) \rangle$$

notasyonu ile gösterilir.

$f(t)$ bir operatör olsun. $f(t)$ operatörünün $p(x)$ polinomuna etkisi

$$f(t)\,p(x)$$

notasyonu ile gösterilir.

Açıklama 2.24. *Her $f(t)$, $g(t) \in \mathfrak{F}$ için*

$$(f(t)\,g(t))\,p(x) = f(t)\,(g(t)\,p(x))$$

ve

$$f(t)\,g(t)\,p(x) = g(t)\,f(t)\,p(x)$$

dir.

Açıklama 2.25. *t^0 operatörüne birim operatör denir. Ayrıca, bir delta serisi operatör olarak düşünüldüğünde buna delta operatörü, bir tersinir seri operatör olarak düşünüldüğünde buna da tersinir operatör denir.*

Önerme 2.26. *$o(f(t)) > der(p(x))$ ise, $f(t)\,p(x) = 0$ olur (Roman 2005).*

Önerme 2.27. *Her $k \geq 0$ için $o(f_k(t)) = k$ ve her $p(x) \in \mathcal{P}$ için*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(t)\right) p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(f_k(t)\,p(x)\right)$$

olur (Roman 2005).

Önerme 2.28. *Her $k \geq 0$ için $o(f_k(t)) = k$ ve her k için*

$$f_k(t)\,p(x) = f_k(t)\,q(x)$$

ise $p(x) = q(x)$ olur (Roman 2005).

Önerme 2.29. *Her $k \geq 0$ için $der(p_k(x)) = k$ ve her k için*

$$f(t)\,p_k(x) = g(t)\,p_k(x)$$

ise $f(t) = g(t)$ olur (Roman 2005).

Aşağıdaki teoremde, fonksiyonel olan $f(t)$ ile operatör olan $f(t)$ arasındaki ilişki açık bir şekilde verilmiştir.

Teorem 2.30. *$f(t), g(t) \in \mathfrak{F}$ olsun.Her $p(x) \in \mathcal{P}$ için,*

$$\langle f(t)\, g(t) \mid p(x)\rangle = \langle g(t) \mid f(t)\, p(x)\rangle \tag{2.8}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $f(t)$ (2.4) formunda yazılsın ve $p(x) = x^n$ alınsın:

$$\begin{aligned}
\langle g(t) \mid f(t)\, x^n\rangle &= \left\langle g(t) \mid \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \left\langle f(t) \mid x^k\right\rangle x^{n-k} \right\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \left\langle f(t) \mid x^k\right\rangle \left\langle g(t) \mid x^{n-k}\right\rangle \\
&= \langle f(t)\, g(t) \mid x^n\rangle
\end{aligned}$$

dir. Bu sonuç bütün $p(x) \in \mathcal{P}$ polinomları için doğru olduğundan dolayı ispat tamamlanmış olur (Roman 2005). □

Açıklama 2.31.

$$\langle f(t) \mid p(x)\rangle = \left\langle t^0 \mid f(t)\, p(x)\right\rangle$$

dir.

Yukarıda verilen önermeler ve teoremler için bazı özel örnekler aşağıda verilmiştir.

Örnek. *e^{yt} operatörünün $p(x) = x^n$'e etkisi aşağıdaki bağıntı ile verilir:*

$$e^{yt}x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} t^k x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} y^k x^{n-k} = (x+y)^n\,.$$

Yukarıdaki bağıntının genelleştirilmiş hali her $p(x) \in \mathcal{P}$ için

$$e^{yt}p(x) = p(x+y) \tag{2.9}$$

bağıntısı ile verilir.

Örnek. *$e^{yt} - 1$ operatörünün $p(x)$ polinomuna etkisi*

$$\left(e^{yt} - 1\right) p(x) = p(x+y) - p(x)$$

dir. Burada 1 ile birim operatör gösterilir.

Örnek. te^{yt} *operatörünün* $p(x)$ *polinomuna etkisi*

$$te^{yt}p(x) = tp(x+y) = p'(x+y)$$

dir. Burada $p'(x+y) = \frac{d}{dx}p(x+y)$ *dir.*

Örnek. $(1-t)^{-1}$ *operatörünün* $p(x) = x^n$ *polinomuna etkisi*

$$(1-t)^{-1} x^n = \sum_{k=0}^{\infty} (n)_k x^{n-k}$$

dir.

2.1.3. Sheffer dizileri

Bu bölümde Sheffer dizileri tanımlanacak ve bu dizilerin temel özellikleri verilecektir.

Bazı kaynaklarda Sheffer dizileri yerine Sheffer polinomları da denmektedir.

Teorem 2.32. $f(t)$ *bir delta serisi ve* $g(t)$ *bir tersinir seri olsun.* $n, k \geq 0$ *olmak üzere,*

$$\left\langle g(t) f(t)^k \mid S_n(x) \right\rangle = n!\delta_{n,k}$$

ortogonallik koşulunu sağlayan tek bir $S_n(x)$ *polinomu vardır (Roman 2005).*

Teorem 3.31'dan aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Bu şekildeki $S_n(x)$ polinomuna $(g(t), f(t))$ ikilisi için Sheffer dizisidir denir. Bazı kaynaklarda kısaca, $S_n(x)$, $(g(t), f(t))$ için Sheffer'dir denmektedir.

Özel olarak $f(t) = t$ alınırsa, elde edilen diziye $g(t)$ için Appell dizisi, $g(t) = 1$ alınırsa elde edilen diziye $f(t)$ için ilişkili dizi denir.

Sheffer polinomlarının üreteç fonksiyonu aşağıdaki teorem ile verilir:

Teorem 2.33. $y \in \mathbb{C}$ *olsun.* $S_n(x)$ *polinomunun* $(g(t), f(t))$ *için Sheffer polinomu olması için gerek ve yeter koşul*

$$\frac{1}{g\left(\overline{f}(t)\right)} e^{y\overline{f}(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k(y)}{k!} t^k \tag{2.10}$$

olmasıdır. Burada $\overline{f}$, f *'in ters fonksiyonudur (Roman 2005).*

Teorem 2.34. *$S_n(x)$, $(g(t), f(t))$ ikilisi için Sheffer polinomu olsun. Bu durumda,*

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left\langle g\left(\overline{f}(t)\right)^{-1} \overline{f}(t)^k \mid x^n \right\rangle x^k$$

dır (Roman 2005).

İspat. (2.10) eşitliğinin her iki tarafı da ayrı ayrı x^n 'e uygulansın:

$$\left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k(y)}{k!} t^k \mid x^n \right\rangle = S_n(y) \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} \left\langle g\left(\overline{f}(t)\right)^{-1} e^{y\overline{f}(t)} \mid x^n \right\rangle &= \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} y^k g\left(\overline{f}(t)\right)^{-1} \overline{f}(t)^k \mid x^n \right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left\langle g\left(\overline{f}(t)\right)^{-1} \overline{f}(t)^k \mid x^n \right\rangle y^k \end{aligned} \tag{2.12}$$

Bu sonuç, $\forall\, y \in \mathbb{C}$ için geçerlidir. (2.11) ve (2.12) birleştirilerek ispat tamamlanmış olur (Roman 2005). □

Teorem 2.35. *$g(t)$ tersinir seri ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. $S_n(x)$, $(g(t), f(t))$ ikilisi için Sheffer polinomu olması için gerek ve yeter koşul*

$$f(t) S_n(x) = n S_{n-1}(x)$$

olmasıdır (Roman 2005).

Teorem 2.36. *$S_n(x)$, $(g(t), f(t))$ ikilisi için Sheffer polinomu olsun. O halde,*

$$S_{n+1}(x) = \left(x - \frac{g'(t)}{g(t)} \right) \frac{1}{f'(t)} S_n(x) \tag{2.13}$$

olur (Roman 2005).

3. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu kısımda umbral analizin Roman (2005) tarafından verilen bir c_n-genellemesi açıklanacak ve bunun çeşitli özellikleri elde edilecektir. Ayrıca, bu genellemenin bir özel hali olan q-umbral analizle ilgili sonuçlar verilecektir.

3.1. Umbral Analizin Bir Genellemesi

c_n sıfırdan farklı bir dizi olsun.

$$\left\langle t^k \mid x^n \right\rangle = c_n \delta_{n,k}$$

alındığında $\mathfrak{F}$ cebiri ve $\mathcal{P}^*$ vektör uzayı arasındaki izomorfik dönüşüm klasik umbral analizdekine benzerdir. Burada

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

ise

$$\langle f(t) \mid x^n \rangle = c_n a_n$$

olur (Roman 2005).

Umbral analizin bu genellemesi bu tez boyunca c_n-umbral analiz olarak adlandırılacaktır. Bundan sonra

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{c_k} t^k$$

olarak alınacaktır. Burada

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{c_{k+1}} \frac{c_k}{a_k} \right| < 1$$

dir.

$\mathfrak{F}$ üzerindeki σ_t sürekli operatörü şu şekilde tanımlanır:

$$\sigma_t t^n = \left(\frac{c_n}{c_{n-1}} \right) t^{n-1},$$

(Roman 2005). Buradan, aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3.1. *$f(t) \in \mathfrak{F}$ olsun. $\forall\, p(x) \in \mathcal{P}$ polinomu için aşağıdaki eşitlik sağlanır:*

$$\langle f(t) \mid xp(x) \rangle = \langle \sigma_t f(t) \mid p(x) \rangle ,$$

(Roman 2005).

Teorem 3.1 Roman (2005) tarafından ispatsız verilmiştir. bu teoremin ispatı kısaca aşağıdaki gibi verilir:

İspat. [Teorem 3.1'in ispatı] Özel olarak $p(x) = x^n$ alınır.

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{c_k} t^k$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \langle \sigma_t f(t) \mid x^n \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{c_k} \left(\frac{c_k}{c_{k-1}} \right) t^{k-1} \mid x^n \right\rangle = c_{n+1} a_{n+1} \\ &= \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{c_k} t^k \mid x^{n+1} \right\rangle = \langle f(t) \mid xx^n \rangle \end{aligned}$$

bulunur. Lineerlik özelliğinden ispat biter. □

Önerme 3.2. *$\forall f(t) \in \mathfrak{F}$ ve $p(x) \in \mathcal{P}$ olsun. O halde bir a sabiti için*

$$\langle f(t) \mid p(ax) \rangle = \langle f(at) \mid p(x) \rangle$$

olur.

İspat. $f(t) = t^k$ ve $p(x) = x^n$ alalım.

$$\begin{aligned} \left\langle t^k \mid (ax)^n \right\rangle &= a^n \left\langle t^k \mid x^n \right\rangle \\ &= a^n c_n \delta_{n,k} \\ &= a^k c_n \delta_{n,k} \\ &= \left\langle (at)^k \mid x^n \right\rangle . \end{aligned}$$

Lineerlik özelliğinden, ispat biter. □

$\varepsilon(yt)$ üstel fonksiyonu şu şekilde tanımlanır:

$$\varepsilon(yt) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(yt)^k}{c_k}.$$

$\varepsilon(yt)$ fonksiyonelinin x^n'e etkisi şu şekilde verilir

$$\langle \varepsilon(yt) \mid x^n \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(yt)^k}{c_k} \mid x^n \right\rangle = y^n.$$

Buradan; her $p(x) \in \mathcal{P}$ için

$$\langle \varepsilon(yt) \mid p(x) \rangle = p(y)$$

olur (Roman 2005).

Klasik umbral analizdekiyle benzer şekilde aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3.3. *$f(t), g(t) \in \mathfrak{F}$ olsun. Her $p(x) \in \mathcal{P}$ için,*

$$\langle f(t) g(t) \mid p(x) \rangle = \langle g(t) \mid f(t) p(x) \rangle$$

eşitliği sağlanır.

t^k operatörünün etkisi şu şekildedir:

$$t^k x^n = \left(\frac{c_n}{c_{n-k}} \right) t^{n-k}$$

ve genel olarak

$$f(t) x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{c_n}{c_{n-k}} \right) a_k x^{n-k}$$

olur.

$\varepsilon(yt)$ operatörünün etkisi de şu şekildedir:

$$\varepsilon(yt) x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_n}{c_k c_{n-k}} y^{n-k} x^k.$$

Klasik umbral analizdekine benzer şekilde, $n, k \geq 0$ olmak üzere,

$$\left\langle g(t) f(t)^k \mid S_n(x) \right\rangle = c_n \delta_{n,k}$$

ise $S_n(x)$, $(g(t), f(t))$ için bir Sheffer dizisidir. Burada $o(g(t)) = 0$ ve $o(f(t)) = 1$ dir.

Özel olarak $f(t) = t$ alınırsa, $g(t)$ için Appell dizisi elde edilir. $g(t) = 1$ ise $S_n(x)$ ilişkili dizidir denir.

Bu tez çalışması boyunca c_n-umbral analizdeki Sheffer dizileri c_n-Sheffer polinomu ve Appell dizileri de c_n-Appell polinomu olarak adlandırılacaktır.

c_n-Sheffer polinomlarıyla ilgili bazı özellikler klasik umbral analizdekine benzer şekilde aşağıdaki gibi verilmiştir:

Teorem 3.4. *$S_n(x)$, $(g(t), f(t))$ ikilisi için c_n-Sheffer polinomu olsun. Bu durumda her $h(t) \in \mathfrak{F}$ için*

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle h(t) \mid S_k(x) \rangle}{c_k} g(t) f(t)^k$$

dır (Roman 2005).

Teorem 3.5. *$S_n(x)$, $(g(t), f(t))$ ikilisi için c_n-Sheffer polinomu olsun. Bu durumda her $p(x)$ için*

$$p(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{\left\langle g(t) f(t)^k \mid p(x) \right\rangle}{c_k} S_k(x)$$

dir (Roman 2005).

Teorem 3.6. *$y \in \mathbb{C}$ olsun. $S_n(x)$ polinomunun $(g(t), f(t))$ için c_n-Sheffer polinomu olması için gerek ve yeter koşul*

$$\frac{1}{g\left(\overline{f}(t)\right)} \varepsilon\left(y\overline{f}(t)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k(y)}{c_k} t^k$$

olmasıdır (Roman 2005).

Teorem 3.7. *$S_n(x)$ polinomunun $(g(t), f(t))$ için c_n-Sheffer polinomu olması için gerek ve yeter koşul*

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{c_k} \left\langle g\left(\overline{f}(t)\right)^{-1} f(t)^k \mid x^n \right\rangle x^k$$

dır (Roman 2005).

Teorem 3.8. *$S_n(x)$ polinomunun $(g(t), f(t))$ için c_n-Sheffer polinomu olması için gerek* *ve yeter koşul $g(t) S_n(x)$ 'in $f(t)$ ile ilişkili olmasıdır.*

Teorem 3.9. *$S_n(x)$ polinomunun $(g(t), f(t))$ için c_n-Sheffer polinomu olması için gerek ve yeter koşul*

$$f(t) S_n(x) = \frac{c_n}{c_{n-1}} S_{n-1}(x)$$

olmasıdır (Roman 2005).

Teorem 3.10 (Sheffer Özelliği)**.** *$p_n(x)$, $f(t)$ ile ilişkili olsun. $S_n(x)$ polinomunun $(g(t), f(t))$ için c_n-Sheffer polinomu olması için gerek ve yeter koşul*

$$\varepsilon_y(t) S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_n}{c_k c_{n-k}} p_k(y) S_{n-k}(x)$$

olmasıdır (Roman 2005).

3.1.1. c_n-Appell polinomlarını içeren özdeşlikler ve bağıntılar

$S_n(x)$, $(g(t), f(t))$ iklisi için bir c_n-Sheffer polinomu olsun. $f(t) = t$ alınırsa, $S_n(x)$, c_n-Appell polinomu olur.

c_n-Sheffer polinomunun sağladığı özelliklerde $f(t) = t$ alınarak c_n-Appell polinomlarıyla ilgili aşağıdaki özellikler verilir:

Sonuç 3.11. *$S_n(x)$, $g(t)$ için c_n-Appell polinomu olsun. Bu durumda her $h(t) \in F$ için*

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle h(t) \mid S_k(x) \rangle}{c_k} g(t) t^k$$

dır.

Teorem 3.11'da $h(t) = \varepsilon(yt)$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \varepsilon(yt) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle \varepsilon(yt) \mid S_k(x) \rangle}{c_k} g(t) t^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k(y)}{c_k} g(t) t^k \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 3.12. *$S_n(x)$, $g(t)$ için c_n-Appell polinomu olsun. Bu durumda her $p(x)$ için*

$$p(x)=\sum_{k\geq 0}\frac{\left\langle g(t)\,t^k \mid p(x)\right\rangle}{c_k}S_k(x)$$

dir.

Sonuç 3.13. *$y\in\mathbb{C}$ olsun. $S_n(x)$ polinomunun $g(t)$ için c_n-Appell polinomu olması için gerek ve yeter koşul*

$$\frac{1}{g(t)}\varepsilon_y(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{S_k(y)}{c_k}t^k$$

olmasıdır.

Sonuç 3.14. *$S_n(x)$ polinomunun $g(t)$ için c_n-Appell polinomu olması için gerek ve yeter koşul*

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{c_k}\left\langle g(t)^{-1}t^k \mid x^n\right\rangle x^k$$

olmasıdır.

Sonuç 3.15. *$S_n(x)$ polinomunun $g(t)$ için c_n-Appell polinomu olması için gerek ve yeter koşul*

$$S_n(x)=g(t)^{-1}x^n$$

olmasıdır.

Sonuç 3.16. *$S_n(x)$ polinomunun $g(t)$ için c_n-Appell polinomu olması için gerek ve yeter koşul*

$$tS_n(x)=\frac{c_n}{c_{n-1}}S_{n-1}(x)$$

olmasıdır.

Sonuç 3.17 (Appell Özelliği)**.** *$S_n(x)$ polinomunun $g(t)$ için c_n-Appell polinomu olması için gerek ve yeter koşul*

$$\varepsilon_y(t)\,S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{c_n}{c_kc_{n-k}}y^kS_{n-k}(x)\,.$$

olmasıdır.

Teorem 3.18. *$S_n(x)$ polinomunun $g(t)$ için c_n-Appell polinomu ve $\alpha \neq 0$ ve $n \geq 0$ olsun. O halde*

$$S_n(\alpha x) = \alpha^n \frac{g(t)}{g\left(\frac{t}{\alpha}\right)} S_n(x)$$

olur.

İspat. Önerme 3.2'den,

$$\langle f(t) \mid p(x) \rangle = \left\langle f\left(\frac{t}{\alpha}\right) \mid p(\alpha x) \right\rangle$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \left\langle t^k \mid g\left(\frac{t}{\alpha}\right) S_n(\alpha x) \right\rangle &= \left\langle \alpha^k t^k \mid g(t) S_n(x) \right\rangle \\ &= \alpha^k \left\langle g(t) t^k \mid g(t) S_n(x) \right\rangle \\ &= \alpha^k c_n \delta_{n,k} \\ &= \alpha^n c_n \delta_{n,k} \\ &= \left\langle t^k \mid \alpha^n g(t) S_n(x) \right\rangle \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

$$g\left(\frac{t}{\alpha}\right) S_n(\alpha x) = \alpha^n g(t) S_n(x)$$

elde edilir. □

c_n- Bernoulli tipli polinomlar

Bu bölümde mertebesi α olan c_n-Bernoulli tipli polinomlar verilecektir. Yüksek mertebeden c_n-Bernoulli tipli polinomlar $\mathcal{B}_n^{(\alpha)}(c_n; x)$ ile gösterilir ve aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$\left(\frac{t}{\varepsilon(t) - 1}\right)^{\alpha} \varepsilon(yt) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_k^{(\alpha)}(c_n; y)}{c_k} t^k. \tag{3.1}$$

Yüksek mertebeden c_n-Bernoulli tipli polinomu

$$g(t) = \left(\frac{\varepsilon(t) - 1}{t}\right)^{\alpha} \tag{3.2}$$

için bir c_n-Appell polinomudur.

Teorem 3.15 ve (3.2) bağıntısından

$$\mathcal{B}_n^{(\alpha)}(c_n;x)=\left(\frac{t}{\varepsilon(t)-1}\right)^{\alpha}x^n. \tag{3.3}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}\left(\frac{t}{\varepsilon(t)-1}\right)^{\beta}\mathcal{B}_n^{(\alpha)}(c_n;x) &= \left(\frac{t}{\varepsilon(t)-1}\right)^{\beta}\left(\frac{t}{\varepsilon(t)-1}\right)^{\alpha}x^n\\ &= \left(\frac{t}{\varepsilon(t)-1}\right)^{\alpha+\beta}x^n\\ &= \mathcal{B}_n^{(\alpha+\beta)}(c_n;x)\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Ayrıca Teorem 3.16 kullanarak aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$t\mathcal{B}_n^{(\alpha)}(c_n;x)=\frac{c_n}{c_{n-1}}\mathcal{B}_{n-1}^{(\alpha)}(c_n;x). \tag{3.4}$$

Teorem 3.19. *$(\varepsilon(t)-1)$ operatörünün $\mathcal{B}_n^{(\alpha)}(c_n;x)$ polinomuna etkisi*

$$(\varepsilon(t)-1)\mathcal{B}_n^{(\alpha)}(c_n;x)=\frac{c_n}{c_{n-1}}\mathcal{B}_{n-1}^{(\alpha-1)}(c_n;x)$$

dir.

İspat. (3.3) ’den,

$$(\varepsilon(t)-1)\mathcal{B}_n^{(\alpha)}(c_n;x)=(\varepsilon(t)-1)\left(\frac{t}{\varepsilon(t)-1}\right)^{\alpha}x^n$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned}(\varepsilon(t)-1)\mathcal{B}_n^{(\alpha)}(c_n;x) &= (\varepsilon(t)-1)\left(\frac{t}{\varepsilon(t)-1}\right)^{\alpha}x^n\\ &= t\left(\frac{t}{\varepsilon(t)-1}\right)^{\alpha-1}x^n\\ &= t\mathcal{B}_n^{(\alpha-1)}(c_n;x)\\ &= \frac{c_n}{c_{n-1}}\mathcal{B}_{n-1}^{(\alpha-1)}(c_n;x)\end{aligned}$$

elde edilir. □

$(\varepsilon(t)-1)$ operatörünün lineerliğinden, aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.20.

$$\varepsilon(t)\mathcal{B}_n^{(\alpha)}(c_n;x)=\frac{c_n}{c_{n-1}}\mathcal{B}_{n-1}^{(\alpha-1)}(c_n;x)+\mathcal{B}_n^{(\alpha)}(c_n;x).$$

c_n- Euler tipli polinomlar

Bu bölümde mertebesi α olan c_n-Euler tipli polinomlar verilecektir. Yüksek mertebeden c_n-Euler tipli polinomlar $\mathcal{E}_n^{(\alpha)}(c_n;x)$ ile gösterilir ve aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$\left(\frac{2}{\varepsilon(t)+1}\right)^{\alpha}\varepsilon(yt)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathcal{E}_k^{(\alpha)}(c_n;y)}{c_k}t^k. \tag{3.5}$$

Yüksek mertebeden c_n-Euler tipli polinomu

$$g(t)=\left(\frac{\varepsilon(t)+1}{2}\right)^{\alpha} \tag{3.6}$$

için bir c_n-Appell polinomudur.

Teorem 3.15 ve (3.2) bağıntısından

$$\mathcal{E}_n^{(\alpha)}(c_n;x)=\left(\frac{2}{\varepsilon(t)+1}\right)^{\alpha}x^n. \tag{3.7}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{\varepsilon(t)+1}\right)^{\beta}\mathcal{E}_n^{(\alpha)}(c_n;x) &= \left(\frac{2}{\varepsilon(t)+1}\right)^{\beta}\left(\frac{2}{\varepsilon(t)+1}\right)^{\alpha}x^n\\ &= \left(\frac{2}{\varepsilon(t)+1}\right)^{\alpha+\beta}x^n\\ &= \mathcal{E}_n^{(\alpha+\beta)}(c_n;x)\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Ayrıca Teorem 3.16 kullanarak aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$t\mathcal{E}_n^{(\alpha)}(c_n;x)=\frac{c_n}{c_{n-1}}\mathcal{E}_{n-1}^{(\alpha)}(c_n;x). \tag{3.8}$$

Teorem 3.21. *$(\varepsilon(t)+1)$ operatörünün $\mathcal{E}_n^{(\alpha)}(c_n;x)$ polinomuna etkisi*

$$(\varepsilon(t)+1)\,\mathcal{E}_n^{(\alpha)}(c_n;x)=2\mathcal{E}_n^{(\alpha-1)}(c_n;x)$$

dir.

İspat. (3.3) 'den,

$$(\varepsilon(t)+1)\,\mathcal{E}_n^{(\alpha)}(c_n;x)=(\varepsilon(t)+1)\left(\frac{2}{\varepsilon(t)+1}\right)^{\alpha}x^n$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned}(\varepsilon(t)+1)\,\mathcal{E}_n^{(\alpha)}(c_n;x) &= (\varepsilon(t)+1)\left(\frac{2}{\varepsilon(t)+1}\right)^{\alpha}x^n\\ &= 2\left(\frac{2}{\varepsilon(t)+1}\right)^{\alpha-1}x^n\\ &= 2\mathcal{E}_n^{(\alpha-1)}(c_n;x)\\ &= 2\mathcal{E}_n^{(\alpha-1)}(c_n;x)\end{aligned}$$

elde edilir. □

$(\varepsilon(t)+1)$ operatörünün lineerliğinden, aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.22.

$$\varepsilon(t)\,\mathcal{E}_n^{(\alpha)}(c_n;x)=2\mathcal{E}_n^{(\alpha-1)}(c_n;x)-\mathcal{E}_n^{(\alpha)}(c_n;x)\,.$$

3.2. q-Umbral Analiz

Bu bölümde $q\in\mathbb{R}$ ise $0<q<1$, $q\in\mathbb{C}$ ise $|q|<1$ olarak alınacaktır. Ayrıca $q\in\mathbb{Z}_p$ ise $|1-q|_p<1$ olur. Burada $|.|_p$ ultrametriktir. Fakat bu tezde, yalnızca $\mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$ kümeleri üzerinde çalışılacaktır. p-adik q-analiz bu tezin kapsamı dışındadır. Ayrıntılı bilgi için bkz. (Schikhof 1984).

$[x]_q$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$[x]_q=\frac{1-q^x}{1-q}$$

olur. Yukarıdaki tanımda

$$\lim_{q\to1}[x]_q=x$$

elde edilir. (Kac ve Cheung 2002).

c_n-umbral analizde özel olarak

$$c_n = \frac{(1-q)\left(1-q^2\right)\cdots\left(1-q^n\right)}{(1-q)^n}$$

alınırsa q-umbral analiz elde edilir. Burada

$$\frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{1-q^n}{1-q} = [n]_q$$

olur.

t operatörü şu şekilde tanımlanır:

$$tx^n = \frac{1-q^n}{1-q}x^{n-1} = \frac{x^n-(qx)^n}{x-qx}. \tag{3.9}$$

t operatörü k kez uygulanırsa

$$t^k x^n = \frac{\left(1-q^n\right)\left(1-q^{n-1}\right)\cdots\left(1-q^{n-k+1}\right)}{(1-q)^k}x^{n-k} = \frac{c_n}{c_{n-k}}x^{n-k}. \tag{3.10}$$

elde edilir.

Her $p(x) \in \mathcal{P}$ için

$$tp(x) = \frac{p(x)-p(qx)}{x-qx} \tag{3.11}$$

olur.

q-binom şu şekilde tanımlanır:

$$\binom{n}{k}_q = \frac{c_n}{c_k c_{n-k}} = \frac{(1-q)\cdots\left(1-q^n\right)}{(1-q)\cdots\left(1-q^k\right)(1-q)\cdots\left(1-q^{n-k}\right)} = \frac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!}. \tag{3.12}$$

$\varepsilon_q(yt)$ operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\varepsilon_q(yt) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{((1-q)\,yt)^k}{(1-q)\cdots\left(1-q^k\right)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(yt)^k}{[k]_q!} \tag{3.13}$$

(Roman 2005).

Burada $|q|<1$ iken $|yt|<\frac{1}{|1-q|}$ olur. Eğer $|q|>1$ ya da $q=1$ ise $yt\in\mathbb{C}$ olur.

Lemma 3.23. *$\varepsilon_q\left(yt\right)$ fonksiyonelinin x^n 'e etkisi aşağıdaki gibidir:*

$$\left\langle \varepsilon_q\left(yt\right) \mid x^n\right\rangle = y^n. \tag{3.14}$$

İspat.

$$\begin{aligned}
\left\langle \varepsilon_q\left(yt\right) \mid x^n\right\rangle &= \left\langle \sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k t^k}{[k]_q!} \mid x^n\right\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k}{[k]_q!}\left\langle t^k \mid x^n\right\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k}{[k]_q!}[n]_q!\delta_{n,k} \\
&= y^n
\end{aligned}$$

□

Sonuç 3.24. *(3.14)'da özel olarak $y=1$ alınırsa*

$$\left\langle \varepsilon_q\left(t\right) \mid x^n\right\rangle = 1 \tag{3.15}$$

elde edilir.

Lemma 3.25. *$\varepsilon_q\left(yt\right)$ operatörünün x^n 'e etkisi aşağıdaki gibidir:*

$$\varepsilon_q\left(yt\right)x^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_q y^k x^{n-k} \tag{3.16}$$

(Roman 2005).

İspat. (3.13)'den

$$\begin{aligned}
\varepsilon_q\left(yt\right)x^n &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\left(1-q\right)yt\right)^k}{\left(1-q\right)\cdots\left(1-q^k\right)}x^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(1-q\right)^k y^k}{\left(1-q\right)\cdots\left(1-q^k\right)}t^k x^n
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Yukarıdaki eşitlikte (3.10)'yi kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\varepsilon_q(yt)\,x^n &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-q)^k y^k}{(1-q)\cdots(1-q^k)} \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots\left(1-q^{n-k+1}\right)}{(1-q)^k} x^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q y^k x^{n-k}
\end{aligned}$$

elde edilir. □

3.2.1. q-türev

q-türev operatörü $D_{t,q} : t^n \longrightarrow [n]_q\, t^{n-1}$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$D_{t,q} f(t) = \frac{f(t) - f(qt)}{t - qt}. \tag{3.17}$$

Burada $q \neq 1$ dir ve bu türev q-Jackson türevi olarak da bilinir.

Eğer $f'(t)$ varsa,

$$\lim_{q \to 1} D_{t,q} f(t) = f'(t)$$

olur.

Açıklama 3.26. *(3.17) ifadesinde $f(t)$, t 'nin bir polinomu olarak seçilirse (3.9) formülüne denk olur.*

Örnek. *(3.17) denkleminde $f(t) = t^5$ alınırsa,*

$$D_{t,q}\left(t^5\right) = \frac{t^5 - q^5 t^5}{t - qt} = \frac{1 - q^5}{1 - q} t^4 = [5]_q\, t^4.$$

Örnek. *(3.17) denkleminde $f(t) = \varepsilon_q(t)$ seçilirse,*

$$\begin{aligned}
D_{t,q}(\varepsilon_q(t)) &= \frac{\varepsilon_q(t) - \varepsilon_q(qt)}{t - qt} \\
&= \frac{1}{t - qt} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k - q^k t^k}{[k]_q!} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}\left(1 - q^k\right)}{[k]_q!\,(1-q)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{[k-1]_q!}
\end{aligned}$$

$$= \varepsilon_q(t)$$

olur. Buradan,

$$D_{t,q}(\varepsilon_q(yt)) = y\varepsilon_q(yt) \tag{3.18}$$

olduğu kolayca görülür (Roman 2005).

Örnek. *(3.17) denkleminde $f(t) = \varepsilon_q(t^2)$ alınığında,*

$$\begin{aligned} D_{t,q}\left(\varepsilon_q\left(t^2\right)\right) &= \frac{\varepsilon_q(q^2t^2) - \varepsilon_q(t^2)}{qt - t} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k-1}\left(q^{2k}-1\right)}{[k]_q!\,(q-1)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k-1}\left(q^{k}+1\right)}{[k-1]_q!} \\ &= qt\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(qt^2)^k}{[k]_q!} + t\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{[k]_q!} \\ &= qt\varepsilon_q\left(qt^2\right) + t\varepsilon_q\left(t^2\right) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Sonuç 3.27. $n \in \mathbb{Z}^+$ *için*

$$D_{t,q}(\varepsilon_q(t^n)) = q^{n-1}t^{n-1}\varepsilon_q\left(q^{n-1}t^n\right) + q^{n-2}t^{n-1}\varepsilon_q\left(q^{n-2}t^n\right) + \cdots + t^{n-1}\varepsilon_q(t^n)$$

sağlanır.

Teorem 3.28. $D_{t,q}$ *q-türev operatörü, Leibniz formülünü sağlar:*

$$D_{t,q}^n(f(t)\,g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q q^{-k(n-k)} D_{t,q}^k f(t)\, D_{t,q}^{n-k} g\left(q^k t\right) \tag{3.19}$$

(Roman 2005).

Lemma 3.29.

$$D_{t,q}(\varepsilon_q(yt)\,\varepsilon_q(zt)) = (z + y - (1-q)\,yzt)\,\varepsilon_q(yt)\,\varepsilon_q(zt)$$

(Roman 2005).

Teorem 3.30. *Bölümün türevi aşağıdaki gibi verilir:*

$$D_{t,q}\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)=\frac{g(t)\,D_{t,q}f(t)-f(t)\,D_{t,q}g(t)}{g(t)\,g(qt)} \tag{3.20}$$

veya

$$D_{t,q}\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)=\frac{g(qt)\,D_{t,q}f(t)-f(qt)\,D_{t,q}g(t)}{g(t)\,g(qt)} \tag{3.21}$$

(Kac ve Cheung 2002).

3.2.2. q-Sheffer polinomları

Teorem 3.31. *$f(t)$ bir delta serisi ve $g(t)$ bir tersinir seri olsun. $n,k\geq 0$ olmak üzere,*

$$\left\langle g(t)\,f(t)^{k}\mid S_{n}(x)\right\rangle = c_{n}\delta_{n,k}$$

ortogonallik koşulunu sağlayan tek bir $S_n(x)$ polinomu vardır (Roman 2005).

Teorem 3.31'dan aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Bu şekildeki $S_n(x)$ polinomuna $(g(t),f(t))$ ikilisi için q-Sheffer dizisidir denir. Bazı kaynaklarda kısaca, $S_n(x)$, $(g(t),f(t))$ için Sheffer'dir denmektedir.

Özel olarak $f(t)=t$ alınırsa, $g(t)$ için q-Appell dizisi elde edilir.

Bu tez çalışması boyunca q-umbral analizdeki Sheffer dizileri q-Sheffer polinomu ve Appell dizileri de q-Appell polinomu olarak adlandırılacaktır.

3.2.3. q-Appell polinomları

q-Appell polinomları aşağıdaki özellikleri sağlar:

Teorem 3.32. *$S_n(x)$ $g(t)$ için q-Appell polinomu olsun. O halde her $h(t)\in\mathcal{F}$için,*

$$h(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\langle h(t)\mid S_k(x)\rangle}{[k]_q!}g(t)\,t^{k}. \tag{3.22}$$

Sonuç 3.33. *(3.22)'de $h(t)=\varepsilon_q(yt)$ alınırsa*

$$\begin{aligned}\varepsilon_q(yt) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\langle \varepsilon_q(yt)\mid S_k(x)\rangle}{[k]_q!}g(t)\,t^{k}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{S_k(y)}{[k]_q!}g(t)\,t^{k},\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.34. *$S_n(x)$ $g(t)$ için q-Appell polinomu olsun. O halde her $p(x) \in \mathbf{P}$ için,*

$$p(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{\left\langle g(t)\, t^k \mid p(x) \right\rangle}{[k]_q!} S_k(x)$$

olur.

Teorem 3.35. *$y \in \mathbb{C}$. $S_n(x)$ polinomunun $g(t)$ için q-Appell olması için gerek ve yeter koşul*

$$\frac{1}{g(t)} \varepsilon_q(yt) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k(y)}{[k]_q!} t^k. \tag{3.23}$$

Teorem 3.36. *$S_n(x)$ polinomunun $g(t)$ için q-Appell olması için gerek ve yeter koşul*

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{[k]_q!} \left\langle g(t)^{-1} t^k \mid x^n \right\rangle x^k.$$

Teorem 3.37. *$S_n(x)$ polinomunun $g(t)$ için q-Appell olması için gerek ve yeter koşul*

$$S_n(x) = g(t)^{-1} x^n. \tag{3.24}$$

Teorem 3.38. *$S_n(x)$ polinomunun $g(t)$ için q-Appell olması için gerek ve yeter koşul*

$$tS_n(x) = [n]_q S_{n-1}(x). \tag{3.25}$$

Teorem 3.39. *$S_n(x)$ polinomunun $g(t)$ için q-Appell olması için gerek ve yeter koşul*

$$\frac{1}{t} S_n(x) = \frac{1}{[n+1]_q} S_{n+1}(x). \tag{3.26}$$

Teorem 3.40. *$S_n(x)$ polinomunun $g(t)$ için q-Appell olması için gerek ve yeter koşul*

$$\varepsilon_q(yt) S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q y^k S_{n-k}(x). \tag{3.27}$$

q-Appell polinomları için rekürans formülü

θ operatörü

$$\theta : x^n \longrightarrow \frac{(n+1)}{[n+1]_q} x^{n+1}$$

olarak tanımlansın.

Burada

$$\theta t x^n = [n]_q \theta x^{n-1} = n x^n$$

olur. O halde

$$\theta t = xD$$

olur (Roman 2005). Burada D, adi türev operatörüdür. Eğer θ operatörü ile $D_{x,q}$ operatörü arasındaki ilişki incelenirse

$$\theta t = \frac{n}{[n]_q} x D_{x,q} \tag{3.28}$$

eşitliği elde edilir.

Lemma 3.41. *$S_n(x)$ bir q-Appell polinomu olsun. O halde*

$$\theta S_n(x) = \frac{n}{[n]_q} x S_n(x) \tag{3.29}$$

olur.

İspat. (3.25) ve (3.28) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\theta S_n(x) &= \theta \frac{1}{[n+1]_q} t S_{n+1}(x) \\
&= \frac{1}{[n+1]_q} \frac{n}{[n]_q} x D_{x,q} S_{n+1}(x) \\
&= \frac{1}{[n+1]_q} \frac{n}{[n]_q} x [n+1]_q S_n(x) \\
&= \frac{n}{[n]_q} x S_n(x)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. □

c_n-Sheffer polinomları için rekürans formülü Roman (2005) tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir:

Teorem 3.42. *$S_n(x)$ polinomu $(g(t), f(t))$ için c_n-Sheffer polinomu olsun. O halde*

$$(n+1) S_{n+1}(x) = \frac{c_{n+1}}{c_n} \left(\theta - \frac{g'(t)}{g(t)} \right) \frac{1}{f'(t)} S_n(x) \tag{3.30}$$

olur (Roman 2005).

(3.30) eşitliğinde $\frac{c_{n+1}}{c_n} = [n+1]_q$ ve $f(t) = t$ alınarak q-Appell polinomları için rekürans formülü elde edilir:

Teorem 3.43. *$S_n(x)$, $g(t)$ için q-Appell polinomu olsun. O halde*

$$(n+1)\, S_{n+1}(x) = [n+1]_q \left(\theta - \frac{g'(t)}{g(t)}\right) S_n(x) \tag{3.31}$$

olur.

q-Bernoulli polinomları

$\alpha, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $B_{k,q}^{(\alpha)}(x)$ ile gösterilen k. dereceden, α. mertebeden q-Bernoulli polinomları aşağıdaki üreteç fonksiyonuyla tanımlanır:

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_{k,q}^{(\alpha)}(x) \frac{t^k}{[k]_q!} = \left(\frac{t}{\varepsilon_q(t) - 1}\right)^{\alpha} \varepsilon_q(xt)$$

(Ernst 2012). q-Bernoulli polinomları

$$g(t) = \left(\frac{\varepsilon_q(t) - 1}{t}\right)^{\alpha} \tag{3.32}$$

için Appell polinomudur (Kim ve Kim 2014).

(3.24) ve (3.32) kullanılarak aşağıdaki lemma elde edilir:

Lemma 3.44.

$$B_{n,q}^{(\alpha)}(x) = \left(\frac{t}{\varepsilon_q(t) - 1}\right)^{\alpha} x^n \tag{3.33}$$

(Kim ve Kim 2014).

(3.25) kullanılarak, t operatörünün $B_{n,q}^{(\alpha)}(x)$ polinomuna etkisi aşağıdaki teoremle görülür:

Teorem 3.45.

$$tB_{n,q}^{(\alpha)}(x) = [n]_q\, B_{n-1,q}^{(\alpha)}(x) \tag{3.34}$$

(Kim ve Kim 2014).

(3.26) kullanılarak aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3.46.

$$\frac{1}{t}B_{n,q}^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{[n+1]_q}B_{n+1,q}^{(\alpha)}(x). \tag{3.35}$$

$(\varepsilon_q(t)-1)$ operatörünün $B_{n,q}^{(\alpha)}(x)$ polinomuna etkisi aşağıdaki teoremle verilir. Burada 1 ile birim operatör gösterilir.

Teorem 3.47.

$$(\varepsilon_q(t)-1)B_{n,q}^{(\alpha)}(x)=[n]_q B_{n-1,q}^{(\alpha-1)}(x). \tag{3.36}$$

İspat. Sırasıyla (3.33) ve (3.34) kullanılırsa

$$\begin{aligned}(\varepsilon_q(t)-1)B_{n,q}^{(\alpha)}(x) &= (\varepsilon_q(t)-1)\left(\frac{t}{\varepsilon_q(t)-1}\right)^{\alpha}x^n,\\ &= tB_{n,q}^{(a-1)}(x),\\ &= [n]_q B_{n-1,q}^{(a-1)}(x),\end{aligned}$$

olur. □

Sonuç 3.48. *Lineerlik özelliğinden*

$$\varepsilon_q(t)B_{n,q}^{(a)}(x)=[n]_q B_{n-1,q}^{(a-1)}(x)+B_{n,q}^{(a)}(x), \tag{3.37}$$

olduğu görülür.

$\frac{\varepsilon_q(t)}{\varepsilon_q(t)-1}$ operatörünün $B_{n,q}^{(\alpha)}(x)$ polinomuna etkisi aşağıdaki teoremle verilir:

Teorem 3.49.

$$\frac{\varepsilon_q(t)}{\varepsilon_q(t)-1}B_{n,q}^{(a)}(x)=B_{n,q}^{(a)}(x)+\frac{1}{[n+1]_q}B_{n+1,q}^{(a+1)}(x). \tag{3.38}$$

İspat. (3.33) ve (3.35) yardımıyla

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon_q(t)}{\varepsilon_q(t)-1}B_{n,q}^{(\alpha)}(x) &= \varepsilon_q(t)\frac{1}{t}\left(\frac{t}{\varepsilon_q(t)-1}\right)^{\alpha+1}x^n,\\ &= \varepsilon_q(t)\frac{1}{[n+1]_q}B_{n+1,q}^{(a+1)}(x),\end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada (3.37) kullanılarak ispat tamamlanır. □

q-Bernoulli polinomları için rekürans formülü aşağıdaki teorem ile verilir:

Teorem 3.50.

$$(q(n+1)+1)\,B_{n+1,q}(x)=[n+1]_q\left(\frac{qnx}{[n]_q}-1\right)B_{n,q}(x)-B^{(2)}_{n+1,q}(x)\,.$$

İspat. Öncelikle (3.20) yardımıyla

$$g(t)=\frac{\varepsilon_q(t)-1}{t}$$

için $g'(t)=D_{t,q}g(t)$ hesaplanır:

$$D_{t,q}g(t)=\frac{t\varepsilon_q(t)-(\varepsilon_q(t)-1)}{tqt}.$$

Buradan,

$$\begin{aligned}
\frac{g'(t)}{g(t)} &= \frac{t\varepsilon_q(t)-(\varepsilon_q(t)-1)}{tqt}\frac{t}{\varepsilon_q(t)-1}\\
&= \frac{t\varepsilon_q(t)}{qt(\varepsilon_q(t)-1)}-\frac{(\varepsilon_q(t)-1)}{qt(\varepsilon_q(t)-1)}\\
&= \frac{1}{q}\left(\frac{\varepsilon_q(t)}{(\varepsilon_q(t)-1)}-\frac{1}{t}\right)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Elde edilen sonuç (3.31) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
(n+1)\,B_{n+1,q}(x) &= [n+1]_q\left(\theta-\frac{1}{q}\left(\frac{\varepsilon_q(t)}{(\varepsilon_q(t)-1)}-\frac{1}{t}\right)\right)B_{n,q}(x)\\
&= [n+1]_q\left(\theta B_{n,q}(x)-\frac{1}{q}\frac{\varepsilon_q(t)}{(\varepsilon_q(t)-1)}B_{n,q}(x)-\frac{1}{q}\frac{1}{t}B_{n,q}(x)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada (3.29), (3.38) ve (3.35) kullanılarak

$$\begin{aligned}
&(n+1)\,B_{n+1,q}(x)\\
=\;& [n+1]_q\left(\frac{n}{[n]_q}xB_{n,q}(x)-\frac{1}{q}\left(B_{n,q}(x)+\frac{1}{[n+1]_q}B^{(2)}_{n+1,q}(x)\right)-\frac{1}{q\,[n+1]_q}B_{n+1,q}(x)\right)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada gerekli düzenlemeler yapılarak ispat tamamlanır. □

q-Euler polinomları

$\alpha, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $E_{k,q}^{(\alpha)}(x)$ ile gösterilen k. dereceden, α. mertebeden q-Euler polinomları aşağıdaki üreteç fonksiyonuyla tanımlanır:

$$\sum_{k=0}^{\infty} E_{k,q}^{(\alpha)}(x) \frac{t^k}{[k]_q!} = \left(\frac{2}{\varepsilon_q(t)+1} \right)^{\alpha} \varepsilon_q(xt)$$

(Ernst 2012). q-Euler polinomları

$$g(t) = \left(\frac{\varepsilon_q(t)+1}{2} \right)^{\alpha} \tag{3.39}$$

için Appell polinomudur (Kim ve Kim 2014).

(3.24) ve (3.39) kullanılarak aşağıdaki lemma elde edilir:

Lemma 3.51.

$$E_{n,q}^{(\alpha)}(x) = \left(\frac{2}{\varepsilon_q(t)+1} \right)^{\alpha} x^n \tag{3.40}$$

(Kim ve Kim 2014).

(3.25) kullanılarak, t operatörünün $E_{n,q}^{(\alpha)}(x)$ polinomuna etkisi aşağıdaki teoremle görülür:

Teorem 3.52.

$$tE_{n,q}^{(\alpha)}(x) = [n]_q E_{n-1,q}^{(\alpha)}(x) \tag{3.41}$$

(Kim ve Kim 2014).

(3.26) kullanılarak aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3.53.

$$\frac{1}{t} E_{n,q}^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{[n+1]_q} E_{n+1,q}^{(\alpha)}(x) . \tag{3.42}$$

$(\varepsilon_q(t)+1)$ operatörünün $E_{n,q}^{(\alpha)}(x)$ polinomuna etkisi aşağıdaki teoremle verilir:

Teorem 3.54.

$$\left(\varepsilon_q(t)+1\right) B_{n,q}^{(\alpha)}(x) = 2B_{n,q}^{(\alpha-1)}(x). \tag{3.43}$$

İspat. (3.33) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\left(\varepsilon_q(t)+1\right) E_{n,q}^{(\alpha)}(x) &= \left(\varepsilon_q(t)+1\right)\left(\frac{2}{\varepsilon_q(t)+1}\right)^{\alpha} x^n, \\
&= 2E_{n,q}^{(a-1)}(x),
\end{aligned}$$

olur. □

Sonuç 3.55. *Lineerlik özelliğinden*

$$\varepsilon_q(t) E_{n,q}^{(a)}(x) = 2E_{n,q}^{(a-1)}(x) - E_{n,q}^{(a)}(x), \tag{3.44}$$

olduğu görülür.

$\frac{\varepsilon_q(t)}{\varepsilon_q(t)+1}$ operatörünün $E_{n,q}^{(\alpha)}(x)$ polinomuna etkisi aşağıdaki teoremle verilir:

Teorem 3.56.

$$\frac{\varepsilon_q(t)}{\varepsilon_q(t)+1} E_{n,q}^{(a)}(x) = E_{n,q}^{(a)}(x) + \frac{1}{2} E_{n,q}^{(a+1)}(x). \tag{3.45}$$

İspat. (3.40) yardımıyla

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon_q(t)}{\varepsilon_q(t)+1} E_{n,q}^{(a)}(x) &= \varepsilon_q(t)\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\varepsilon_q(t)+1}\right)^{\alpha+1} x^n, \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_q(t) E_{n,q}^{(a+1)}(x),
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada (3.44) kullanılarak ispat tamamlanır. □

q-Euler polinomları için rekürans formülü aşağıdaki teorem ile verilir:

Teorem 3.57.

$$\frac{(n+1)}{[n+1]_q} E_{n+1,q}(x) = \left(\frac{nx}{[n]_q} - 1\right) E_{n,q}(x) - \frac{1}{2} E_{n,q}^{(2)}(x).$$

İspat.

$$g(t) = \frac{\varepsilon_q(t) + 1}{2}$$

için

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{\varepsilon_q(t)}{\varepsilon_q(t) + 1}$$

olur. O halde (3.31) kullanılarak

$$\begin{aligned}(n+1) E_{n+1,q}(x) &= [n+1]_q \left(\theta - \frac{\varepsilon_q(t)}{\varepsilon_q(t)+1}\right) E_{n,q}(x) \\ &= [n+1]_q \left(\theta E_{n,q}(x) - \frac{\varepsilon_q(t)}{\varepsilon_q(t)+1} E_{n,q}(x)\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada (3.29) ve (3.45) kullanılırsa

$$\begin{aligned}&(n+1) E_{n+1,q}(x) \\ = \; &[n+1]_q \left(\frac{n}{[n]_q} x E_{n,q}(x) - \left(E_{n,q}(x) + \frac{1}{2} E_{n,q}^{(2)}(x)\right)\right)\end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada gerekli düzenlemeler yapılarak ispat tamamlanır. □

q-Hermite polinomları

$v, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $H_{k,q}^{(v)}(x)$ ile gösterilen k. dereceden, v. mertebeden q-Hermite polinomları aşağıdaki üreteç fonksiyonuyla tanımlanır:

$$\sum_{k=0}^{\infty} H_{k,q}^{(v)}(x) \frac{t^k}{[k]_q!} = \varepsilon_q^{-1}\left(\frac{vt^2}{2}\right) \varepsilon_q(xt).$$

q-Hermite polinomları

$$g(t) = \varepsilon_q\left(\frac{vt^2}{2}\right) \tag{3.46}$$

için Appell polinomudur.

(3.24) ve (3.46) kullanılarak aşağıdaki lemma elde edilir:

Lemma 3.58.

$$H_{n,q}^{(v)}(x) = \varepsilon_q^{-1}\left(\frac{vt^2}{2}\right)x^n. \tag{3.47}$$

(3.25) kullanılarak, t operatörünün $H_{n,q}^{(v)}(x)$ polinomuna etkisi aşağıdaki teoremle görülür:

Teorem 3.59.

$$tH_{n,q}^{(v)}(x) = [n]_q H_{n-1,q}^{(v)}(x).$$

Aşağıdaki teorem $\varepsilon_q(yt)$ ve $\varepsilon_q\left(\frac{vt^2}{2}\right)$ lineer operatörlerinin $H_{n,q}^{(v)}(x)$ polinomuna olan etkisini verir:

Teorem 3.60.

$$\varepsilon_q(yt)\, H_{n,q}^{(v)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}_q y^k H_{n-k,q}^{(v)}(x), \tag{3.48}$$

$$\varepsilon_q\left(\frac{vt^2}{2}\right)H_{n,q}^{(v)}(x) = x^n. \tag{3.49}$$

İspat. (3.27) kullanılarak teoremin ilk kısmı ispatlanır. (3.49)'yi ispatlamak için ise (3.24) kullanılır:

$$\begin{aligned}\varepsilon_q\left(\frac{vt^2}{2}\right)H_{n,q}^{(v)}(x) &= \varepsilon_q\left(\frac{vt^2}{2}\right)\varepsilon_q^{-1}\left(\frac{vt^2}{2}\right)x^n\\ &= x^n.\end{aligned}$$

□

q-Hermite tabanlı Bernoulli polinomları

Milne-Thomson polinomları, 1933 yılında Milne-Thomson tarafından verilmiş bir polinom ailesidir. Bu polinomlar Dere ve Şimşek (2012) tarafından modifiye edilmiş ve hem Hermite polinomlarıyla hem de bazı diğer özel polinomlarla olan ilişkileri ortaya konulmuştur. Bu bölümde, Milne-Thomson polinomlarının bir çeşidi olan Hermite tabanlı Bernoulli polinomları için bir genelleştirme elde edilecektir. $B_{H,k,q}^{(a)}(x,v)$ ile gösterilen k. dereceden, α. mertebeden q-Hermite tabanlı Bernoulli polinomları aşağıdaki üreteç fonksiyonuyla tanımlanır:

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_{H,k,q}^{(a)}(x,v)\frac{t^k}{[k]_q!}=\left(\frac{t}{\varepsilon_q(t)-1}\right)^{\alpha}\varepsilon_q^{-1}\left(\frac{vt^2}{2}\right)\varepsilon_q(xt).$$

q-Hermite tabanlı Bernoulli polinomları

$$g(t)=\left(\frac{\varepsilon_q(t)-1}{t}\right)^{\alpha}\varepsilon_q\left(\frac{vt^2}{2}\right) \tag{3.50}$$

için Appell polinomudur.

(3.24) ve (3.50) kullanılarak aşağıdaki lemma elde edilir:

Lemma 3.61.

$$B_{H,n,q}^{(a)}(x,v)=\left(\frac{t}{\varepsilon_q(t)-1}\right)^{\alpha}\varepsilon_q^{-1}\left(\frac{vt^2}{2}\right)x^n. \tag{3.51}$$

Buradan,

$$\begin{aligned}\left(\frac{t}{\varepsilon_q(t)-1}\right)^{\beta}B_{H,n,q}^{(a)}(x,v) &= \left(\frac{t}{\varepsilon_q(t)-1}\right)^{\beta}\left(\frac{t}{\varepsilon_q(t)-1}\right)^{\alpha}\varepsilon_q^{-1}\left(\frac{vt^2}{2}\right)x^n,\\ &= \left(\frac{t}{\varepsilon_q(t)-1}\right)^{\alpha+\beta}\varepsilon_q^{-1}\left(\frac{vt^2}{2}\right)x^n,\\ &= B_{H,n,q}^{(\alpha+\beta)}(x,v),\end{aligned}$$

olduğu söylenebilir.

(3.25) kullanılarak, aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3.62.

$$tB_{H,n,q}^{(a)}(x,v)=[n]_q\,B_{H,n-1,q}^{(a)}(x,v). \tag{3.52}$$

$(\varepsilon_q(t)-1)$ operatörünün $B_{H,n,q}^{(a)}(x,v)$ polinomuna etkisi aşağıdaki teoremle verilir:

Teorem 3.63.

$$(\varepsilon_q(t)-1)\,B_{H,n,q}^{(a)}(x,v)=[n]_q\,B_{H,n-1,q}^{(a-1)}(x,v)$$

İspat. Sırasıyla (3.51) ve (3.52) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left(\varepsilon_q(t)-1\right)B_{H,n,q}^{(a)}(x,v) &= \left(\varepsilon_q(t)-1\right)\left(\frac{t}{\varepsilon_q(t)-1}\right)^{\alpha}\varepsilon_q^{-1}\left(\frac{vt^2}{2}\right)x^n,\\ &= tB_{H,n,q}^{(a-1)}(x,v),\\ &= [n]_q B_{H,n-1,q}^{(a-1)}(x,v),\end{aligned}$$

olur. □

Sonuç 3.64. *Lineerlik özelliğinden aşağıdaki sonuç elde edilir:*

$$\varepsilon_q(t)B_{H,n,q}^{(a)}(x,v)=[n]_q B_{H,n-1,q}^{(a-1)}(x,v)+B_{H,n,q}^{(a)}(x,v)$$

$H_{n,q}^{(v)}(x)$ ve $B_{H,n,q}^{(a)}(x,v)$ polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki teoremle verilir:

Teorem 3.65.

$$\left(\frac{t}{\varepsilon_q(t)-1}\right)^{\alpha}H_{n,q}^{(v)}(x)=B_{H,n,q}^{(a)}(x,v).$$

İspat. (3.47)'den

$$\left(\frac{t}{\varepsilon_q(t)-1}\right)^{\alpha}H_{n,q}^{(v)}(x)=\left(\frac{t}{\varepsilon_q(t)-1}\right)^{\alpha}\varepsilon_q^{-1}\left(\frac{vt^2}{2}\right)x^n,$$

olduğunu biliyoruz. Burada (3.51) kullanılırsa ispat tamamlanır. □

$\varepsilon_q\left(\frac{vt^2}{2}\right)$ lineer operatörünün etkisi, $B_{H,n,q}^{(a)}(x,v)$ ve $B_{n,q}^{(a)}(x)$ arasındaki ilişkiyi verir:

Teorem 3.66.

$$\varepsilon_q\left(\frac{vt^2}{2}\right)B_{H,n,q}^{(a)}(x,v)=B_{n,q}^{(a)}(x).$$

İspat. (3.51) kullanılarak,

$$\varepsilon_q\left(\frac{vt^2}{2}\right)B_{H,n,q}^{(a)}(x,v)=\varepsilon_q\left(\frac{vt^2}{2}\right)\left(\frac{t}{\varepsilon_q(t)-1}\right)^{\alpha}\varepsilon_q^{-1}\left(\frac{vt^2}{2}\right)x^n,$$

eşitliği elde edilir. Bazı işlemler yapılırsa

$$\varepsilon_q\left(\frac{vt^2}{2}\right)B_{H,n,q}^{(a)}(x,v)=\left(\frac{t}{\varepsilon_q(t)-1}\right)^{\alpha}x^n,$$

olur. Burada (3.33) kullanılırsa ispat biter. □

Sonuç 3.67. *Teorem 3.65 ve Teorem 3.66 yardımıyla q-Hermite tabanlı Bernoulli polinomlarının özellikleri incelenerek q-Bernoulli polinomları ve q-Hermite polinomlarıyla ilgili özellikler kolayca elde edilebilecektir.*

q-Hermite tabanlı Euler polinomları

Bu bölümde, Milne-Thomson polinomlarının bir türü olan Hermite tabanlı Euler polinomları için bir genelleştirme elde edilecektir. $E_{H,k,q}^{(a)}(x,v)$ ile gösterilen k. dereceden, α. mertebeden q-Hermite tabanlı Euler polinomları aşağıdaki üreteç fonksiyonuyla tanımlanır:

$$\sum_{k=0}^{\infty}E_{H,k,q}^{(a)}(x,v)\frac{t^k}{[k]_q!}=\left(\frac{2}{\varepsilon_q(t)+1}\right)^{\alpha}\varepsilon_q^{-1}\left(\frac{vt^2}{2}\right)\varepsilon_q(xt).$$

q-Hermite tabanlı Euler polinomları

$$g(t)=\left(\frac{\varepsilon_q(t)+1}{2}\right)^{\alpha}\varepsilon_q\left(\frac{vt^2}{2}\right) \tag{3.53}$$

için Appell polinomudur.

(3.24) ve (3.53) kullanılarak aşağıdaki lemma elde edilir:

Lemma 3.68.

$$E_{H,n,q}^{(a)}(x,v)=\left(\frac{2}{\varepsilon_q(t)+1}\right)^{\alpha}\varepsilon_q^{-1}\left(\frac{vt^2}{2}\right)x^n. \tag{3.54}$$

Buradan,

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{\varepsilon_q(t)+1}\right)^{\beta}E_{H,n,q}^{(a)}(x,v) &= \left(\frac{2}{\varepsilon_q(t)+1}\right)^{\beta}\left(\frac{2}{\varepsilon_q(t)+1}\right)^{\alpha}\varepsilon_q^{-1}\left(\frac{vt^2}{2}\right)x^n,\\ &= \left(\frac{2}{\varepsilon_q(t)+1}\right)^{\alpha+\beta}\varepsilon_q^{-1}\left(\frac{vt^2}{2}\right)x^n,\\ &= E_{H,n,q}^{(\alpha+\beta)}(x,v),\end{aligned}$$

olduğu söylenebilir.

(3.25) kullanılarak, aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3.69.

$$tE_{H,n,q}^{(a)}(x,v)=[n]_q\,E_{H,n-1,q}^{(a)}(x,v)\,. \tag{3.55}$$

$(\varepsilon_q(t)+1)$ operatörünün $E_{H,n,q}^{(a)}(x,v)$ polinomuna etkisi aşağıdaki teoremle verilir:

Teorem 3.70.

$$(\varepsilon_q(t)+1)\,E_{H,n,q}^{(a)}(x,v)=2E_{H,n,q}^{(a-1)}(x,v)$$

İspat. (3.54) kullanılarak

$$\begin{aligned}(\varepsilon_q(t)+1)\,E_{H,n,q}^{(a)}(x,v) &= (\varepsilon_q(t)+1)\left(\frac{2}{\varepsilon_q(t)+1}\right)^{\alpha}\varepsilon_q^{-1}\left(\frac{vt^2}{2}\right)x^n,\\ &= 2B_{H,n,q}^{(a-1)}(x,v)\,,\end{aligned}$$

bulunur. □

Sonuç 3.71. *Lineerlik özelliğinden aşağıdaki sonuç elde edilir:*

$$\varepsilon_q(t)\,E_{H,n,q}^{(a)}(x,v)=2E_{H,n,q}^{(a-1)}(x,v)-E_{H,n,q}^{(a)}(x,v)\,.$$

$H_{n,q}^{(v)}(x)$ ve $E_{H,n,q}^{(a)}(x,v)$ polinomları arasındaki ilişki şu şekildedir:

Teorem 3.72.

$$\left(\frac{2}{\varepsilon_q(t)+1}\right)^{\alpha}H_{n,q}^{(v)}(x)=E_{H,n,q}^{(a)}(x,v)\,.$$

İspat. (3.47)'den

$$\left(\frac{2}{\varepsilon_q(t)+1}\right)^{\alpha}H_{n,q}^{(v)}(x)=\left(\frac{2}{\varepsilon_q(t)+1}\right)^{\alpha}\varepsilon_q^{-1}\left(\frac{vt^2}{2}\right)x^n,$$

olduğunu biliyoruz. Burada (3.54) kullanılırsa ispat tamamlanır. □

$\varepsilon_q\left(\frac{vt^2}{2}\right)$ lineer operatörünün $E_{H,n,q}^{(a)}(x,v)$ polinomu üzerindeki etkisi ise $E_{H,n,q}^{(a)}(x,v)$ ve $E_{n,q}^{(a)}(x)$ arasındaki ilişkiyi verir:

Teorem 3.73.

$$\varepsilon_q\left(\frac{vt^2}{2}\right)E_{H,n,q}^{(a)}\left(x,v\right)=E_{n,q}^{(a)}\left(x\right).$$

İspat. (3.54) kullanılarak,

$$\varepsilon_q\left(\frac{vt^2}{2}\right)E_{H,n,q}^{(a)}\left(x,v\right)=\varepsilon_q\left(\frac{vt^2}{2}\right)\left(\frac{2}{\varepsilon_q\left(t\right)+1}\right)^{\alpha}\varepsilon_q^{-1}\left(\frac{vt^2}{2}\right)x^n,$$

eşitliği elde edilir. Bazı işlemler yapılırsa

$$\varepsilon_q\left(\frac{vt^2}{2}\right)E_{H,n,q}^{(a)}\left(x,v\right)=\left(\frac{2}{\varepsilon_q\left(t\right)+1}\right)^{\alpha}x^n,$$

olur. Burada (3.40) kullanılarak ispat tamamlanır. □

Sonuç 3.74. *Teorem 3.72 ve Teorem 3.73 , q-Hermite tabanlı Bernoulli polinomlarının özelliklerinin incelenerek q-Bernoulli polinomları ve q-Hermite polinomlarıyla ilgili özelliklerin kolayca elde edilebileceğini gösterir.*

4. SONUÇ

Bu tez çalışmasında Roman (2005) tarafından verilen umbral analizin bir genellemesi olan ve yine Roman (2005) tarafından verilen klasik olmayan umbral analiz incelenmiş ve bu analiz c_n-umbral analiz olarak adlandırılmıştır. Ayrıca, c_n-umbral analizde çok önemli yeri olan c_n-Sheffer polinomlarının bazı özelliklerinden bahsedilmiştir. İçinde Appell polinomları ve ilişkili polinomlar gibi bazı polinom çeşitlerini de bulunduran Sheffer polinom ailesi matematiğin ve diğer bazı disiplinlerin pek çok alanında kullanıma sahiptir. Bu nedenle bu tezden elde edilecek sonuçlar Bernoulli polinomları, Euler polinomları, Hermite polinomları, Laguerre polinomları, ikinci dereceden Bernoulli polinomları, Poisson-Charlier polinomları, aktüeryal polinomları, Meixner polinomları, Pidduck polinomları, Narumi polinomları, Boole polinomları, Peters polinomları, Stirling polinomları, Mahler polinomları, Mott polinomları, Apostol tipli polinomlar ailesi, Daehee tipli polinomlar, Changhee tipli polinomlar gibi çok sayıda özel polinom için uygulanabilirdir.

Bulgular ve Tartışma bölümünün ikinci kısmında c_n-umbral analizin özel hallerinden birisi olan q-umbral analizden bahsedilmiştir. 1980 yıllarından beri çalışılan bir konu olan q-analizin bazı özellikleri Roman (2005) tarafından umbral cebir metodları kullanarak verilmiştir. Bu tez çalışmasında ise q-umbral analizin çeşitli özellikleri özetlenmiş ve bazı yeni özellikleri elde edilmiştir. Örneğin, Sonuç 3.27'de $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\varepsilon_q(t^n)$ fonksiyonunun Jackson türevi aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$D_{t,q}\left(\varepsilon_q\left(t^n\right)\right) = q^{n-1}t^{n-1}\varepsilon_q\left(q^{n-1}t^n\right) + q^{n-2}t^{n-1}\varepsilon_q\left(q^{n-2}t^n\right) + \cdots + t^{n-1}\varepsilon_q\left(t^n\right).$$

Ayrıca, q-Appell polinomlarının sağladığı çeşitli özellikler listelenmiş ve bunların bazı sonuçları incelenmiştir. Bu özelliklerden birisi de analizde oldukça önemli kullanımları olan rekürans formülüdür. Örneğin, rekürans bağıntıları özel sayı ve polinomların üreteç fonksiyonlarının inşaasında da önemli rol oynar.

$S_n(x)$, $g(t)$ için q-Appell polinomu olsun. O halde

$$(n+1)\,S_{n+1}(x) = [n+1]_q\left(\theta - \frac{g'(t)}{g(t)}\right)S_n(x)$$

eşitliği sağlanır.

q-Appell polinomları için verilen bu özellikler kullanarak üreteç fonksiyonu Ernst (2012) tarafından verilen ve Kim ve Kim (2014) tarafından çeşitli umbral özellikleri incelenen $B_{k,q}^{(\alpha)}(x)$ q-Bernoulli polinomları ve $E_{k,q}^{(\alpha)}(x)$ q-Euler polinomlarının daha önce verilmeyen bazı operatör bağıntıları ve rekürans formülleri elde edilmiştir. Ek olarak $H_{k,q}^{(v)}(x)$ ile gösterilen k. dereceden, v. mertebeden q-Hermite polinomları tanımlanmış ve bazı özellikleri verilmiştir.

Bu tezin en önemli sonuçlarından birisi de Milne-Thomson tarafından 1933 yılında tanımlanan ve Dere ve Şimşek tarafından genelleştirilen Milne-Thomson tipli Bernoulli ve Euler polinomlarının (Dere ve Şimşek 2012) üreteç fonksiyonları yardımıyla tanımlanması ve q-umbral analiz yöntemleri kullanılarak bazı özelliklerinin ispatlanmasıdır. Bu polinomlar hem Hermite polinomlarıyla hem de sırasıyla Bernoulli ve Euler polinomlarıyla ilişkilidir ve aşağıdaki gibi verilirler:

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_{H,k,q}^{(a)}(x,v)\frac{t^k}{[k]_q!} = \left(\frac{t}{\varepsilon_q(t)-1}\right)^{\alpha} \varepsilon_q^{-1}\left(\frac{vt^2}{2}\right)\varepsilon_q(xt),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} E_{H,k,q}^{(a)}(x,v)\frac{t^k}{[k]_q!} = \left(\frac{2}{\varepsilon_q(t)+1}\right)^{\alpha} \varepsilon_q^{-1}\left(\frac{vt^2}{2}\right)\varepsilon_q(xt).$$

Burada tanımlanan q-Hermite tabanlı Bernoulli polinomlarının q-Bernoulli polinomlarıyla olan ilişkisi

$$\varepsilon_q\left(\frac{vt^2}{2}\right)B_{H,n,q}^{(a)}(x,v) = B_{n,q}^{(a)}(x)$$

eşitliğiyle verilirken, q-Hermite polinomlarıyla olan ilişkisi ise

$$\left(\frac{t}{\varepsilon_q(t)-1}\right)^{\alpha} H_{n,q}^{(v)}(x) = B_{H,n,q}^{(a)}(x,v)$$

eşitliği yardımıyla verilmiştir. Benzer şekilde, q-Hermite tabanlı Euler polinomlarının q-Euler polinomlarıyla olan ilişkisi

$$\varepsilon_q\left(\frac{vt^2}{2}\right)E_{H,n,q}^{(a)}(x,v) = E_{n,q}^{(a)}(x)$$

olarak verilmiş iken, q-Hermite tabanlı Euler polinomlarının q-Hermite polinomları arasındaki bağıntı

$$\left(\frac{2}{\varepsilon_q(t)+1}\right)^{\alpha} H_{n,q}^{(v)}(x) = E_{H,n,q}^{(a)}(x,v)$$

olarak verilmiştir.

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar daha da geliştirilebilir ve Hopf cebiri, Baxter cebiri, Clifford cebiri, Banach cebiri, graf teorisi, umbral interpolasyon fizik, kuantum mekaniği, bilgisayar teknolojileri, olasılık teorisi ve istatistik, topoloji, kombinatorik gibi pek çok alanda kullanılabilir.

Bu tezde kullanılan metotlar aynı zamanda p-adik analiz ve matematiksel fizikte önemli yeri olan p-adik q-integral teorisine katkılar sağlayacaktır. Bu çalışmada elde edilen c_n-Appell polinomlarını ve sayılarını içeren formüller ise özellikle q-analizdeki çalışmaların ve literatürdeki sonuçların çoğundan farklı bir metot ile verilmiştir. Ayrıca Mahmudov (Mahmudov vd 2008), Kim (Kim vd 2014) gibi matematikçilerin metotları q-analiz olarak belirtilmesine rağmen q-umbral analiz daha genel bir yöntemdir.

5. KAYNAKLAR

ABRAMOWITZ, M. ve STEGUN, I. A. 1972. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. Dover Publication, New York.

APPELL, P. 1880. Sur une classe de polynômes. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure 2me série, 9: 119-144.

BAYAD, A. ve Kim, T. 2010. Identities for the Bernoulli, the Euler and the Genocchi numbers and polynomials. Adv.Stud.Contemp.Math.(Kyungshang), 20: 247-253.

BLASIAK, P., DATTOLI, G. HORZELA, A. ve PENSON, K. A. 2006. Representations of monomiality principle with Sheffer-type polynomials and boson normal ordering. Phys. Lett. A, 352: 7-12.

CANGÜL, İ. N., ÖZDEN, H. ve ŞİMŞEK, Y. 2008. Generating functions of the (h, q) extensin of twisted Euler polynomials and numbers. Acta Math. Hungar., 120: 281-299.

CANGÜL, İ. N., KURT, V., ÖZDEN, H. ve ŞİMŞEK, Y. 2009. On the higher-order w-q-Genocchi numbers. Adv. Stud. Contemp. Math. 19(1): 39-57.

CARLITZ, L. 1962. Some generalized multiplication formulae for the Bernoulli polynomials and related functions. Mh. Math, 66: 1-8.

CENKCİ, M., CAN, M. ve KURT, V. 2006. q-Extensions Of Genocchi Numbers. Journal of the Korean Mathematical Society, 43:183-198.

CENKCİ, M., KURT, V., RIM, S. H. ve ŞİMŞEK, Y. 2008. On (i, q) Bernoulli and Euler numbers, Appl. Math. Lett. 21(7): 706-711.

CHOI, J., ANDERSON P. J. ve SRIVASTAVA H. M. 2008. Some q-extensions of the Apostol-Bernoulli and the Apostol-Euler polynomials of order n, and the multiple Hurwitz zeta function. Appl. Math. Comput., 199: 723-737.

CHOI, J., ANDERSON P. J. ve SRIVASTAVA H. M. 2009. Carlitz's q-Bernoulli and q-Euler polynomials and a class of q-Hurwitz zeta functions. Appl. Math. Comput., 215: 1185-1208.

CLARKE, F., HUNTON, J. ve RAY, N. 1995. Extensions Of Umbral Calculus II: Double Delta Operators, Leibniz Extensions And Hattori-Stong Theorems.

DATTOLI, G., MIGLIORATI, M. ve SRIVASTAVA, H. M. 2007. Sheffer polynomials, monomiality principle, algebraic methods and the theory of classical polynomials. Math. Comput. Modelling, 45: 1033-1041.

DERE, R. 2016. Some Hermite Base Polynomials on q-Umbral Algebra, Filomat, 30:4 (2016), 961-967.

DERE, R. 2016. Some Identities of the q-Laguerre Polynomials on q-Umbral Calculus, Numerical Analysis and Applied Mathematics ICNAAM 2016: International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics. AIP Conference Proceedings (kabul edildi).

DERE, R. ve ŞİMŞEK, Y. 2011. Genocchi polynomials associated with the Umbral algebra. Appl. Math. Comput., 218(3): 756-761.

DERE, R. ve ŞİMŞEK, Y. 2012. Applications of umbral algebra to some special polynomials. Adv. Studies Contemp. Math., 22: 433-438.

DERE, R. ve ŞİMŞEK, Y. 2012. Remarks on the Frobenius-Euler Polynomials on the Umbral Algebra. Numerical Analysis and Applied Mathematics ICNAAM 2012: International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics. AIP Conference Proceedings., 1479: 348-351.

DERE, R. ve ŞİMŞEK, Y. 2013. Normalized polynomials and their multiplication formulas. Advances in Difference Equations, 2013: 31.

DERE, R., ŞİMŞEK, Y. ve SRIVASTAVA, H. M. 2013. A unified presentation of three families of generalized Apostol type polynomials based upon the theory of the umbral calculus and the umbral algebra. Journal of Number Theory 133: 3245-3263.

DERE, R. ve ŞİMŞEK, Y. 2015. Hermite Base Bernoulli Type Polynomials on the Umbral Algebra, Russian Journal of Mathematical Physics 22(1) (2015) 1-5.

DI BUCCHİANİCO ve A. LOEB, D. 2000. A Selected Survey of Umbral Calculus. The Electronic Journal of Combinatorics.

ERDELYI, A. 1953. Higher Transcendental Functions. The Bateman Manuscript Procect, Vols I-III. McGraw-Hill, New York.

ERNST, T. 2006. q-Bernoulli and q-Euler Polynomials, an Umbral Approach. International Journal of Difference Equations. 1(1): 31-80.

ERNST, T. 2008. Examples of a q-umbral calculus. Advanced Studies in Contemporary Mathematics, 16(1), 1-22.

ERNST, T. 2012. A Comprehensive Treatment of q-Calculus. Springer Basel.

GOLDMAN, R., SIMEONOV, P. ve ŞİMŞEK, Y. 2014. Generating Function fot the q-Bernstein Bases. Siam J. Discrete Math. 28(3): 1009-1025.

IHRIG, E. C. ve ISMAIL, M. E. H. 1981. A q-umbral calculus, J. Math. Anal. Appl., 84: 178-207.

JORDAN, C. 1965. Calculus of Finite Differences. Chelsea, Bronx, New York.

KAC, V. ve CHEUNG, P. 2002. Quantum Calculus, Springer.

KARANDE, B. K. ve THAKARE N. K. 1975. On the unification of Bernoulli and Bernoulli polynomials. Indian J. Pure Appl. Math., 6: 98-107.

KHOLODOV, A. N. 1990. The umbral calculus on multivalued formal groups, and adams projections in k-theory. Math. USSR Sbornik, 65(2): 423-437.

KIM, Y-H., KIM, W. ve JANG, L-C. 2008. On the q-Extension of Apostol-Euler Numbers and Polynomials. Abstract and Applied Analysis, Article ID 296159.

KIM, D. S. ve KIM, T. 2013. Daehee numbers and polynomials. Appl. Math. Sci. (Ruse) 7(117-120): 5969-5976.

KIM, D. S. ve KIM, T. 2014. Some identities of q-Euler polynomials arising from q-umbral calculus. Journal of Inequalities and Applications, 2014:1.

KIM, D. S. ve KIM, T. 2014. q-Bernoulli polynomials and q-umbral calculus. Science China Mathematics.57(9): 1867-1874.

KURT, V., KURT, B. ve KIM, D. 2013. Some Identities On The Generalized q-Bernoulli, q-Euler, And q-Genocchi Polynomials. Abstract and Applied Analysis, 2013: 1-6.

LENART, C. ve RAY, N. 1998. Hopf algebras of set systems. Discrete Mathematics, 180: 255-280.

LUO Q-M. ve SRIVASTAVA H. M. 2005. Some generalizations of the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials. J. Math. Anal. Appl., 308(1): 290-302.

LUO Q-M. 2009. q-Extensions for the Apostol-Genocchi polynomials. General Math., 17(2): 113-125.

LUO Q-M. 2009. The multiplication formulas for the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials of higher order. Integral transforms and Special Functions, 20: 377-391.

MAHMUDOV, N. I. ve KELEHSTERI, M. E. 2014. q-extensions for the Apostol type polynomials. J. Appl. Math. Art. ID 868167.

MAHMUDOV, N. I. ve MOMENZADEH, M. 2014. On a class of q-Bernoulli, q-Euler, and q-Genocchi polynomials. Abstr. Appl. Anal. 2014, Art. ID 696454.

MALDONADA, M., PRADA, J. ve SENOSIAIN, M. J. 2007. Basic Appell Sequences, Taiwan J. Math. 11: 1045-1055.

MILNE-THOMSON. 1933. Two Classes of Generalized Polynomials. Proc. London Math. Soc. s2-35 (1): 514-522.

NÖRLUND, N. E. 1924. Vorlesungen uber Differenzenrechnung. Springer.

ÖZDEN, H., CANGÜL, I.N. ve ŞİMŞEK, Y. 2008. Multivariate interpolation functions of higher-order q-Euler numbers and their applications. Abstr. Appl. Anal. 2008: ArticleID390857.

ÖZDEN, H. ve ŞİMŞEK, Y. 2008. A new extension of q-Euler numbers and polynomials related to their interpolation functions. Appl. Math. Lett., 21: 934-939.

RAINVILLE, E. D. 1960. Special Functions, The Macmillan Company, New York.

ROMAN, S. 1982. The theory of the Umbral calculus I. J. Math. Anal. Appl., 87: 58-115.

ROMAN, S. 1982. The theory of the Umbral calculus II. J. Math. Anal. Appl., 89: 290-314.

ROMAN, S. 1982. More on the Umbral Calculus, with Emphasis on the q-Umbral Calculus. J. Math. Anal. Appl., 107(1): 222-254.

ROMAN, S. 1992. Advanced Linear Algebra. Springer-Verlag, New York.

ROMAN, S. 2005. The Umbral Calculus. Dover Publications Inc, New York.

SEO, J. J. ve KIM, T. 2013. p -adic invariant integral on Zp associated with the Changhee's q-Bernoulli polynomials. Int. J. Math. Anal. (Ruse), 7(41-44): 2117-2128.

SCHIKHOF, W.H. 1984. Ultrametric Calculus: An Introduction to p-adic analysis. Cambridge University Press.

SRIVASTAVA, H. M. 2000. Some formulas for the Bernoulli and Euler polynomials at rational arguments. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 129: 77-84.

SRIVASTAVA, H. M. 2005. q-Bernoulli numbers and polynomials associated with multiple q-zeta functions and basic L-series. Russian J. Math. Phys., 12: 241-268.

SRIVASTAVA, H. M., KIM, T. ve ŞİMŞEK, Y. 2005. q-Bernoulli numbers and polynomials associated withmultiple q-zeta functions and basic L-series. Russ. J. Math. Phys., 12(2): 201-228.

ŞİMŞEK, Y. 2003. On q-analogue of the twisted L-functions and q-twisted Bernoulli numbers. J. Korean Math. Soc. 40(6): 963-975.

ŞİMŞEK, Y. 2007. On twisted q-Hurwitz zeta function and q-two-variable L-function. Appl. Math. Comput. 187(1): 466-473.

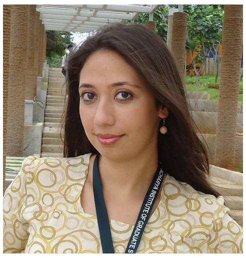
ŞİMŞEK, Y. 2009. q-Hardy–Berndt type sums associated with q-Genocchi type zeta and q-l-functions Nonlinear Analysis(Theory, Methods & Applications), 71(12): e377-e395.

ŞİMŞEK, Y. 2014. Special numbers on analytic functions. Applied Mathematics, 5: 1091-1098.

ŞİMŞEK, Y., ÖZDEN, H. ve CANGÜL, İ. N. 2009. A new approach to q-Genocchi numbers and their interpolation functions. Nonlinear Analysis(Theory, Methods & Applications),71(12) : e793-e799.

TEMPESTA, P. 2008. On Appell sequences of polynomials of Bernoulli and Euler type. J. Math. Anal. Appl., 341: 1295-1310.

ÖZGEÇMİŞ



Rahime DERE 1988 yılında Antalya ili Alanya ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Alanya'da tamamladı. 2005 yılında girdiği Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2009 yılında mezun oldu. Eylül 2009-Ağustos 2011 yılları arasında Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans öğrenimini tamamladı. Eylül 2011'de Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında doktora öğrenimine başladı. 2011 yılından beri aynı birimde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır.