T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ CARTAN-VRANCEANU MANİFOLDLARINDAKİ BAZI EĞRİLERİN GEOMETRİSİ

Ayşe YILMAZ CEYLAN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2015

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ CARTAN-VRANCEANU MANİFOLDLARINDAKİ BAZI EĞRİLERİN GEOMETRİSİ

Ayşe YILMAZ CEYLAN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(Bu tez Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından 2211-Yurt İçi Lisanüstü Burs Programı ile desteklenmiştir.)

2015

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ CARTAN-VRANCEANU MANİFOLDLARINDAKİ BAZI EĞRİLERİN GEOMETRİSİ

Ayşe YILMAZ CEYLAN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 13/11/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği/~~Oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN
Prof. Dr. Abdilkadir Ceylan ÇÖKEN
Doç. Dr. Mustafa ÖZDEMİR
Doç. Dr. Cumali EKİCİ
Doç. Dr. Cansel YORMAZ

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ CARTAN-VRANCEANU MANİFOLDLARINDAKİ BAZI EĞRİLERİN GEOMETRİSİ

Ayşe YILMAZ CEYLAN

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN
Kasım 2015, 53 sayfa

Bu tezin amacı, Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki biharmonik eğrilerin eğri çiftlerinin parametrik denklemlerinin açık olarak ifade edilmesidir.

Birinci bölümde, Riemann manifoldu ve biharmonik eğriler kuramına ilişkin bu tez çalışmasının sonraki bölümlerinde kullanılacak olan bazı ön bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, literatürde Cartan-Vranceanu manifoldları ve bu manifoldların üzerlerindeki biharmonik eğrilere ilişkin yer alan bazı sonuçlar verilmiştir. İkinci bölümden sonra gelen iki bölüm, tamamen özgün olacak şekilde düzenlenmiştir.

Üçüncü bölümde, $3-$boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki biharmonik eğrilerin sırasıyla evolüt, involüt, Bertrand ve Mannheim eğri çiftlerinin parametrik karakterizasyonları verilmiştir.

Dördüncü bölümde, üçüncü bölümde elde edilen sonuçlar $(2n+1)-$ boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki biharmonik eğrilerin eğri çiftlerine genelleştirilmiştir. Ayrıca, bu bölümde $(2n+1)-$ boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki bir biharmonik eğrinin, en fazla kaçıncı mertebeden evolüt ve involüt eğri çiftine sahip olabileceği incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Bertrand eğri çifti, biharmonik eğri, Cartan-Vranceanu manifoldu, evolüt eğri çifti, involüt eğri çifti, Mannheim eğri çifti.

JÜRİ: Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN (Danışman)
Prof. Dr. Abdilkadir Ceylan ÇÖKEN
Doç. Dr. Mustafa ÖZDEMİR
Doç. Dr. Cumali EKİCİ
Doç. Dr. Cansel YORMAZ

ABSTRACT

GEOMETRY OF SOME CURVES IN THE GENERALIZED CARTAN-VRANCEANU MANIFOLDS

Ayşe YILMAZ CEYLAN

PhD Thesis in Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN
November 2015, 53 pages

The aim of this thesis is to characterize the curve couples of the biharmonic curves in the Cartan-Vranceanu manifold.

In the first chapter, some preliminary information concerning Riemann manifold and biharmonic curves which will be used in the subsequent chapters is given.

In the second chapter, some results concerning Cartan-Vranceanu manifolds, biharmonic curves on these manifolds in the literature are given. Two chapters that come after the second chapter, are completely original.

In the third chapter, characterizations of curve couples of the biharmonic curves in the $3-$dimensional Cartan-Vranceanu manifolds are given. These couples are evolute, involute, Bertrand and Mannheim couples respectively.

In the fourth chapter, the results that handled in previous chapter are generalized to curve couples of the biharmonic curves in the $(2n+1)-$dimensional Cartan-Vranceanu manifolds. In addition to this, the order of evolute and involute curve couple of a biharmonic curve in the $(2n+1)-$dimensional Cartan-Vranceanu manifolds are studied.

KEYWORDS: Bertrand curve couples, biharmonic curve, Cartan-Vranceanu manifold, evolute curve couples, involute curve couples, Mannheim curve couples.

COMMITTEE: Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN (Supervisor)
Prof. Dr. Abdilkadir Ceylan ÇÖKEN
Assoc. Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR
Assoc. Prof. Dr. Cumali EKİCİ
Assoc. Prof. Dr. Cansel YORMAZ

ÖNSÖZ

Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki biharmonik eğriler, 2006 yılında Caddeo vd tarafından karakterize edilmiştir. Cartan-Vranceanu manifoldları üzerindeki biharmonik eğriler, son yıllarda birçok araştırmacının ilgisini çekmiş ve bu konu ile ilgili çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Örneğin, Körpınar ve Turhan, 2011 yılında bir Cartan-Vranceanu manifoldu olan Heisenberg gruplarındaki biharmonik eğrilerin eğri çeşitlerini çalışmışlardır. 2007 yılında, Fetcu yüksek boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki biharmonik eğrileri incelemiştir. Bu tez çalışmasında, Heisenberg gruplarını da kapsayan daha genel bir obje olan Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki biharmonik eğrilerinin eğri çiftlerinin parametrizasyonları elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasının, Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki biharmonik eğriler konusunun gelişimine önemli katkılar sağlayacağı ve bu alanlarda yeni araştırmalar yapılmasını teşvik edici nitelikte bir çalışma olacağı inancındayım.

Bu tez içerisindeki şekillerin çizimleri için Geogebra programı kullanılmıştır.

Bu tez çalışması, Akdeniz Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından 2014.03.0121.001 nolu proje ile desteklenmiştir. Tez çalışmam sırasında ve bugüne kadar yaptığım tüm çalışmalarda bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşarak zamanını ve desteğini hiç esirgemeyen, akademik gelişimimde büyük katkıları bulunan saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN'e (Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi) teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak, hayatım boyunca maddi manevi desteklerini esirgemeyen, her zaman yanımda olan babam Bekir YILMAZ'a, annem Gülay YILMAZ'a, ablam Esra YILMAZ'a ve kıymetli eşim Aydın CEYLAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{E}^3$	$3-$boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}^n$	$n-$boyutlu Öklid uzayı
E_i	$i-$inci Frenet vektör alanı
w^i	$i-$inci $1-$form
N_i	Eğrinin $i-$inci normali
k_i	Eğrinin $i-$inci eğriliği
κ	Eğrilik fonksiyonu
τ	Burulma fonksiyonu
T	Eğrinin teğet vektörü
N	Eğrinin asli normal vektörü
B	Eğrinin binormal vektörü
$(M, ds^2_{l,m})$	Cartan–Vranceanu Manifoldu
$\mathbb{H}_3$	$3-$boyutlu Heisenberg grup
$\mathbb{H}_{2n+1}$	$(2n+1)-$boyutlu Heisenberg grup
$SU(2)$	Özel birimsel grup
$\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$	$SL(2,\mathbb{R})$ özel lineer grubunun evrensel örtüsü
T_pM	M manifoldu üzerindeki tanjant vektörlerin uzayı
$\chi(M)$	M manifoldu üzerinde vektör alanları uzayı
$ds^2_{l,m}$	Cartan-Vranceanu manifoldları üzerinde tanımlanan iç çarpım
R	Riemann Eğrilik tensörü
Ric	Ricci tensörü
$[,]$	Lie operatörü
∇	Riemann konneksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Bu tez çalışmasında, Heisenberg gruplarını da kapsayan Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki eğri çiftleri ele alınmıştır. Özel olarak, 3−boyutlu ve $(2n+1)$−boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki biharmonik eğrilerin evolüt, involüt, Bertrand ve Mannheim eğri çiftleri çalışılmıştır.

Bu bölümde, Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki eğri çiftlerini oluşturmak için gerekli olan bazı tanım ve teoremler verilecektir.

1.1. Manifold

Bu kesimde, diferansiyel geometrinin temel kavramlarından biri olan manifold ve eğri kavramları incelenecektir. Bu bölümdeki tanım ve teoremler, Hacısalihoğlu (1993, 1994, 2006) kaynaklarından alınmıştır.

Tanım 1.1.1 *(Hacısalihoğlu 1993) X bir cümle olsun. X in altcümlelerinin bir koleksiyonu τ olsun. τ koleksiyonu aşağıdaki önermeleri doğrularsa X üzerinde bir topoloji adını alır:*

(i) $X, \varnothing \in \tau$,

(ii) $\forall A_1, A_2 \in \tau \Longrightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$,

(iii) $A_i \in \tau, i \in I, \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

Tanım 1.1.2 *(Hacısalihoğlu 1993) Bir X cümlesi ve üzerindeki bir τ topolojisinden oluşan (X,τ) ikilisine bir topolojik uzay denir.*

Tanım 1.1.3 *(Hacısalihoğlu 2006) X bir topolojik uzay olsun. Farklı iki $p, q \in X$ noktasının X deki açık komşulukları, sırası ile, U ve V olsun. Eğer U ile V yi $U \cap V = \varnothing$ olabilecek şekilde seçmek mümkün ise X topolojik uzayına bir Hausdorff uzayı'dır denir.*

Tanım 1.1.4 *(Hacısalihoğlu 1993) X ve Y birer topolojik uzay olsunlar. Bir*

$$f : X \to Y$$

fonksiyonu sürekli ise ve f^{-1} tersi var ve f^{-1} de sürekli ise f ye X den Y ye bir homeomorfizm (topolojik dönüşüm) denir.

Tanım 1.1.5 *(Hacısalihoğlu 1993) E^n in iki açık alt cümlesi U ve V olsun. Bir*

$$\Psi : U \to V$$

fonksiyonu için şu iki önerme doğru ise Ψ ye C^k sınıfından bir diffeomorfizm ve U ile V ye de k. dereceden diffeomorfiktirler denir:

(i) $\Psi \in C^k(U, V)$,

(ii) $\Psi^{-1} : V \to U$ *var ve* $\Psi^{-1} \in C^k(V, U)$.

Tanım 1.1.6 *(Hacısalihoğlu 1993)* M *bir topolojik uzay olsun.* M *için aşağıdaki önermeler doğru ise* M *bir* $n-$*boyutlu topolojik manifold (veya kısaca topolojik* $n-$*manifold) dur denir:*

(i) M *bir Hausdorff uzaydır,*

(ii) M *nin her bir açık alt cümlesi* E^n *e veya* E^n *in bir açık altcümlesine homeomorftur,*

(iii) M *sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir.*

Tanım 1.1.7 *(Hacısalihoğlu 2006)* M *bir* $n-$*boyutlu topolojik manifold ve* U *da* M *nin bir açık cümlesi olsun. Eğer* U *bir* Ψ *homeomorfizmi ile* E^n *nin bir* W *açık altcümlesine eşlenebiliyorsa,* (U, Ψ) *ikilisine* M *de bir koordinat komşuluğu (harita) denir.*

Tanım 1.1.8 *(Hacısalihoğlu 1993)* M *bir topolojik* $n-$*manifold ve* M *nin bir açık örtüsü* $\{U_\alpha\}$ *olsun.* U_α *açık cümlelerinin* α *indislerinin cümlesi* A *olmak üzere* $\{U_\alpha\}$ *örtüsü için* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *yazılır.* E^n *de* U_α *ya bir* Ψ_α *homeomorfizmi altında homeomorf olan açık cümle* V_α *olsun. Böylece ortaya çıkan* (U_α, Ψ_α) *haritalarının*

$$\{(U_\alpha, \Psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$$

koleksiyonuna bir atlas (koordinat komşuluğu sistemi) denir.

Tanım 1.1.9 *(Hacısalihoğlu 2006)* M *bir* $n-$*boyutlu topolojik manifold ve*

$$S = \{(U_\alpha, \Psi_\alpha) : \alpha \in A\}$$

cümlesi de M *nin bir atlası olsun.* $U_\alpha \cap U_\beta \neq 0$ *olmak üzere* $\forall\, \alpha, \beta \in A$ *için,*

$$\phi_{\alpha\beta} = \Psi_\alpha \circ \Psi_\beta^{-1} : \Psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \Psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

ve

$$\phi_{\beta\alpha} = \Psi_\beta \circ \Psi_\alpha^{-1} : \Psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \Psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

fonksiyonları C^r *sınıfından ise* S *ye* C^r, $r \geq 1$, *sınıfındandır denir. Eğer* S *atlası* M *üzerinde* C^r *sınıfından ise* S *ye* M *üzerinde bir* C^r *sınıfından diferansiyellenebilir yapı denir.*

Tanım 1.1.10 *(Hacısalihoğlu 1993)* M *bir topolojik* $n-$*manifold olsun.* M *üzerinde* C^r *sınıfından bir diferansiyellenebilir yapı tanımlanabilirse,* M *ye* C^r *sınıfından diferansiyellenebilir manifold denir.*

Tanım 1.1.11 *(Hacısalihoğlu 1994)* M *bir diferansiyellenebilir manifold ve* $\alpha : I \to M$ *de* C^k *sınıfından bir fonksiyon olsun. O zaman* $\alpha(I) \subset M$ *alt cümlesine,* $\{(I, \alpha)\}$ *atlası ile verilmiş* C^k *sınıfından bir eğri denir.*

Tanım 1.1.12 *(Hacısalihoğlu 1994) M bir diferansiyellenebilir manifold ve $\alpha(I)$ da M üzerinde $\{(I,\alpha)\}$ atlası ile verilmiş C^k sınıfından bir eğri olsun. $\alpha(t) = p \in M$ olmak üzere,*

$$\begin{array}{rcll} X_p: & C^\infty(M,\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & f & \to & X_p(f) = \dfrac{d(f\circ\alpha)}{dt}\Big|_t \end{array}$$

şeklinde tanımlı X_p fonksiyonuna, $\alpha(I)$ eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki bir tanjant vektörü denir ve $\alpha(t)$ noktasında $\alpha(I)$ nın tanjant vektörlerinin cümlesi $T_{\alpha(t)}(\alpha(I))$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.13 *(Hacısalihoğlu 1994) M bir diferansiyellenebilir manifold ve bir noktası $p \in M$ olsun. Bir*

$$X_p : C^\infty(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu, M üzerinde en az bir eğrinin p noktasındaki tanjant vektörü ise X_p ye M nin p noktasındaki bir tanjant vektörü denir. M üzerindeki tanjant vektörlerin cümlesi $T_p(M)$ ile gösterilir.

$T_p(M)$ üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan iç ve dış işlemler sayesinde, $T_p(M)$ bir reel vektör uzayı olur:

***(i)** İç işlem:*

$$\begin{array}{rcll} +: & T_p(M)\times T_p(M) & \to & T_p(M) \\ & (X_p, Y_p) & \to & X_p + Y_p \end{array}$$

öyle ki, $\forall f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için,

$$(X_p + Y_p)(f) = X_p(f) + Y_p(f)$$

dir.

***(ii)** Dış işlem:*

$$\begin{array}{rcll} \cdot: & \mathbb{R}\times T_p(M) & \to & T_p(M) \\ & (\lambda, X_p) & \to & \lambda X_p \end{array}$$

öyle ki, $\forall f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için,

$$(\lambda X_p)(f) = \lambda X_p(f)$$

dir.

Tanım 1.1.14 *(Hacısalihoğlu 1994) M bir diferansiyellenebilir manifold ve bir $p \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerin uzayı $T_p(M)$ olsun. $T_p(M)$ vektör uzayına, M nin p noktasındaki tanjant uzayı denir.*

Teorem 1.1.15 *(Hacısalihoğlu 1994) M bir diferansiyellenebilir manifold ve $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay da $T_p(M)$ olsun. O zaman, $\forall X_P \in T_pM$ ve $\forall f, g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için,*

***(i)** $X_p : C^\infty(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ lineerdir,*

(ii) $X_p(fg) = X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g)$

dir.

Tanım 1.1.16 *(Hacısalihoğlu 1994) M bir diferansiyellenebilir manifold olsun. M üzerinde bir vektör alanı diye,*

$$X : M \to \bigcup_{p\in M} T_pM$$

birebir ve örten olarak tanımlanan X fonksiyonuna denir ve M üzerinde vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ile gösterilir.

$\chi(M)$ üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan iç ve dış işlemler, $\chi(M)$ yi reel vektör uzayı yapısıyla donatırlar:

(i) *İç işlem:*

$$\begin{array}{rccc} + : & \chi(M)\times\chi(M) & \to & \chi(M) \\ & (X,Y) & \to & X+Y \end{array}$$

öyle ki, $\forall p \in M$ için,

$$(X+Y)(p) = X_p + Y_p$$

dir.

(ii) *Dış işlem:*

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{R}\times\chi(M) & \to & \chi(M) \\ & (\lambda,X) & \to & \lambda X \end{array}$$

öyle ki, $\forall p \in M$ için,

$$(\lambda X)(p) = \lambda X_p$$

dir.

Tanım 1.1.17 *(Hacısalihoğlu 1994) M bir diferansiyellenebilir manifold ve M üzerindeki vektör alanlarının vektör uzayı da $\chi(M)$ olsun. $\chi(M)$ ye M üzerindeki vektör alanlarının uzayı denir.*

Teorem 1.1.18 *(Hacısalihoğlu 1994) M bir diferansiyellenebilir manifold ve M üzerinde vektör alanlarının vektör uzayı $\chi(M)$ verilsin. O zaman, $\forall X \in \chi(M)$ için,*

(i) $X_p : C^\infty(M,\mathbb{R}) \to C^\infty(M,\mathbb{R})$ *lineerdir,*

(ii) $\forall f,g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ *için,* $X(fg) = fX(g) + X(f)g$

dir.

Tanım 1.1.19 *(Hacısalihoğlu 1994) M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ verilsin. O zaman,*

$$\begin{array}{rccc} [,] : & \chi(M)\times\chi(M) & \to & \chi(M) \\ & (X,Y) & \to & [,](X,Y) = [X,Y] \end{array}$$

öyle ki, $\forall f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ *için,*

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

şeklinde tanımlı $[,]$ *dönüşümüne* $\chi(M)$ *üzerinde Lie parantez operatörü denir.*

Tanım 1.1.20 *(Hacısalihoğlu 1993)* V*, bir* K *cismi üzerinde vektör uzayı ve*

$$[,] : V \times V \to V$$

dönüşümü de,

(i) $2-$*lineer,*

(ii) Alterne ($\forall X, Y \in V$ *için* $[X,Y] = -[Y,X]$),

(iii) $\forall X, Y, Z \in V$ *için,*

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$

olarak verilsin. $[,]$ *dönüşümüne,* V *üzerinde bir Lie operatörü denir. Bu takdirde,* V *vektör uzayına bir Lie cebiri denir.*

Teorem 1.1.21 *(Hacısalihoğlu 1994)* M *diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde vektör alanlarının uzayı* $\chi(M)$ *ve* $\chi(M)$ *üzerinde Lie parantez operatörü* $[,]$ *verilsin. O zaman,* $[,]$ *Lie parantez operatörü,* $\chi(M)$ *üzerinde bir Lie operatörüdür.*

Tanım 1.1.22 *(Hacısalihoğlu 1994)* M *bir* C^{∞} *manifold olsun.* M *üzerinde vektör alanlarının uzayı* $\chi(M)$ *ve reel değerli* C^{∞} *fonksiyonların halkası* $C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ *olmak üzere,*

$$\langle , \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \to C^{\infty}(M, \mathbb{R})$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlı ise M *ye bir Riemann manifoldu denir. Burada,* $\langle , \rangle$ *işlemine* M *üzerinde iç çarpım, metrik tensör, Riemann metriği veya diferansiyellenebilir metrik denir.*

Tanım 1.1.23 *(Hacısalihoğlu 1994)* M *bir* C^{∞} *manifold olsun.* M *üzerinde vektör alanlarının cümlesi* $\chi(M)$ *ve reel değerli* C^{∞} *fonksiyonların halkası da* $C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ *olmak üzere,*

$$\langle , \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \to C^{\infty}(M, \mathbb{R})$$

fonksiyonu,

(i) $2-$*lineer,*

(ii) Simetrik,

(iii) $\forall X \in \chi(M)$ *için* $\langle X, Y \rangle = 0 \Rightarrow Y = 0 \in \chi(M)$

özelliklerini sağlıyor ise, M *ye yarı-Riemann manifoldu denir.*

1.2. Kovaryant Türev ve Jeodezik Eğri

Bu kesimde, kovaryant türev ve jeodezik eğri tanımı verilecektir. Bu bölümdeki tanımlar, Şahin (2012) kaynağından alınmıştır.

Tanım 1.2.1 *(Şahin 2012) M bir manifold ve manifold üzerinde vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ olsun. Bu durumda $X, Y, Z \in \chi(M)$ vektör alanları ve $f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ için,*

$$\nabla : \chi(M) \to \chi(M)$$

ile tanımlı ve

(i) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z,$

(ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$

(iii) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y,$

(iv) $\nabla_X (fY) = X[f]Y + f \nabla_X Y$

şartlarını sağlayan ∇ dönüşümüne afin veya lineer konneksiyon adı verilir. $\nabla_X Y$ vektör alanına Y vektör alanının X vektör alanı boyunca kovaryant türevi adı verilir.

Tanım 1.2.2 *(Şahin 2012) (M, g) bir Riemann manifoldu ve $\alpha : I \to M$ bir eğri olsun. $\dot{\alpha} = \alpha_* \left(\frac{d}{dt} \right)$ olmak üzere, eğer $\nabla_{\dot{\alpha}} X = 0$ ise X vektör alanına α boyunca paraleldir denir.*

Tanım 1.2.3 *(Şahin 2012) M bir Riemann manifoldu olsun. Eğer $\alpha : I \to M$ eğrisinin teğet vektör alanı, α boyunca paralel ise eğriye jeodeziktir denir.*

1.3. Riemann Eğrilik Tensörü ve Ricci Tensörü

Bu kesimde, Riemann konneksiyonu, Riemann eğrilik tensörü, Ricci tensörü kavramları ve bazı özellikleri verilecektir. Bu bölümde, Do Carmo (1993), Hacısalihoğlu (1994, 2004), Kühnel (2002), Boothby (2003) ve Şahin (2012) kaynaklarından yararlanılmıştır.

Tanım 1.3.1 *(Hacısalihoğlu 1994) M bir yarı-Riemann manifoldu ve ∇, M üzerinde bir afin konneksiyon olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanıyor ise ∇ konneksiyonuna, M üzerinde bir Riemann konneksiyonu ve ∇_X e de X e göre Riemann anlamında kovaryant türev operatörü denir:*

(i) ∇, *C^{∞} sınıfındandır,*

(ii) M nin bir A bölgesi üzerinde, C^{∞} olan $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

dir,

(iii) M nin bir A bölgesi üzerinde C^{∞} olan $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall p \in A$ için,

$$X_p\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle \mid_p + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \mid_p$$

dir.

Tanım 1.3.2 *(Do Carmo 1993) Bir M Riemann manifoldunun, R Riemann eğrilik tensörü, her $X, Y \in \chi(M)$ çifti için aşağıdaki dönüşüm ile tanımlanır:*

$$\begin{array}{llll} R(X,Y): & \chi(M) & \to & \chi(M) \\ & Z & \to & R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, \; Z \in \chi(M). \end{array}$$

Burada, ∇, M Riemann manifoldunun Riemann konneksiyonudur.

Önerme 1.3.3 *(Do Carmo 1993) Bir M Riemann manifoldunun, R Riemann eğrilik tensörü aşağıdaki özellikleri sağlar:*

(i) R, $\chi(M) \times \chi(M)$ üzerinde bilineerdir:

$$\begin{aligned} R(fX_1 + gX_2, Y_1) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1), \\ R(X_1, fY_1 + gY_2) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2). \end{aligned}$$

Burada, $f, g \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ ve $X_1, Y_1, X_2, Y_2 \in \chi(M)$ dir.

(ii) Herhangi $X, Y \in \chi(M)$ için

$$R(X,Y) : \chi(M) \to \chi(M)$$

lineerdir:

$$\begin{aligned} R(X,Y)(Z+W) &= R(X,Y)Z + R(X,Y)W, \\ R(X,Y)fZ &= fR(X,Y)Z. \end{aligned}$$

Burada, $f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ ve $Z, W \in \chi(M)$ dir.

Önerme 1.3.4 *(Do Carmo 1993) Bir M Riemann manifoldunun, R Riemann eğrilik tensörü, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için Bianchi özdeşliğini sağlar:*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$

Tanım 1.3.5 *(Hacısalihoğlu 2004) M bir $n-$boyutlu $(n \geq 4)$ Riemann (yarı Riemann) manifoldu ve g de M nin metriği olsun. $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için,*

$$\begin{array}{llll} R: & \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) & \to & C^{\infty}(M, \mathbb{R}) \\ & (X, Y, Z, W) & \to & R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z, W) \end{array}$$

olarak tanımlı 4. mertebeden kovaryant tensöre, M üzerinde Riemann-Christoffel eğrilik tensörü denir.

Teorem 1.3.6 *(Do Carmo 1993 ve Boothby 2003) Riemann eğrilik tensörü ve Riemann-Christoffel eğrilik tensörü aşağıdaki bağıntıları sağlar:*

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z + R(Y,X)Z &= 0, \\ R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W) &= 0, \\ R(X,Y,Z,W) + R(Y,X,Z,W) &= 0, \\ R(X,Y,Z,W) + R(X,Y,W,Z) &= 0, \\ R(X,Y,Z,W) - R(Z,W,X,Y) &= 0. \end{aligned}$$

Tanım 1.3.7 *(Kühnel 2002 ve Şahin 2012) (M,g) $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu ve M üzerinde lokal ortonormal vektör alanları $e_1,...,e_n$ olsun. Bu durumda $X,Y \in \chi(M)$ için,*

$$\begin{aligned} Ric: \ \chi(M) \times \chi(M) &\to C^\infty(M,\mathbb{R}) \\ (X,Y) &\to Ric(X,Y) = iz(Z \to R(Z,X)Y) \end{aligned}$$

dönüşümü ile tanımlı $(2,0)-$mertebeli,

$$Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g\left(R(e_i,X)Y, e_i\right)$$

tensör alanına (M,g) manifoldunun Ricci tensörü adı verilir.

1.4. Harmonik ve Biharmonik Dönüşüm

Bu kesimde, harmonik ve biharmonik dönüşümün tanımı ve tezin temel unsurlarından biri olan biharmonik eğriler ile ilgili bir teorem verilecektir. Bu kesimdeki temel kavramlar, Caddeo vd (2006) ve Şahin (2012) kaynaklarından alınmıştır.

Tanım 1.4.1 *(Şahin 2012) (M_1,g_1) ve (M_2,g_2) sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları ve*

$$F: M_1 \to M_2$$

bir dönüşüm olsun. $x \in M_1$ için

$$\begin{aligned} e(F): \ M_1 &\to [0,\infty) \\ x &\to e(F)_x = \tfrac{1}{2}\left|F_{*x}\right|^2 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona F dönüşümünün enerji yoğunluğu denir.

Tanım 1.4.2 *(Şahin 2012) (M_1,g_1) ve (M_2,g_2) Riemann manifoldları, D, M_1 manifoldunun bir kompakt tanım cümlesi ve*

$$F: M_1 \to M_2$$

bir dönüşüm olsun. Bu durumda,

$$E(F;D) = \int_D e(F)dV_g = \frac{1}{2}\int_D \left|F_*\right|^2 dV_g$$

ile tanımlı fonksiyona F dönüşümünün enerji integrali denir.

Tanım 1.4.3 *(Şahin 2012)* (M_1, g_1) *ve* (M_2, g_2) *Riemann manifoldları ve*

$$C^\infty(M_1, M_2) = \{F \mid F : M_1 \to M_2,\ F \text{ bir } C^\infty \text{ dönüşüm}\}$$

olsun. $F : M_1 \to M_2$ *dönüşümü, kompakt bir bölge üzerinde,*

$$E(.; D) : C^\infty(M_1, M_2) \to \mathbb{R}$$

ile tanımlanan enerji fonksiyonelinin kritik noktası ise F *dönüşümüne harmonik dönüşüm adı verilir.*

Tanım 1.4.4 *(Şahin 2012)* (M_1, g_1) *ve* (M_2, g_2) *iki Riemann manifoldu ve*

$$F : M_1 \to M_2$$

bir dönüşüm olsun. Bu durumda, M_1 *manifoldunun kompakt bir bölgesi* Ω *için,* F *dönüşümünün* Ω *üzerindeki bienerjisi,*

$$E_{2,\Omega}(F) = \frac{1}{2}\int_\Omega \|\tau(F)\|^2\, dV_g$$

ile tanımlanır. Eğer F *bienerji fonksiyonelinin kritik noktası ise* F *dönüşümüne biharmonik dönüşüm denir.*

Teorem 1.4.5 *(Caddeo vd 2006)* M *bir Riemann manifoldu ve*

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$$

bir biharmonik eğri olsun. Bu takdirde γ *eğrisi,*

$$\nabla^3_{\gamma'}\gamma' + R(\gamma', \nabla_{\gamma'}\gamma')\gamma' = 0 \tag{1.1}$$

denklemini sağlar. Burada,

$$\nabla^3_{\gamma'}\gamma' = \nabla_{\gamma'}\left(\nabla_{\gamma'}\left(\nabla_{\gamma'}\gamma'\right)\right)$$

dir.

1.5. Eğri Çiftleri

Bu kesimde, $\mathbb{E}^3$ ve $\mathbb{E}^n$ Öklid uzaylarındaki bir eğrinin sırasıyla evolütü, involütü, Bertrand ve Mannheim eğri çiftleri tanımlanacaktır. Bu bölümde verilen tanımlar, Turgut ve Esin (1992), Hacısalihoğlu (1993), Sabuncuoğlu (2006) ve Liu (2008) kaynaklarından alınmıştır.

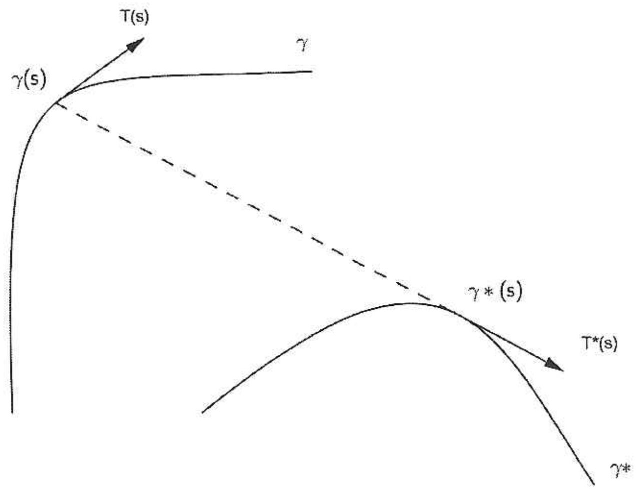
Tanım 1.5.1 *(Sabuncuoğlu 2006) Birim hızlı* $\gamma : I \to \mathbb{E}^3$ *eğrisi ile aynı aralıkta tanımlı,*

$$\gamma^* : I \to \mathbb{E}^3$$

eğrisi verilsin. Her bir $s \in I$ *için,* γ^* *eğrisinin* $\gamma^*(s)$ *noktasındaki teğeti* $\gamma(s)$ *noktasından geçiyorsa ve*

$$\langle T^*(s), T(s)\rangle = 0$$

ise γ^* *eğrisine* γ *eğrisinin bir evolütü denir (Şekil 1.1).*



Şekil 1.1. Evolüt eğri çifti

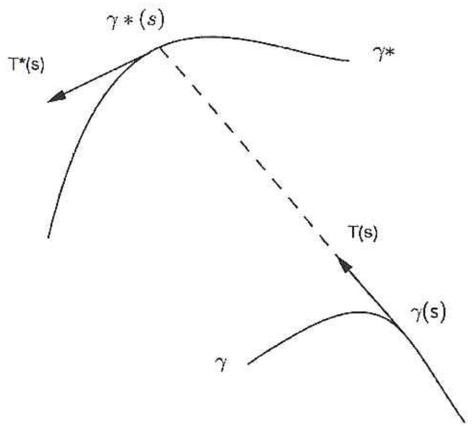
Tanım 1.5.2 *(Sabuncuoğlu 2006) Birim hızlı $\gamma : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi ile aynı aralıkta tanımlı,*

$$\gamma^* : I \to \mathbb{E}^3$$

eğrisi verilsin. Her bir $s \in I$ için, γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki teğeti $\gamma^*(s)$ noktasından geçiyorsa ve

$$\langle T^*(s), T(s) \rangle = 0$$

ise γ^* eğrisine γ eğrisinin bir involütü denir (Şekil 1.2).

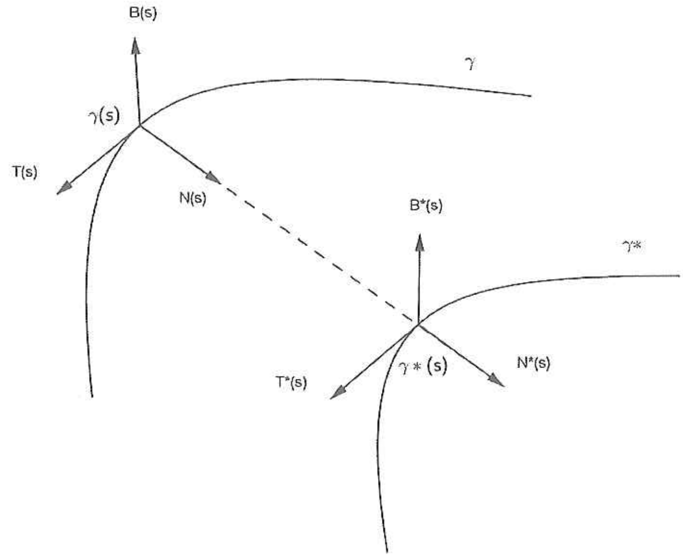


Şekil 1.2. İnvolüt eğri çifti

Tanım 1.5.3 *(Sabuncuoğlu 2006) Birim hızlı $\gamma : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi ile aynı aralıkta tanımlı,*

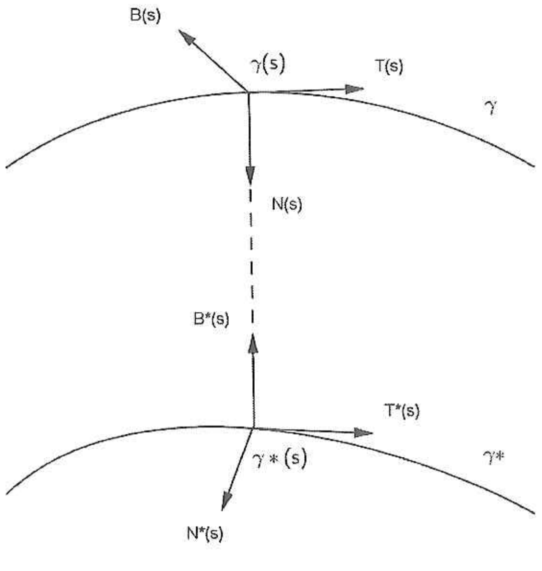
$$\gamma^* : I \to \mathbb{E}^3$$

eğrisi verilsin. Her bir $s \in I$ için, $\gamma^*(s)$ noktası ile $\gamma(s)$ noktasını birleştiren doğru, γ^* eğrisinin $\gamma^*(s)$ noktasındaki asli normalini ve γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki asli normalini kapsıyorsa, γ^* eğrisi γ eğrisiyle Bertrand eğri çifti oluşturuyor denir (Şekil 1.3).



Şekil 1.3. Bertrand eğri çifti

Tanım 1.5.4 *(Liu 2008) γ ve γ^*, $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında birim hızlı iki eğri olsun. Eğrilerin karşılık gelen noktalarında, γ eğrisinin asli normali ile γ^* eğrisinin binormali lineer bağımlı ise, γ ya Mannheim eğrisi, γ^* eğrisine γ eğrisinin Mannheim eğri çifti ve $\{\gamma, \gamma^*\}$ ikilisine de Mannheim çifti denir* (*Şekil* 1.4).



Şekil 1.4. Mannheim eğri çifti

Tanım 1.5.5 *(Turgut ve Esin 1992) $\gamma^* : I \subset \mathbb{E} \to \mathbb{E}^n$ eğrisi verilsin. Bu eğrinin Frenet çatısı $\{T = N_1^*, N_2^*, ..., N_n^*\}$ olmak üzere aşağıdaki şekilde verilen γ eğrisine, γ^* eğrisinin*

$k-$ıncı mertebeden involütü denir:

$$\gamma(s) = \gamma^*(s) + \sum_{i=1}^{k} \xi_i N_i^*, \ \xi_i = \xi_i(s), \ k < n-1.$$

Tanım 1.5.6 *(Turgut ve Esin 1992) $\gamma : I \subset \mathbb{E} \to \mathbb{E}^n$ eğrisi verilsin. Bu eğrinin Frenet çatısı $\{T = N_1, N_2, ..., N_n\}$ olsun. γ, $k-$ıncı mertebeden involüt eğrisi olmak üzere, aşağıdaki şekilde verilen γ^* eğrisine, γ eğrisinin $(n-k-1)-$inci mertebeden evolütü denir:*

$$\gamma^*(s) = \gamma(s) + \sum_{i=k+1}^{n} \xi_i N_i, \ \xi_i = \xi_i(s), \ k < n-1.$$

Tanım 1.5.7 *(Turgut ve Esin 1992) $\mathbb{E}^n$ de bir γ eğrisi verilsin. Eğer $(n-k-1)-$inci mertebeden bir γ^* evolüt eğrisi varsa, (γ, γ^*) eğri çifti, $(k, n-k-1)-$inci mertebeden bir involüt-evolüt eğri çifti olarak adlandırılır.*

Tanım 1.5.8 *(Hacısalihoğlu 1993) $\gamma, \gamma^* \subset \mathbb{E}^n$ eğrileri, sırasıyla, (I, γ) ve (I, γ^*) koordinat komşulukları ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\gamma(s) \in \gamma$ ve $\gamma^*(s) \in \gamma^*$ noktalarında γ ve γ^* eğrilerinin,*

$$\{T, N_1, ..., N_r\}, \{T^*, N_1^*, ..., N_r^*\}$$

Frenet $r-$ayaklıları verildiğinde, $\forall s \in I$ için,

$$\{N_1(s), N_1^*(s)\}$$

lineer bağımlı ise, (γ, γ^*) eğri ikilisine bir Bertrand eğri çifti denir.

Tanım 1.5.9 *$\gamma, \gamma^* \subset \mathbb{E}^n$ eğrileri, sırasıyla, (I, γ) ve (I, γ^*) koordinat komşulukları ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\gamma(s) \in \gamma$ ve $\gamma^*(s) \in \gamma^*$ noktalarında γ ve γ^* eğrilerinin,*

$$\{T, N_1, ..., N_r\}, \ \{T^*, N_1^*, ..., N_r^*\}$$

Frenet $r-$ayaklıları verildiğinde, $\forall s \in I$ için,

$$\{N_1(s), N_2^*(s)\}$$

lineer bağımlı ise, (γ, γ^*) eğri ikilisine bir Mannheim eğri çifti denir.

2. KURAMSAL BİLGİLER ve KAYNAK TARAMALARI

Klasik diferansiyel geometrinin temel konularından biri de eğriler teorisidir. Son yıllarda yapılan çalışmalarda, iki eğrinin karşılık gelen noktalarındaki Frenet çatıları arasında bağıntılar kurularak elde edilen eğri çiftlerine olan ilgi giderek artmıştır. Bu eğri çiftlerinden en iyi bilinenleri evolüt eğri çifti, involüt eğri çifti, Bertrand eğri çifti ve Mannheim eğri çiftidir.

Evolüt-involüt eğri çifti kavramı Huygens tarafından 1673 yılında "Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae" adlı çalışmasında verilmiştir. Bertrand eğrileri ise 1850 yılında Bertrand tarafından çalışılmıştır. Mannheim eğrisi ilk olarak Mannheim tarafından 1878 yılında tanımlanmıştır. Literatürde bu eğri çiftleri ile ilgili Öklid uzayında yapılmış olan pek çok çalışma mevcuttur (Görgülü ve Özdemir 1986, Özyılmaz ve Yılmaz 1992, Turgut ve Esin 1992, Matsuda ve Yorozu 2003, 2009, Cheng ve Lin 2009).

Öklid uzayında yapılan bu çalışmaların yanı sıra diğer uzaylarda da eğri çiftleri ele alınmıştır. Özel olarak, 3−boyutlu Heisenberg gruplarındaki biharmonik eğrilerin evolüt, involüt, Bertrand ve Mannheim eğri çiftleri çalışılmıştır (Körpınar ve Turhan 2011a, 2011b, 2011c, Turhan vd 2011). Son yıllarda, bu eğri çiftleri Lorentz ve dual Lorentz uzaylarında da incelenmiştir (örn. bkz. Bukcu ve Karacan 2007, 2009, Bilici ve Çalışkan 2009, Külahcı ve Ergüt 2009, Özkaldı vd 2011, Öztekin ve Ergüt 2011, Sato 2012, Şenyurt ve Bektaş 2012, Şenyurt ve Gür 2012, Öztürk vd 2013). 3−boyutlu uzay formlarında ise Bertrand ve Mannheim eğrileri ele alınmıştır (Choi vd 2012, 2013).

Bu tezin amacı, Fizik alanında önemli bir yere sahip olan Heisenberg gruplarını kapsayan Cartan-Vranceanu manifoldlarında bu eğri çiftlerini ele almaktır. Bu bölümde, 3−boyutlu ve $(2n+1)$−boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldları ve bu manifoldların üzerindeki biharmonik eğrilerin literatürde yer alan bazı sonuçları verilecektir.

2.1. 3−boyutlu Cartan-Vranceanu Manifoldları

Bu bölümde, 3−boyutlu Cartan-Vranceanu Manifoldlarının geometrik yapısı incelenmiştir. Bu kesimde verilen tanım ve hesaplamalarda, Caddeo ve arkadaşlarının (2006) çalışmasından yararlanılmıştır.

Tanım 2.1.1 *Cartan-Vranceanu metrik, eğer $m \geq 0$ ise $M = \mathbb{R}^3$ de, aksi halde*

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < -\frac{1}{m}\right\}$$

cümlesinde aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$ds^2_{l,m} = \frac{dx^2 + dy^2}{[1 + m(x^2 + y^2)]^2} + \left(dz + \frac{l}{2}\frac{ydx - xdy}{[1 + m(x^2 + y^2)]}\right)^2, \; l, m \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Burada M, 3−boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldu olarak adlandırılır.

Bu metrik, Bianchi (1928) nin çalışmasında ele alınmıştır. Daha sonraki yıllarda bu metrik Cartan (1951) ve Vranceanu (1947) nun çalışmalarında da ortaya çıkmıştır.

l ve m ye özel değerler verildiğinde, 3−boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldu aşağıdaki gibidir:

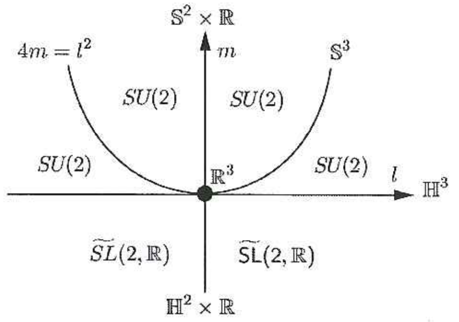
(i) Eğer $l = 0$ ise $(M, ds^2_{l,m})$ sabit $4m$ Gauss eğrilikli S yüzeyi ile reel $\mathbb{R}$ doğrusunun çarpımıdır.

(ii) Eğer $l^2 = 4m$ ise $(M, ds^2_{l,m})$ negatif olmayan sabit kesitsel eğriliğe sahiptir.

(iii) Eğer $l \neq 0$ ve $m > 0$ ise $(M, ds^2_{l,m})$ lokal olarak $SU(2)$ dir.

(iv) Eğer $l \neq 0$ ve $m < 0$ ise $(M, ds^2_{l,m})$ lokal olarak $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ dir.

(v) Eğer $l \neq 0$ ve $m = 0$ ise $(M, ds^2_{l,m})$ sol-invaryant metrik ile donatılmış $\mathbb{H}_3$ Heisenberg uzayıdır (Şekil 2.1).



Şekil 2.1. Cartan-Vranceanu metriğinin geometrik açıklaması

(2.1) ile verilen Cartan-Vranceanu metrik,

$$ds^2_{l,m} = \sum_{i=1}^{3} w^i \otimes w^i$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $F = 1 + m(x^2 + y^2)$ olmak üzere,

$$w^1 = \frac{dx}{F},\ w^2 = \frac{dy}{F},\ w^3 = dz + \frac{l}{2}\frac{ydx - xdy}{F}$$

1−formlardır.

(2.1) eşitliği ile verilen metrik için ortonormal vektör alanları aşağıdaki gibidir:

$$E_1 = F\frac{\partial}{\partial x} - \frac{ly}{2}\frac{\partial}{\partial z},\ E_2 = F\frac{\partial}{\partial y} + \frac{lx}{2}\frac{\partial}{\partial z},\ E_3 = \frac{\partial}{\partial z}. \tag{2.2}$$

Tanım (1.1.19) ile verilen Lie parantez operatörü tanımından

$$[E_1, E_1] = 0, [E_2, E_2] = 0, [E_3, E_3] = 0$$

olduğu açıktır.

(2.2) ile verilen ortonormal vektör alanlarının Lie parantez operatörü,

$$[E_1, E_2] = (-2myF)\frac{\partial}{\partial x} + (2mxF)\frac{\partial}{\partial y} + (Fl)\frac{\partial}{\partial z}, \ [E_1, E_3] = 0, \ [E_2, E_3] = 0$$

şeklindedir.

Aşağıda verilen Koszul formülünden,

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}\{\langle [X,Y], Z\rangle - \langle [Y,Z], X\rangle + \langle [Z,X], Y\rangle\} \tag{2.3}$$

yararlanılarak elde edilen Riemann konneksiyonu,

$$\begin{array}{rclrcl} \nabla_{E_1}E_1 &=& 2myE_2, & \nabla_{E_1}E_2 &=& -2myE_1 + \frac{l}{2}E_3, \\ \nabla_{E_2}E_2 &=& 2mxE_1, & \nabla_{E_2}E_1 &=& -2mxE_2 - \frac{l}{2}E_3, \\ \nabla_{E_3}E_3 &=& 0, & \nabla_{E_1}E_3 &=& \nabla_{E_3}E_1 = -\frac{l}{2}E_2, \\ \nabla_{E_2}E_3 &=& \nabla_{E_3}E_2 = \frac{l}{2}E_1 & & & \end{array} \tag{2.4}$$

şeklindedir.

(2.2) ile verilen ortonormal çatıya göre sıfırdan farklı Riemann-Christoffel eğrilik bileşenleri ve Ricci tensörü bileşenleri, sırasıyla,

$$\begin{array}{rclrcl} R(E_1, E_2, E_1, E_2) &=& 4m - \frac{3}{4}l^2, & R(E_1, E_3, E_1, E_3) &=& \frac{l^2}{4}, \\ R(E_2, E_3, E_2, E_3) &=& \frac{l^2}{4} & & & \end{array} \tag{2.5}$$

ve

$$Ric(E_1, E_1) = Ric(E_2, E_2) = -4m + \frac{l^2}{2}, \ Ric(E_3, E_3) = -\frac{l^2}{2}$$

şeklindedir.

2.2. 3−boyutlu Cartan-Vranceanu Manifoldlarında Biharmonik Eğriler

Bir biharmonik dönüşüm olan biharmonik eğriler şimdiye kadar çeşitli uzaylarda incelenmiş ve sınıflandırılmıştır. 3−boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldlarında da, l ve m nin bazı özel değerleri için biharmonik eğriler bir çok yazar tarafından çalışılmıştır:

(i) Eğer $l = m = 0$ ise $\left(M, ds^2_{l,m}\right)$, E^3 Öklid uzayıdır ve bir γ eğrisinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart bir doğru olmasıdır (Dimitric 1992).

(ii) Eğer $l^2 = 4m$ ve $l \neq 0$ ise $\left(M, ds^2_{l,m}\right)$, lokal olarak 3−boyutlu küredir. Bu küredeki jeodezik olmayan biharmonik eğriler sınıflandırılmıştır ve helis oldukları ispatlanmıştır (Caddeo vd 2001).

(iii) Eğer $l = 0$ ve $m < 0$ ise $(M, ds^2_{l,m})$, çarpım metriği ile $H^2 \times R$ ye izometriktir ve bütün biharmonik eğrilerin geodezik eğriler oldukları gösterilebilir.

(iv) Eğer $l \neq 0$ ve $m = 0$ ise $(M, ds^2_{l,m})$, sol-invaryant metrik ile donatılmış $\mathbb{H}_3$ Heisenberg uzayıdır ve bu uzaydaki biharmonik eğriler çalışılmıştır (Caddeo vd 2004).

(v) Eğer $l = 1$ durumunda, $(M, ds^2_{l,m})$ Cartan-Vranceanu manifoldundaki jeodezik olmayan biharmonik eğrilerin parametrik denklemleri verilmiştir (Cho vd 2007).

(vi) Eğer $l^2 \neq 4m$ ve $m \neq 0$ durumunda, $(M, ds^2_{l,m})$ Cartan-Vranceanu manifoldundaki jeodezik olmayan biharmonik eğrilerin karakterizasyonları verilmiştir (Caddeo vd 2006).

(M^n, g), $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to (M^n, g)$ yay parametreli bir eğri olsun. Bu eğrinin, γ boyunca Frenet çatısı $\{T, N_1, N_2, N_3, ..., N_n\}$ ile verilsin. Burada, $T = \gamma'$, γ nın birim tanjant vektör alanı, N_1, $\nabla_T T$ ile aynı yönde olan, γ nın birim normal vektör alanıdır. $\{N_2, N_3, ..., N_n\}$ birim vektörleri de aşağıdaki Frenet eşitliklerinden elde edilir:

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= k_1 N_1 \\ \nabla_T N_1 &= -k_1 T + k_2 N_2 \\ \nabla_T N_2 &= -k_2 N_1 + k_3 N_4 \\ &\vdots \\ \nabla_T N_n &= -k_{n-1} N_{n-1}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Burada $\{k_1, k_2, ..., k_{n-1}\}$, γ eğrisinin eğrilikleridir.

Teorem 2.2.1 *(Caddeo vd 2006) (M^n, g), $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu ve*

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \to (M^n, g)$$

$(n \geq 2)$ yay parametreli bir eğri olsun. Bu takdirde, γ biharmoniktir ancak ve ancak

$$\begin{aligned} k_1 k_1' &= 0, \\ k_1'' - k_1^3 - k_1 k_2^2 + k_1 R(T, N_1, T, N_1) &= 0, \\ 2k_1' k_2 + k_1 k_2' + k_1 R(T, N_1, T, N_2) &= 0, \\ k_1 k_2 k_3 + k_1 R(T, N_1, T, N_4) &= 0, \\ k_1 R(T, N_1, T, N_j) &= 0, \ 5 \leq j \leq n \end{aligned} \tag{2.7}$$

dir.

Kanıt (1.1) denkleminden yararlanılarak γ eğrisinin biharmonik eşitliği aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} \nabla_T^3 T + R(T, \nabla_T T)T &= (-3k_1 k_1')T + (k_1'' - k_1^3 - k_1 k_2^2)N_1 + (2k_1' k_2 + k_1 k_2')N_2 \\ &\quad + (k_1 k_2 k_3)N_4 + k_1 R(T, N)T \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sonuç 2.2.2 *(Caddeo vd 2006) $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to (M^n, g)$ $(n \geq 2)$ yay parametreli bir eğri olsun. Jeodezik olmayan biharmonik eğriler $(k_1 \neq 0)$ ele alındığında (2.7) eşitlikleri aşağıdaki şekli alır:*

$$\begin{aligned} k_1 &= sabit \neq 0, \\ k_1^2 + k_2^2 &= R(T, N_1, T, N_1), \\ k_2' &= -R(T, N_1, T, N_2), \\ k_2 k_3 &= -R(T, N_1, T, N_4), \\ R(T, N_1, T, N_j) &= 0, \; 5 \leq j \leq n. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Bu bölümün geri kalan kısmında kısalığın hatırına, 3−boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldunda tanımlanan, yay parametreli $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \left(M, ds^2_{l,m}\right)$ eğrisinin, (2.2) eşitliği ile verilen ortonormal baza göre Frenet çatısı

$$\left\{ T = \sum_{i=1}^{3} T_i E_i, N = \sum_{i=1}^{3} N_i E_i, B = \sum_{i=1}^{3} B_i E_i \right\}$$

eğrilik ve burulması da sırasıyla κ ve τ olarak alınacaktır.

Sonuç 2.2.3 *(Caddeo vd 2006) $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \left(M, ds^2_{l,m}\right)$, 3−boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldunda tanımlanan, yay parametreli bir eğri olsun. (2.8) eşitliklerinden ve (2.5) ile verilen Riemann-Christoffel eğrilik katsayılarından yararlanılarak, γ eğrisinin jeodezik olmayan bir biharmonik eğri olması için gerek ve yeter şartlar aşağıdaki eşitlikler ile verilmiştir:*

$$\begin{aligned} \kappa &= sabit \neq 0, \\ \kappa^2 + \tau^2 &= \frac{l^2}{4} - \left(l^2 - 4m\right) B_3^2, \\ \tau' &= \left(l^2 - 4m\right) N_3 B_3. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Burada, κ ve τ, γ eğrisinin eğrilikleridir.

Buradan itibaren, $l^2 \neq 4m$ ve $m \neq 0$ olarak kabul edilecektir.

Teorem 2.2.4 *(Caddeo vd 2006) Eğer $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \left(M, ds^2_{l,m}\right)$, 3−boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldunda tanımlanan, yay parametresi ile parametrelendirilmiş jeodezik olmayan bir biharmonik eğri ise bir helistir.*

Kanıt $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \left(M, ds^2_{l,m}\right)$ yay parametresi ile parametrelendirilmiş bir eğri olsun. (2.6) ile verilen Frenet eşitliklerinden,

$$ds^2_{l,m}(\nabla_T B, E_3) = -\tau N_3 \tag{2.10}$$

yazılabilir.

Tanım 1.2.1 ile verilen kovaryant türev tanımı yardımıyla da

$$\begin{aligned} \langle \nabla_T B, E_3 \rangle &= B_3' + \frac{l}{2}(T_1 B_2 - T_2 B_1) \\ &= B_3' - \frac{l}{2} N_3 \end{aligned} \tag{2.11}$$

bulunur.

(2.10) ve (2.11) eşitlikleri karşılaştırılırsa,

$$-\tau N_3 = B_3' - \frac{l}{2} N_3 \tag{2.12}$$

elde edilir.

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \to (M, ds^2_{l,m})$ eğrisinin, jeodezik olmayan bir biharmonik eğri olduğu kabul edilsin. Bu takdirde, $B_3 \neq 0$ dır. Aksi halde,

$$N_3 \left(\tau - \frac{l}{2} \right) = 0 \tag{2.13}$$

olurdu.

(2.13) eşitliğinde iki durum söz konusudur:

(i) Eğer $N_3 = 0$ $(B_3 = 0)$ ise $T = \pm E_3$ ve γ eğrisi jeodezik olur.

(ii) Eğer $\left(\tau - \frac{l}{2}\right) = 0$ ise (2.9) in ikinci eşitliği kullanılırsa, $\kappa = 0$ elde edilir. γ eğrisi yine bir jeodezik eğri olur.

O halde $B_3 \neq 0$ dır.

Diğer yandan, (2.9) ın ikinci eşitliğinin türevi aşağıdaki şekildedir:

$$\tau \tau' = -\left(l^2 - 4m\right) B_3 B_3'. \tag{2.14}$$

Elde edilen (2.14), (2.9) un üçüncü eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\left(l^2 - 4m\right) B_3 \left(\tau N_3 + B_3'\right) = 0$$

elde edilir. Böylece,

$$\tau N_3 = -B_3' \tag{2.15}$$

sonucuna ulaşılır. (2.12) ve (2.15) eşitlikleri birlikte değerlendirildiğinde,

$$N_3 \frac{l}{2} = 0$$

elde edilir. Buradan $l \neq 0$ olduğundan, $N_3 = 0$ elde edilir.

O halde, (2.9) in üçüncü eşitliğinden $\tau = sabit$ bulunur. Sonuç olarak, κ ve τ eğrilikleri sabit olduğundan, γ eğrisi bir helistir.

Sonuç 2.2.5 *(Caddeo vd 2006)* $\gamma : I \to (M, ds^2_{l,m})$, *3−boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldunda tanımlanan, yay parametreli bir eğri olsun. Bu takdirde* γ *jeodezik olmayan biharmonik eğridir ancak ve ancak*

$$\begin{aligned} \kappa &= sabit \neq 0, \\ \tau &= sabit, \\ N_3 &= 0, \\ \kappa^2 + \tau^2 &= \frac{l^2}{4} - \left(l^2 - 4m\right) B_3^2 \end{aligned} \tag{2.16}$$

dir.

Önteorem 2.2.6 *(Caddeo vd 2006)* $\gamma : I \to (M, ds^2_{l,m})$, *3−boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldunda tanımlanan, jeodezik olmayan ve yay parametresi ile verilmiş bir eğri olsun. Eğer* $N_3 = 0$ *ise,*

$$T(s) = \sin\alpha_0 \cos\beta(s) E_1 + \sin\alpha_0 \sin\beta(s) E_2 + \cos\alpha_0 E_3 \tag{2.17}$$

dir. Burada $\alpha_0 \in (0, \pi)$ *dir.*

Kanıt Eğer $\gamma' = T = T_1E_1 + T_2E_2 + T_3E_3$ ise, (2.4) eşitlikleri yardımıyla,

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= \left(T_1' - 2myT_1T_2 + 2mxT_2^2 + lT_2T_3\right) E_1 \\ &\quad + \left(T_2' + 2myT_1^2 - lT_1T_3 - 2mxT_1T_2\right) E_2 + \left(T_3'\right) E_3 \\ &= \kappa N \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan söylenebilir ki, $N_3 = 0$ dır ancak ve ancak $T_3' = 0$ dır, yani T_3 sabittir. $T_3 \in (-1, 1)$ ve T nin normu 1 olduğundan, bir $\alpha_0 \in (0, \pi)$ sabiti ve bir tek diferansiyellenebilir β ($2k\pi$ toplamsal sabitine göre) fonksiyonu vardır öyle ki,

$$T(s) = \sin\alpha_0 \cos\beta(s) E_1 + \sin\alpha_0 \sin\beta(s) E_2 + \cos\alpha_0 E_3$$

olur.

Teorem 2.2.7 *(Caddeo vd 2006)* $(M, ds^2_{l,m})$ *ile* $l^2 \neq 4m$ *ve* $m \neq 0$ *şeklindeki Cartan Vranceanu manifoldları gösterilsin.* $\delta = l^2 + (16m - l^2)\sin^2\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_0 \in (0, \pi)$ *ve* $2w_{1,2} = -l\cos\alpha_0 \pm \sqrt{\delta}$ *olsun. Bu takdirde,* $(M, ds^2_{l,m})$ *deki jeodezik olmayan biharmonik eğrilerin parametrik eşitlikleri aşağıdaki gibidir:*

I. ***Çeşit*** *Eğer* $\beta \neq sabit$ *ise,*

$$\begin{aligned} x(s) &= b\sin\alpha_0 \sin\beta(s) + c, \; b, c \in \mathbb{R}, b > 0, \\ y(s) &= -b\sin\alpha_0 \cos\beta(s) + d, \; d \in \mathbb{R}, \\ z(s) &= \frac{l}{4m}\beta(s) + \frac{1}{4m}\left[\left(4m - l^2\right)\cos\alpha_0 - lw_{1,2}\right] s. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Burada, β *aşağıdaki diferansiyel denklemin sabit olmayan bir çözümüdür:*

$$\beta' + 2md\sin\alpha_0\cos\beta - 2mc\sin\alpha_0\sin\beta = l\cos\alpha_0 + 2mb\sin^2\alpha_0 + w_{1,2}$$

ve integral sabitleri aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$c^2 + d^2 = \frac{b}{m}\left\{(l\cos\alpha_0 + w_{1,2} - \frac{1}{b}) + mb\sin^2\alpha_0\right\}.$$

II. Çeşit *Eğer* $\beta = \beta_0 =$ *sabit ve* $\cos\beta_0 \sin\beta_0 \neq 0$ *ise parametrik eşitlikler,*

$$\begin{aligned} x(s) &= x(s), \\ y(s) &= x(s)\tan\beta_0 + a, \\ z(s) &= \frac{1}{4m}\left[(4m - l^2)\cos\alpha_0 - lw_{1,2}\right]s + b,\ b \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.19}$$

şeklindedir. Burada,

$$a = \frac{w_{1,2} + l\cos\alpha_0}{2m\sin\alpha_0\cos\beta_0}$$

ve $x(s)$ *aşağıdaki diferansiyel denklemin bir çözümüdür:*

$$x' = (1 + m[x^2 + (x\tan\beta_0 + a)^2])\sin\alpha_0\cos\beta_0.$$

III. Çeşit *Eğer* $\cos\beta_0\sin\beta_0 = 0$ *ve,* x *ile* y *nin değişimine bağlı olarak,* $\cos\beta_0 = 0$ *ise parametrik eşitlikler,*

$$\begin{aligned} x(s) &= x_0 = sabit, \\ y(s) &= y(s), \\ z(s) &= \frac{1}{4m}\left[(4m - l^2)\cos\alpha_0 - lw_{1,2}\right]s + b,\ b \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.20}$$

şeklindedir. Burada,

$$x_0 = \pm\frac{w_{1,2} + l\cos\alpha_0}{2m\sin\alpha_0}$$

ve $y(s)$ *aşağıdaki diferansiyel denklemin bir çözümüdür:*

$$y' = \pm(1 + m[x_0^2 + y^2])\sin\alpha_0.$$

Kanıt $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ eğrisi yay parametresi ile verilmiş bir eğri olsun. (2.6) ile verilen Frenet eşitlikleri, Sonuç 2.2.5 ve Lemma 2.2.6 ile birlikte göz önüne alındığında (2.17) ile verilen T teğet vektörünün kovaryant türevi,

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= \begin{pmatrix} -\beta'\sin\alpha_0\sin\beta - 2my\sin^2\alpha_0\cos\beta\sin\beta \\ +2mx\sin^2\alpha_0\sin^2\beta + l\sin\alpha_0\cos\alpha_0\sin\beta \end{pmatrix} E_1 \\ &+ \begin{pmatrix} \beta'\sin\alpha_0\cos\beta + 2my\sin^2\alpha_0\cos^2\beta \\ -l\sin\alpha_0\cos\alpha_0\cos\beta - 2mx\sin^2\alpha_0\cos\beta\sin\beta \end{pmatrix} E_2 \\ &= \kappa N \end{aligned}$$

olur. Burada,

$$\kappa = |\beta' + 2my\sin\alpha_0\cos\beta - 2mx\sin\alpha_0\sin\beta - l\cos\alpha_0|\sin\alpha_0$$

dır.

Kabul edilsin ki,

$$w = \beta' + 2my \sin\alpha_0 \cos\beta - 2mx \sin\alpha_0 \sin\beta - l\cos\alpha_0 > 0 \tag{2.21}$$

olsun. Bu takdirde,

$$\kappa = w \sin\alpha_0 \tag{2.22}$$

ve

$$N = -\sin\beta E_1 + \cos\beta E_2 \tag{2.23}$$

olur. Diğer yandan,

$$B = T \times N = -\cos\alpha_0 \cos\beta E_1 - \cos\alpha_0 \sin\beta E_2 + \sin\alpha_0 E_3 \tag{2.24}$$

ve

$$\begin{aligned} \nabla_T B &= \begin{pmatrix} \beta' \cos\alpha_0 \sin\beta + 2my \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 \cos\beta \sin\beta - \frac{l}{2}\cos^2\alpha_0 \sin\beta \\ +\frac{l}{2}\sin^2\alpha_0 \sin\beta - 2mx \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 \sin^2\beta \end{pmatrix} E_1 \\ &+ \begin{pmatrix} -\beta' \cos\alpha_0 \cos\beta - 2my \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 \cos^2\beta - \frac{l}{2}\sin^2\alpha_0 \cos\beta \\ +\frac{l}{2}\cos^2\alpha_0 \cos\beta + 2mx \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 \cos\beta \sin\beta \end{pmatrix} E_2 \end{aligned}$$

dir. Buradan γ eğrisinin τ burulmasının,

$$\tau = -w\cos\alpha_0 - \frac{l}{2} \tag{2.25}$$

olduğu söylenebilir.

$\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ eğrisinin açık ifadesini bulmak için $\dfrac{d\gamma}{ds} = T$ ifadesinin integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{x'}{1+m(x^2+y^2)} &= \sin\alpha_0 \cos\beta, \\ \frac{y'}{1+m(x^2+y^2)} &= \sin\alpha_0 \sin\beta, \\ z' &= \cos\alpha_0 + \frac{l}{2}\sin\alpha_0 (x\sin\beta - y\cos\beta) \end{aligned} \tag{2.26}$$

elde edilir.

I. Çeşit parametrizasyonu elde etmek için $\beta' \neq 0$ kabul edilsin. (2.22) eşitliğinin türevi alınıp (2.26) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\beta'' = \beta' \frac{2mxx' + 2myy'}{1+m(x^2+y^2)} \tag{2.27}$$

elde edilir. (2.27) eşitliğinin integrali alınırsa,

$$1 + m(x^2+y^2) = b\beta',\ b > 0 \tag{2.28}$$

bulunur. (2.28) eşitliği (2.26) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} x(s) &= b\sin\alpha_0 \sin\beta(s) + c, \\ y(s) &= -b\sin\alpha_0\cos\beta(s) + d, \\ z(s) &= \left(\cos\alpha_0 + \frac{lb}{2}\sin^2\alpha_0\right)s + \frac{l}{2}\int (c\sin\alpha_0\sin\beta(s) - d\sin\alpha_0\cos\beta(s))dt \end{aligned} \tag{2.29}$$

elde edilir.

β yı belirlemek için κ, B_3 ve τ nun sırasıyla, (2.22),(2.24) ve (2.25) eşitlikleriyle verilen değerleri, (2.16) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$w^2 + wl\cos\alpha_0 + (l^2 - 4m)\sin^2\alpha_0 = 0 \tag{2.30}$$

elde edilir.

$\delta = l^2 + (16m - l^2)\sin^2\alpha_0 \geq 0$ ve $\alpha_0 \in (0, \pi)$ olduğu kabul edilsin. Bu takdirde (2.30) ün çözümleri,

$$w_{1,2} = \frac{-l\cos\alpha_0 \pm \sqrt{\delta}}{2}$$

şeklindedir ve daima sıfırdan farklıdır. w pozitif bir sabit olarak seçildiğinden (2.30) un pozitif kökleri seçilmelidir. Dikkat edilirse, eğer w negatif olsaydı, (2.30) eşitliğinin aynısı elde edilirdi. Dolayısıyla, (2.30) un her iki çözümü de tutulur.

(2.29) eşitliğiyle verilen x ve y değerleri, (2.21) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\beta' - 2m(c\sin\alpha_0\sin\beta - d\sin\alpha_0\cos\beta) = l\cos\alpha_0 + 2mb\sin^2\alpha_0 + w_{1,2} \tag{2.31}$$

elde edilir.

Son olarak, (2.31) eşitliğinin integrali alınıp, (2.29) deki z değerine yazılırsa, (2.18) ile verilen üçüncü eşitlik sağlanır.

II. ve III. Çeşit de benzer şekilde elde edilebilir.

2.3. $(2n+1)-$boyutlu Cartan-Vranceanu Manifoldları

Bu bölümde, $(2n+1)-$boyutlu Cartan-Vranceanu Manifoldlarının geometrik yapısı incelenmiştir. Bu kesimde, Fetcu'nun (2007) çalışmasından yararlanılmıştır.

Tanım 2.3.1 *Cartan-Vranceanu metrik, $l, m \in \mathbb{R}$ olmak üzere, eğer $m \geq 0$ ise*

$$M = \mathbb{R}^{2n+1}$$

uzayında, aksi halde

$$M = \left\{(x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_n, y_n, z) \in \mathbb{R}^{2n+1} : x_i^2 + y_i^2 < -\frac{1}{m}, i = \overline{1,n}\right\}$$

cümlesinde aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$ds_{l,m}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{dx_i^2 + dy_i^2}{[1 + m(x_i^2 + y_i^2)]^2} + \left(dz + \frac{l}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i dx_i - x_i dy_i}{[1 + m(x_i^2 + y_i^2)]} \right)^2. \qquad (2.32)$$

Burada M, $(2n+1)-$boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldu olarak adlandırılır.

(2.32) ile verilen Cartan-Vranceanu metrik,

$$ds_{l,m}^2 = \sum_{i=1}^{2n+1} w^i \otimes w^i$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $F_i = 1 + m(x_i^2 + y_i^2)$ ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere,

$$w^{2i-1} = \frac{dx_i}{F_i}, \; w^{2i} = \frac{dy_i}{F_i}, \; w^{2n+1} = dz + \frac{l}{2} \frac{y_i dx_i - x_i dy_i}{F_i}$$

$1-$formlardır.

(2.32) eşitliği ile verilen metrik için ortonormal vektör alanları $1 \leq i \leq n$ için aşağıdaki gibidir:

$$E_{2i-1} = F_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{l y_i}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \; E_{2i} = F_i \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{l x_i}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \; E_{2n+1} = \frac{\partial}{\partial z}. \qquad (2.33)$$

(2.33) ile verilen ortonormal vektör alanlarının Lie parantez operatörü,

$$\begin{aligned} [E_{2i-1}, E_{2j-1}] &= 0, \quad [E_{2i}, E_{2j}] = 0, \\ [E_{2i-1}, E_{2n+1}] &= 0, \quad [E_{2i}, E_{2n+1}] = 0, \\ [E_{2i-1}, E_{2j}] &= \delta_{ij} \left(2m x_i E_{2i} - 2m y_i E_{2i-1} + l E_{2n+1} \right). \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada $1 \leq i, j \leq n$ dir.

(2.3) ile verilen Koszul formülünden yararlanılarak elde edilen Riemann konneksiyonu $1 \leq i, j \leq n$ için aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \nabla_{E_{2i-1}} E_{2j-1} &= 2\delta_{ij} m y_i E_{2i}, & \nabla_{E_{2i-1}} E_{2j} &= \delta_{ij} \left(-2m y_i E_{2i-1} + \tfrac{l}{2} E_{2n+1} \right), \\ \nabla_{E_{2i}} E_{2j} &= 2\delta_{ij} m x_i E_{2i-1}, & \nabla_{E_{2i}} E_{2j-1} &= \delta_{ij} \left(-2m x_i E_{2i-1} - \tfrac{l}{2} E_{2n+1} \right), \\ \nabla_{E_{2n+1}} E_{2i-1} &= -\tfrac{l}{2} E_{2i}, & \nabla_{E_{2i-1}} E_{2n+1} &= -\tfrac{l}{2} E_{2i}, \\ \nabla_{E_{2n+1}} E_{2i} &= \tfrac{l}{2} E_{2i-1}, & \nabla_{E_{2i}} E_{2n+1} &= \tfrac{l}{2} E_{2i-1}, \\ \nabla_{E_{2n+1}} E_{2n+1} &= 0. \end{aligned}$$

Bu kısımda, Riemann eğrilik tensörü ve Riemann-Christoffel eğrilik tensörü için sırasıyla, aşağıdaki notasyonlar kullanılmıştır:

$$R(E_a, E_b) E_c = R_{abc}, \; R(E_a, E_b, E_c, E_d) = R_{abcd}.$$

Burada, $1 \leq a, b, c, d \leq 2n+1$ dir.

Riemann eğrilik tensörünün ve Riemann-Christoffel eğrilik tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri sırasıyla, $1 \leq i, j, k \leq n$ için aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
R_{(2i-1)(2j-1)(2k)} &= -\tfrac{l^2}{4}\delta_{jk}E_{2i} + \tfrac{l^2}{4}\delta_{ik}E_{2j}, \\
R_{(2i-1)(2j)(2j-1)} &= \tfrac{l^2}{4}E_{2i},\ i \neq j, \\
R_{(2i-1)(2i)(2k-1)} &= \delta_{ik}\left(\tfrac{l^2}{4} - 4m\right)E_{2i} + \tfrac{l^2}{2}E_{2k}, \\
R_{(2i-1)(2j)(2i)} &= -\tfrac{l^2}{4}E_{2j-1},\ i \neq j, \\
R_{(2i-1)(2i)(2k)} &= -\delta_{ik}\left(\tfrac{l^2}{4} - 4m\right)E_{2i-1} - \tfrac{l^2}{2}E_{2k-1}, \\
R_{(2i-1)(2n+1)(2i-1)} &= -\tfrac{l^2}{4}E_{2n+1}, \\
R_{(2i-1)(2n+1)(2n+1)} &= \tfrac{l^2}{4}E_{2i-1}, \\
R_{(2i)(2j)(2k-1)} &= -\tfrac{l^2}{4}\delta_{jk}E_{2i-1} + \tfrac{l^2}{4}\delta_{ik}E_{2j-1}, \\
R_{(2i)(2n+1)(2i)} &= -\tfrac{l^2}{4}E_{2n+1}, \\
R_{(2i)(2n+1)(2n+1)} &= \tfrac{l^2}{4}E_{2i}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
R_{(2i-1)(2j-1)(2i)(2j)} &= -\tfrac{l^2}{4},\ i \neq j, \\
R_{(2i-1)(2j)(2j-1)(2i)} &= -\tfrac{l^2}{4},\ i \neq j, \\
R_{(2i)(2i-1)(2i-1)(2i)} &= \tfrac{3l^2}{4} - 4m, \\
R_{(2i)(2i-1)(2j-1)(2j)} &= \tfrac{l^2}{2},\ i \neq j, \\
R_{(2n+1)(2i-1)(2i-1)(2n+1)} &= -\tfrac{l^2}{4}, \\
R_{(2n+1)(2i)(2i)(2n+1)} &= -\tfrac{l^2}{4}
\end{aligned}$$

dir.

2.4. $(2n+1)-$boyutlu Cartan-Vranceanu Manifoldlarında Biharmonik Eğriler

Biharmonik eğriler, $(2n+1)-$boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldlarında da ele alınmıştır. Örneğin, $l \neq 0$ ve $m = 0$ olması durumunda $\left(M, ds^2_{l,m}\right)$ Cartan-Vranceanu manifoldu sol-invaryant metrik ile donatılmış $\mathbb{H}_{2n+1}$ Heisenberg uzayıdır ve bu uzaydaki biharmonik eğriler Fetcu (2005) tarafından ele alınmıştır. $(2n+1)-$boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki biharmonik eğriler de Fetcu (2007) tarafından incelemiştir. Bu bölümde, Fetcu'nun (2007) çalışmasından yararlanılmıştır.

Teorem 2.4.1 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to (M, ds^2_{l,m})$, *$(2n+1)-$boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldunda tanımlanan, yay parametreli bir eğri olsun. Bu takdirde, γ jeodezik olmayan biharmonik eğridir ancak ve ancak*

$$\begin{aligned}
k_1 &\in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \\
k_1 + k_2 &= -\eta_1, \\
k_2 &= \eta_2, \\
k_2 k_3 &= \eta_3, \\
\eta_k &= 0,\ 4 \leq k \leq 2n
\end{aligned} \tag{2.34}$$

dır. Burada η_k, $1 \leq k \leq 2n$ *için aşağıdaki gibidir:*

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= -R(T, N_1, T, N_1) \\
&= -4m \textstyle\sum_{i=1}^{n} (T_{2i\text{-}1} N_1^{2i} - T_{2i} N_1^{2i\text{-}1})^2 + \frac{3l^2}{4} \left[\sum_{i=1}^{n} (T_{2i} N_1^{2i\text{-}1} - T_{2i\text{-}1} N_1^{2i})\right]^2 \\
&\quad - \tfrac{l^2}{4} \left(T_{2n+1}^2 + (N_1^{2n+1})^2\right)
\end{aligned}$$

ve $2 \leq k \leq 2n$ *için,*

$$\begin{aligned}
\eta_k &= -R(T, N_1, T, N_k) \\
&= -4m \textstyle\sum_{i=1}^{n} (T_{2i\text{-}1} N_1^{2i} - T_{2i} N_1^{2i\text{-}1})(T_{2i\text{-}1} N_k^{2i} - T_{2i} N_k^{2i\text{-}1}) \\
&\quad + \tfrac{3l^2}{4} \textstyle\sum_{i=1}^{n} (T_{2i} N_1^{2i\text{-}1} - T_{2i\text{-}1} N_1^{2i}) \sum_{i=1}^{n} (T_{2i} N_k^{2i\text{-}1} - T_{2i\text{-}1} N_k^{2i}) - \frac{l^2}{4} N_1^{2n+1} N_k^{2n+1}
\end{aligned}$$

dir. Burada, $T = \sum\limits_{a=1}^{2n+1} T_a E_a$ *ve* $N_k = \sum\limits_{a=1}^{2n+1} N_k^a E_a$ *dır.*

Sonuç 2.4.2 *Eğer* $l = 0$ *ve* $m \leq 0$ *ise* $(M, ds_{l,m}^2)$, $(2n+1)-$*boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldundaki tüm biharmonik eğriler jeodeziktir.*

Önteorem 2.4.3 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to (M, ds_{l,m}^2)$, $(2n+1)-$*boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldunda tanımlanan, yay uzunluğu ile parametrize edilen jeodezik olmayan biharmonik bir eğri olsun. Eğer* $N_1^{2n+1} = 0$ *ise,*

$$T = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\sin \alpha_0 \cos \beta_i}{\sqrt{n}} E_{2i-1} + \frac{\sin \alpha_0 \sin \beta_i}{\sqrt{n}} E_{2i} \right] + \cos \alpha_0 E_{2n+1} \tag{2.35}$$

dir. Burada $1 \leq i \leq n$, β_i *ler diferansiyellenebilir fonksiyonlar ve* $\alpha_0 \in (0, \pi)$ *dır.*

Önerme 2.4.4 $(M, ds_{l,m}^2)$, $(2n+1)-$*boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldu olsun öyle ki* $m > 0$ *ve* $\dfrac{4m}{n} - l^2 \neq 0$ *dır.* $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to (M, ds_{l,m}^2)$,

$$\gamma(s) = (x_1(s), y_1(s), x_2(s), y_2(s), ..., x_n(s), y_n(s), z(s)),$$

yay parametresi ile verilmiş bir eğri ve aşağıdaki şekilde parametrelendirilmiş olsun:

$$\begin{aligned}
x_i(s) &= \frac{b \sin \beta_i(s) \sin \alpha_0}{\sqrt{n}}, \\
y_i(s) &= -\frac{b \cos \beta_i(s) \sin \alpha_0}{\sqrt{n}}, \quad i = \overline{1, n}, \\
z(s) &= (\cos \alpha_0)\, s + \frac{lb}{2n} \left(\sin^2 \alpha_0\right) s.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Burada, $\alpha_0 \in (0, \pi)$, β_i *ler* (2.40) *eşitliğiyle, b katsayısı* (2.42) *ile verilmiş ve*

$$l^2 + \left(\frac{16m}{n} - 5l^2\right) \sin^2 \alpha_0 \geq 0$$

olsun. Bu takdirde, γ *jeodezik olmayan biharmonik eğridir.*

Kanıt (2.35) ile verilen $T = \sum\limits_{a=1}^{2n+1} T_a E_a$ teğet vektör alanının kovaryant türevi,

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= \sum_{i=1}^{n} [\left(T'_{2i-1} - 2my_i T_{2i} T_{2i-1} + 2mx_i T_{2i}^2 + l T_{2i} T_{2n+1}\right) E_{2i-1} \\ &\quad + \left(T'_{2i} - 2mx_i T_{2i} T_{2i-1} + 2my_i T_{2i-1}^2 - l T_{2i-1} T_{2n+1}\right) E_{2i}] + T'_{2n+1} E_{2n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \tfrac{\sin\alpha_0}{\sqrt{n}} \left(-A_i \sin\beta_i E_{2i-1} + A_i \cos\beta_i E_{2i}\right) \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada,

$$A_i = \beta'_i - 2mx_i \frac{\sin\beta_i \sin\alpha_0}{\sqrt{n}} + 2my_i \frac{\cos\beta_i \sin\alpha_0}{\sqrt{n}} - l\cos\alpha_0$$

dir.

$1 \leq i \leq n$ için $A_i = A$ (tüm indisler için A_i değerleri aynı) olduğu kabul edilsin. (2.6) ile verilen birinci Frenet eşitliğinden k_1 aşağıdaki şekildedir:

$$k_1 = \left\|\nabla_T T\right\| = \left|A \sin\alpha_0\right|.$$

$A\sin\alpha_0 > 0$ olduğu kabul edilsin. Bu takdirde,

$$k_1 = A\sin\alpha_0 \tag{2.37}$$

ve

$$N_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} (-\sin\beta_i E_{2i-1} + \cos\beta_i E_{2i})$$

olur.

$\gamma(s) = (x_1(s), y_1(s), x_2(s), y_2(s), ..., x_n(s), y_n(s), z(s))$ eğrisinin açık ifadesini bulmak için $\dfrac{d\gamma}{ds} = T$ ifadesinin integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{x'_i}{1 + m(x_i^2 + y_i^2)} &= \frac{\cos\beta_i \sin\alpha_0}{\sqrt{n}}, \\ \frac{y'_i}{1 + m(x_i^2 + y_i^2)} &= \frac{\sin\beta_i \sin\alpha_0}{\sqrt{n}}, \; i = \overline{1, n}, \\ z' &= \cos\alpha_0 + \frac{l}{2} \frac{\sin\alpha_0}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (x_i \sin\beta_i - y_i \cos\beta_i) \end{aligned}$$

olur.

$1 \leq i \leq n$ için $\beta'_i \neq 0$ olduğu kabul edilsin. (2.37) eşitliğinin türevi alınıp, k_1 in de sabit olması gerektiği göz önünde bulundurulursa,

$$\beta''_i = \frac{2mx_i x'_i + 2my_i y'_i}{1 + m(x_i^2 + y_i^2)} \beta'_i \tag{2.38}$$

elde edilir.

(2.38) eşitliğinin integrali alınırsa,

$$b_i\beta_i' = 1 + m(x_i^2 + y_i^2),\ 1 \leq i \leq n$$

elde edilir. Burada b_i ler sabitlerdir. Eğer i den bağımsız olarak $b_i = b$ alınırsa,

$$x_i(s) = \frac{b \sin \beta_i(s) \sin \alpha_0}{\sqrt{n}},$$
$$y_i(s) = -\frac{b \cos \beta_i(s) \sin \alpha_0}{\sqrt{n}},\ 1 \leq i \leq n,$$
$$z(s) = (\cos \alpha_0)s + \frac{lb}{2n}(\sin^2 \alpha_0)s$$

elde edilir.

k_1 in sabit olduğu ve A_i terimlerinin, i den bağımsız olduğu kullanılırsa, β_i' nün tüm indisler için aynı sabit değere sahip olduğu görülür. Yani,

$$\beta_i' = \frac{1 + m(x_i^2 + y_i^2)}{b} = \frac{n + mb^2 \sin^2 \alpha_0}{bn},\ 1 \leq i \leq n \tag{2.39}$$

olur. (2.39) eşitliğinin integrali alınırsa,

$$\beta_i = \frac{n + mb^2 \sin^2 \alpha_0}{bn} s + d_i \tag{2.40}$$

elde edilir. Burada, d_i ler sabitlerdir.

k_1, T ve N nin ifadelerinden yararlanılarak,

$$\nabla_T N_1 + k_1 T = \sum_{i=1}^{n} \frac{B \cos \alpha_0}{\sqrt{n}} (\cos \beta_i E_{2i-1} + \sin \beta_i E_{2i})$$
$$+ (\frac{l}{2} \sin \alpha_0 + A \sin \alpha_0 \cos \alpha_0) E_{2n+1}$$

elde edilir. Burada,

$$B = \left(-\frac{1}{b} + \frac{mb}{n} \sin^2 \alpha_0 + l \cos \alpha_0\right) \cos \alpha_0 - \frac{l}{2} = -A \cos \alpha_0 - \frac{l}{2}$$

dir.

(2.6) ile verilen ikinci Frenet eşitliğinden yararlanılarak,

$$k_2 = \|\nabla_T N_1 + k_1 T\|^2 = B^2 \cos^2 \alpha_0 + \left(\frac{l}{2} \sin \alpha_0 + A \sin \alpha_0 \cos \alpha_0\right)^2$$

yazılabilir. Buradan, k_2 nin sabit olduğu sonucu çıkar. $-\eta_1 = \left(\frac{4m}{n} - l^2\right) \sin^2 \alpha_0 + \frac{l^2}{4}$ ve $\eta_k = 0$, $k \geqslant 2$ olduğundan, γ eğrisi biharmonik eğridir ancak ve ancak (2.34) ile verilen 2. ve 4. eşitlikler gerçeklenir.

(2.34) ile verilen ikinci eşitlikten,

$$A^2 + Al\cos\alpha_0 - \left(\frac{4m}{n} - l^2\right)\sin^2\alpha_0 = 0 \tag{2.41}$$

elde edilir.

$m > 0$ olduğu kabul edilsin. Eğer $l^2 + (\frac{16m}{n} - 5l^2)\sin^2\alpha_0 > 0$ ise, (2.41) eşitliği çözüldüğünde,

$$A = \frac{-l\cos\alpha_0 \pm \sqrt{l^2 + (\frac{16m}{n} - 5l^2)\sin^2\alpha_0}}{2}$$

ve

$$b = \frac{-\left(nl\cos\alpha_0 \pm \sqrt{l^2 + (\frac{16m}{n} - 5l^2)\sin^2\alpha_0}\right)}{4m\sin^2\alpha_0} \pm \frac{\sqrt{\left(nl\cos\alpha_0 + \sqrt{l^2 + (\frac{16m}{n} - 5l^2)\sin^2\alpha_0}\right)^2 + 16nm\sin^2\alpha_0}}{4m\sin^2\alpha_0} \tag{2.42}$$

elde edilir.

$k_1 \neq 0$ olduğundan $A \neq 0$ dır. Böylece, $\frac{4m}{n} - l^2 \neq 0$ dır.

b için bulunan değerler için, (2.6) ile verilen üçüncü Frenet eşitliğinden, $k_3 = 0$ sonucu çıkar. Böylece, (2.34) ile verilen 4. eşitlik de gerçeklenir.

3. 3–BOYUTLU CARTAN-VRANCEANU MANİFOLDLARINDAKİ BİHARMONİK EĞRİLERİN EĞRİ ÇİFTLERİNİN PARAMETRİK DENKLEMLERİ

Bu bölümde, 3–boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki jeodezik olmayan biharmonik eğrilerin eğri çiftlerinin parametrik denklemleri verilmiştir. Dört alt başlık altında sırasıyla, evolüt, involüt, Bertrand ve Mannheim eğri çiftleri karakterize edilmiştir.

3.1. 3–Boyutlu Cartan-Vranceanu Manifoldlarındaki Biharmonik Eğrilerin Evolüt Eğri Çifti

Bu kısımda, 3–boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki evolüt eğri çifti tanımlanmıştır. Ayrıca, bu manifoldlardaki biharmonik eğrilerin evolüt eğri çiftlerinin parametrik denklemleri elde edilmiştir. 3–boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki bu eğri çifti, biharmonik eğrinin eğrilik ve burulma fonksiyonları cinsinden ifade edilmiştir.

Tanım 3.1.1 *Birim hızlı $\gamma : I \to (M, ds^2_{l,m})$ eğrisi ile aynı aralıkta tanımlı*

$$\gamma^* : I \to (M, ds^2_{l,m})$$

eğrisi verilsin. γ ve γ^*eğrilerinin Frenet çatıları sırasıyla, $\{T, N, B\}$ ve $\{T^*, N^*, B^*\}$ olsun. Her bir $s \in I$ için, γ^* eğrisinin $\gamma^*(s)$ noktasındaki teğeti $\gamma(s)$ noktasından geçiyorsa ve

$$ds^2_{l,m}\left(T^*(s), T(s)\right) = 0$$

ise γ^* eğrisine γ eğrisinin bir evolütü denir.

Teorem 3.1.2 *$\gamma^* : I \to (M, ds^2_{l,m})$ eğrisi, $\gamma : I \to (M, ds^2_{l,m})$ eğrisinin bir evolütü ise,*

$$\gamma^*(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa}N(s) - \frac{1}{\kappa}\tan(\tau s + \xi)B(s) \tag{3.1}$$

dır. Burada, ξ integral sabiti, κ ve τ, γ nın eğrilikleridir.

Kanıt Tanım 3.1.1 den γ^* eğrisi

$$\gamma^*(s) = \gamma(s) + \lambda(s)N(s) + \mu(s)B(s) \tag{3.2}$$

şeklinde yazılabilir.

(3.2) eşitliğinin türevi alınıp, (2.6) ile verilen Frenet eşitliklerinden yararlanılırsa,

$$(\gamma^*(s))' = (1 - \lambda\kappa)T(s) + (\lambda' - \mu\tau)N(s) + (\mu' + \lambda\tau)B(s) \tag{3.3}$$

elde edilir. γ^* eğrisi γ eğrisinin evolütü olduğundan $ds^2_{l,m}\left(T^*(s), T(s)\right) = 0$ dır. Böylece,

$$\lambda = \frac{1}{\kappa} \tag{3.4}$$

bulunur. Bu (3.4) değeri, (3.3) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$(\gamma^*(s))' = (\lambda' - \mu\tau)N(s) + (\mu' + \lambda\tau)B(s)$$

elde edilir. Görüldüğü üzere $(\gamma^*(s))'$ vektörü $\gamma^*(s) - \gamma(s)$ vektörüne paraleldir. Böylece,

$$\tau = \frac{\mu\lambda' - \mu'\lambda}{\mu^2 + \lambda^2} = \left[\arctan\left(-\frac{\mu}{\lambda}\right)\right]' = sabit \tag{3.5}$$

olur. Eğer (3.5) eşitliğinin integrali alınırsa,

$$\arctan\left(-\frac{\mu}{\lambda}\right) = \tau s + \xi$$

elde edilir. Burada, ξ integral sabitidir. Buradan μ çekilirse,

$$\mu = -\frac{1}{\kappa}\tan(\tau s + \xi) \tag{3.6}$$

bulunur. Sonuç olarak, (3.4) ve (3.6) eşitlikleri (3.2) de yerine yazılırsa,

$$\gamma^*(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa}N(s) - \frac{1}{\kappa}\tan(\tau s + \xi)B(s)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.3 *$(M, ds^2_{l,m})$ ile $l^2 \neq 4m$ ve $m \neq 0$ şeklindeki Cartan Vranceanu manifoldları gösterilsin. $(M, ds^2_{l,m})$ üzerindeki ortonormal vektör alanları E_1, E_2, E_3 ile verilsin. $\delta = l^2 + (16m - l^2)\sin^2\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_0 \in (0, \pi)$ ve $2w_{1,2} = -l\cos\alpha_0 \pm \sqrt{\delta}$ olsun. $\gamma : I \to (M, ds^2_{l,m})$ birim hızlı, jeodezik olmayan bir biharmonik eğri ve γ^* onun $(M, ds^2_{l,m})$ manifoldundaki evolütü olsun. Bu takdirde, γ^* eğrisinin parametrik eşitlikleri aşağıdaki gibidir:*

1. ***Çeşit*** *Eğer $\beta \neq sabit$ ise,*

$$\begin{aligned}\gamma^*(s) = &\left(\frac{b\sin\alpha_0\sin\beta(s){+}c}{b\beta'}{-}\frac{1}{\kappa}\sin\beta(s){+}\frac{1}{\kappa}\tan(\tau s{+}\xi)\cos\alpha_0\cos\beta(s)\right)E_1\\ &+\left(\frac{\text{-}b\sin\alpha_0\cos\beta(s){+}d}{b\beta'}{+}\frac{1}{\kappa}F\cos\beta(s){+}\frac{1}{\kappa}\tan(\tau s{+}\xi)\cos\alpha_0\sin\beta(s)\right)E_2\\ &+\left(\frac{l}{4m}\beta(s){+}\frac{1}{4m}\left[(4m\text{-}l^2)\cos\alpha_0\text{-}lw_{1,2}\right]s{-}\frac{1}{\kappa}\tan(\tau s{+}\xi)\sin\alpha_0\right)E_3\end{aligned} \tag{3.7}$$

Burada, β aşağıdaki diferansiyel denklemin sabit olmayan bir çözümüdür:

$$\beta' + 2md\sin\alpha_0\cos\beta(s) - 2mc\sin\alpha_0\sin\beta(s) = l\cos\alpha_0 + 2mb\sin^2\alpha_0 + w_{1,2}$$

ve integral sabitleri aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$c^2 + d^2 = \frac{b}{m}\left\{(l\cos\alpha_0 + w_{1,2} - \frac{1}{b}) + mb\sin^2\alpha_0\right\}.$$

Ayrıca, $b \in \mathbb{R}, b > 0$, κ ve τ, γ eğrisinin eğrilikleridir ve ξ integral sabitidir.

2. Çeşit *Eğer $\beta = \beta_0 =$ sabit ve $\cos\beta_0 \sin\beta_0 \neq 0$ ise,*

$$\gamma^*(s) = \left(\frac{x(s)}{1+m\left(\frac{x^2(s)}{\cos^2\beta_0}+2ax(s)\tan\beta_0+a^2\right)} - \frac{1}{\kappa}\sin\beta_0 + \frac{1}{\kappa}\tan(\tau s+\xi)\cos\alpha_0\cos\beta_0 \right) E_1$$
$$+ \left(\frac{x(s)\tan\beta_0+a}{1+m\left(\frac{x^2(s)}{\cos^2\beta_0}+2ax(s)\tan\beta_0+a^2\right)} + \frac{1}{\kappa}\cos\beta_0 + \frac{1}{\kappa}\tan(\tau s+\xi)\cos\alpha_0\sin\beta_0 \right) E_2 \quad (3.8)$$
$$+ \left(\frac{1}{4m}\left[\left(4m-l^2\right)\cos\alpha_0 - lw_{1,2}\right] s + b - \frac{1}{\kappa}\tan(\tau s+\xi)\sin\alpha_0 \right) E_3$$

şeklindedir. Burada,

$$a = \frac{w_{1,2} + l\cos\alpha_0}{2m\sin\beta_0\cos\beta_0}$$

ve $x(s)$ aşağıdaki diferansiyel denklemin bir çözümüdür:

$$x' = (1 + m[x^2 + (x(s)\tan\beta_0 + a)^2])\sin\alpha_0\cos\beta_0.$$

Ayrıca, $b \in \mathbb{R}$, κ ve τ, γ nın eğrilikleridir ve ξ integral sabitidir.

3. Çeşit *Eğer $\cos\beta_0 \sin\beta_0 = 0$ ve, x ile y nin değişimine bağlı olarak, $\cos\beta_0 = 0$ ise,*

$$\gamma^*(s) = \left(\frac{x_0}{1 + m((x_0)^2 + y(s)^2)} - \frac{1}{\kappa}\sin\beta_0 \right) E_1$$
$$+ \left(\frac{y(s)}{1 + m((x_0)^2 + y(s)^2)} + \frac{1}{\kappa}\tan(\tau s + \xi)\cos\alpha_0\sin\beta_0 \right) E_2 \quad (3.9)$$
$$+ \left(\frac{1}{4m}\left[\left(4m - l^2\right)\cos\alpha_0 - lw_{1,2}\right] s + b - \frac{1}{\kappa}\tan(\tau s + \xi)\sin\alpha_0 \right) E_3$$

şeklindedir. Burada,

$$x_0 = \pm\frac{w_{1,2} + l\cos\alpha_0}{2m\sin\alpha_0}$$

ve $y(s)$ aşağıdaki diferansiyel denklemin bir çözümüdür:

$$y' = \pm(1 + m[x_0^2 + y^2])\sin\alpha_0.$$

Ayrıca, $b \in \mathbb{R}$, κ ve τ, γ nın eğrilikleridir ve ξ integral sabitidir.

Kanıt 1. Çeşit jeodezik olmayan biharmonik eğri için (2.28) eşitliğinden ve F in tanımından,

$$\begin{aligned} F &= 1 + m(x^2 + y^2) \\ &= b\beta', b > 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

olduğu kolayca görülür. Bu eğri tipi için (2.23) ve (2.24) eşitlikleri ile verilen N ve B Frenet vektörleri ile (2.18) eşitliğiyle verilen 1. çeşit γ eğrisi (3.1) eşitliğinde yerine yazılıp, (2.2) eşitliği ile verilen ortonormal çatıya göre düzenlenirse (3.7) eşitliği elde edilir.

2. Çeşit jeodezik olmayan biharmonik eğri için F,

$$\begin{aligned} F &= 1 + m(x^2 + y^2) \\ &= 1 + m((x(s))^2 + (x(s)\tan\beta_0 + a)^2) \\ &= 1 + m(x^2(s) + x^2(s)\tan^2\beta_0 + 2ax(s)\tan\beta_0 + a^2) \\ &= 1 + m\left(x^2(s)(1 + \tan^2\beta_0) + 2ax(s)\tan\beta_0 + a^2\right) \\ &= 1 + m\left(\frac{x^2(s)}{\cos^2\beta_0} + 2ax(s)\tan\beta_0 + a^2\right) \end{aligned} \tag{3.11}$$

şeklindedir. Bu eğri tipi için N ile B Frenet vektörleri de

$$N = -\sin\beta_0 E_1 + \cos\beta_0 E_2$$

ve

$$B = -\cos\alpha_0\cos\beta_0 E_1 - \cos\alpha_0\sin\beta_0 E_2 + \sin\alpha_0 E_3$$

olarak bulunur. Yukarıda bulunan bu vektörler ve (2.19) eşitliğiyle verilen 2. çeşit γ eğrisi (3.1) eşitliğinde yerine yazılıp, (2.2) eşitliği ile verilen ortonormal çatıya göre düzenlenirse (3.8) eşitliği elde edilir.

3. Çeşit jeodezik olmayan biharmonik eğri için F aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} F &= 1 + m(x^2 + y^2) \\ &= 1 + m((x_0)^2 + y(s)^2). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Bu eğri tipi için N ile B Frenet vektörleri de

$$N = -\sin\beta_0 E_1$$

ve

$$B = -\cos\alpha_0\sin\beta_0 E_2 + \sin\alpha_0 E_3.$$

olarak bulunur. Yukarıda bulunan bu vektörler ve (2.20) eşitliğiyle verilen 3. çeşit γ eğrisi (3.1) eşitliğinde yerine yazılıp, (2.2) eşitliği ile verilen ortonormal çatıya göre düzenlenirse (3.9) eşitliği elde edilir.

3.2. 3−Boyutlu Cartan-Vranceanu Manifoldlarındaki Biharmonik Eğrilerin İnvolüt Eğri Çifti

Bu kısımda, 3−boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki involüt eğri çifti tanımlanmıştır. Ayrıca, bu manifoldlardaki biharmonik eğrilerin involüt eğri çiftlerinin parametrik denklemleri elde edilmiştir.

Tanım 3.2.1 *Birim hızlı* $\gamma : I \to (M, ds^2_{l,m})$ *eğrisi ile aynı aralıkta tanımlı*

$$\gamma^* : I \to (M, ds^2_{l,m})$$

eğrisi verilsin. γ *ve* γ^**eğrilerinin Frenet çatıları sırasıyla,* $\{T, N, B\}$ *ve* $\{T^*, N^*, B^*\}$ *olsun. Her bir* $s \in I$ *için,* γ *eğrisinin* $\gamma(s)$ *noktasındaki teğeti* $\gamma^*(s)$ *noktasından geçiyorsa ve*

$$ds^2_{l,m}(T^*(s), T(s)) = 0$$

ise γ^* *eğrisine* γ *eğrisinin bir involütü denir.*

Teorem 3.2.2 $\gamma^* : I \to (M, ds^2_{l,m})$ *eğrisi,* $\gamma : I \to (M, ds^2_{l,m})$ *eğrisinin bir involütü ise,*

$$\gamma^*(s) = \gamma(s) + (\rho - s)T(s) \tag{3.13}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, ρ *integral sabitidir.*

Kanıt Tanım 3.2.1 dan γ^* eğrisi

$$\gamma^*(s) = \gamma(s) + u(s)T(s) \tag{3.14}$$

şeklinde yazılabilir.

Bu (3.14) eşitliğinin türevi alınıp (2.6) ile verilen Frenet eşitliklerinden yararlanılırsa,

$$\begin{aligned}(\gamma^*(s))' &= \gamma'(s) + u'(s)T(s) + u(s)T'(s)\\ &= (1 + u'(s))T(s) + u(s)\kappa(s)N(s)\end{aligned}$$

elde edilir.

γ^* eğrisi γ eğrisinin involütü olduğundan $ds^2_{l,m}(T^*(s), T(s)) = 0$ dır. Böylece,

$$\begin{aligned}1 + u'(s) &= 0\\ u(s) &= \rho - s\end{aligned} \tag{3.15}$$

elde edilir. Burada, ρ integral sabitidir. (3.15) eşitliğindeki değeri, (3.14) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\gamma^*(s) = \gamma(s) + (\rho - s)T(s)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.3 $(M, ds^2_{l,m})$ *ile* $l^2 \neq 4m$ *ve* $m \neq 0$ *şeklindeki Cartan Vranceanu manifoldları gösterilsin.* $(M, ds^2_{l,m})$ *üzerindeki ortonormal vektör alanları* E_1, E_2, E_3 *ile verilsin.* $\delta = l^2 + (16m - l^2)\sin^2\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_0 \in (0, \pi)$ *ve* $2w_{1,2} = -l\cos\alpha_0 \pm \sqrt{\delta}$ *olsun.* $\gamma : I \to (M, ds^2_{l,m})$ *birim hızlı, jeodezik olmayan bir biharmonik eğri ve* γ^* *onun* $(M, ds^2_{l,m})$ *manifoldundaki involütü olsun. Bu takdirde,* γ^* *eğrisinin parametrik eşitlikleri aşağıdaki gibidir:*

***1. Çeşit** Eğer $\beta \neq$ sabit ise,*

$$\begin{aligned}\gamma^*(s) &= \left(\frac{b\sin\alpha_0\sin\beta(s)+c}{b\beta'}+(\rho-s)\sin\alpha_0\cos\beta(s)\right)E_1\\&+\left(\frac{-b\sin\alpha_0\cos\beta(s)+d}{b\beta'}+(\rho-s)\sin\alpha_0\sin\beta(s)\right)E_2\\&+\left(\frac{l}{4m}\beta(s)+\frac{1}{4m}\left[(4m-l^2)\cos\alpha_0-lw_{1,2}\right]s+(\rho-s)\cos\alpha_0\right)E_3\end{aligned}\tag{3.16}$$

Burada, β aşağıdaki diferansiyel denklemin sabit olmayan bir çözümüdür:

$$\beta'+2md\sin\alpha_0\cos\beta(s)-2mc\sin\alpha_0\sin\beta(s)=l\cos\alpha_0+2mb\sin^2\alpha_0+w_{1,2}$$

ve integral sabitleri aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$c^2+d^2=\frac{b}{m}\left\{(l\cos\alpha_0+w_{1,2}-\frac{1}{b})+mb\sin^2\alpha_0\right\}.$$

Ayrıca, $b\in\mathbb{R}, b>0$ ve ρ integral sabitidir.

***2. Çeşit** Eğer $\beta=\beta_0=$ sabit ve $\cos\beta_0\sin\beta_0\neq 0$ ise,*

$$\begin{aligned}\gamma^*(s) &= \left(\frac{x(s)}{1+m\left(\frac{x^2(s)}{\cos^2\beta_0}+2ax(s)\tan\beta_0+a^2\right)}+(\rho-s)\sin\alpha_0\cos\beta_0\right)E_1\\&+\left(\frac{x(s)\tan\beta_0+a}{1+m\left(\frac{x^2(s)}{\cos^2\beta_0}+2ax(s)\tan\beta_0+a^2\right)}+(\rho-s)\sin\alpha_0\sin\beta_0\right)E_2\\&+\left(\frac{1}{4m}\left[(4m-l^2)\cos\alpha_0-lw_{1,2}\right]s+b+(\rho-s)\cos\alpha_0\right)E_3\end{aligned}\tag{3.17}$$

şeklindedir. Burada,

$$a=\frac{w_{1,2}+l\cos\alpha_0}{2m\sin\beta_0\cos\beta_0}$$

ve $x(s)$ aşağıdaki diferansiyel denklemin bir çözümüdür:

$$x'=(1+m[x^2+(x(s)\tan\beta_0+a)^2])\sin\alpha_0\cos\beta_0.$$

Ayrıca, $b\in\mathbb{R}$ ve ρ integral sabitidir.

***3. Çeşit** Eğer $\cos\beta_0\sin\beta_0=0$ ve, x ile y nin değişimine bağlı olarak, $\cos\beta_0=0$ ise,*

$$\begin{aligned}\gamma^*(s) &= \left(\frac{x_0}{1+m((x_0)^2+y(s)^2)}\right)E_1\\&+\left(\frac{y(s)}{1+m((x_0)^2+y(s)^2)}+(\rho-s)\sin\alpha_0\sin\beta_0\right)E_2\\&+\left(\frac{1}{4m}\left[(4m-l^2)\cos\alpha_0-lw_{1,2}\right]s+b+(\rho-s)\cos\alpha_0\right)E_3\end{aligned}\tag{3.18}$$

şeklindedir. Burada,

$$x_0 = \pm\frac{w_{1,2} + l\cos\alpha_0}{2m\sin\alpha_0}$$

ve $y(s)$ aşağıdaki diferansiyel denklemin bir çözümüdür:

$$y' = \pm(1 + m[x_0^2 + y^2])\sin\alpha_0.$$

Ayrıca, $b \in \mathbb{R}$ ve ρ integral sabitidir.

Kanıt 1. Çeşit jeodezik olmayan biharmonik eğri için F, (3.10) eşitliği olarak bulunmuştu. Bu eğri tipi için (2.17) eşitliği ile verilen T vektörü ve (2.18) eşitliğiyle verilen 1. çeşit γ eğrisi (3.13) eşitliğinde yerine yazılıp, (2.2) eşitliği ile verilen ortonormal çatıya göre düzenlenirse (3.16) eşitliği elde edilir.

2. Çeşit jeodezik olmayan biharmonik eğri için F, (3.11) eşitliği olarak bulunmuştu. Bu eğri tipi için T vektörü,

$$T = \sin\alpha_0\cos\beta_0 E_1 + \sin\alpha_0\sin\beta_0 E_2 + \cos\alpha_0 E_3$$

olarak bulunur. Yukarıda bulunan bu vektör ve (2.19) eşitliğiyle verilen 2. çeşit γ eğrisi (3.13) eşitliğinde yerine yazılıp, (2.2) eşitliği ile verilen ortonormal çatıya göre düzenlenirse (3.17) eşitliği elde edilir.

3. Çeşit jeodezik olmayan biharmonik eğri için F, (3.12) eşitliği olarak bulunmuştu. Bu eğri tipi için T vektörü de

$$T = \sin\alpha_0\sin\beta_0 E_2 + \cos\alpha_0 E_3$$

olarak bulunur. Yukarıda bulunan bu vektör ve (2.20) eşitliğiyle verilen 3. çeşit γ eğrisi (3.13) eşitliğinde yerine yazılıp, (2.2) eşitliği ile verilen ortonormal çatıya göre düzenlenirse (3.18) eşitliği elde edilir.

3.3. 3−Boyutlu Cartan-Vranceanu Manifoldlarındaki Biharmonik Eğrilerin Bertrand Eğri Çifti

Bu kısımda, 3−boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki Bertrand eğri çifti tanımlanmıştır. Ayrıca, bu manifoldlardaki biharmonik eğrilerin Bertrand eğri çiftlerinin parametrik denklemleri elde edilmiştir.

Tanım 3.3.1 *Birim hızlı $\gamma : I \to (M, ds^2_{l,m})$ eğrisi ile aynı aralıkta tanımlı*

$$\gamma^* : I \to (M, ds^2_{l,m})$$

eğrisi verilsin. γ ve γ^* eğrilerinin Frenet çatıları sırasıyla, $\{T, N, B\}$ ve $\{T^*, N^*, B^*\}$ olsun. Her bir $s \in I$ için, $\gamma^*(s)$ noktası ile $\gamma(s)$ noktasını birleştiren doğru, γ^* eğrisinin $\gamma^*(s)$ noktasındaki asli normalini ve γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki asli normalini kapsıyorsa, γ^* eğrisi γ eğrisiyle Bertrand eğri çifti oluşturuyor denir.

Teorem 3.3.2 *$\gamma^* : I \to (M, ds^2_{l,m})$ eğrisi, $\gamma : I \to (M, ds^2_{l,m})$ eğrisi ile Bertrand eğri çifti oluşturuyor ise,*

$$\gamma^*(s) = \gamma(s) + \lambda N(s) \tag{3.19}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, λ sabit bir sayıdır.

Kanıt Tanım 3.3.1 dan γ^* eğrisi

$$\gamma^*(s) = \gamma(s) + \lambda(s) N(s) \tag{3.20}$$

şeklinde yazılabilir.

Bu (3.20) eşitliğinin türevi alınıp (2.6) ile verilen Frenet eşitliklerinden yararlanılırsa,

$$\begin{aligned} (\gamma^*(s))' &= \gamma'(s) + \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) \\ &= (1-\kappa)T + \lambda'(s)N(s) + \tau B \end{aligned}$$

elde edilir.

γ^* eğrisi γ eğrisinin Bertrand eğri çifti olduğundan $N^*(s)$ ve $N(s)$ lineedir. O halde, $ds^2_{l,m}(T^*(s), N(s)) = 0$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned} \lambda'(s) &= 0 \\ \lambda(s) &= sabit \end{aligned} \tag{3.21}$$

elde edilir. Bulunan (3.21) değeri, (3.20) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\gamma^*(s) = \gamma(s) + \lambda N(s)$$

elde edilir.

Teorem 3.3.3 *(Yılmaz Ceylan ve Ergin 2015a) $(M, ds^2_{l,m})$ ile $l^2 \neq 4m$ ve $m \neq 0$ şeklindeki Cartan Vranceanu manifoldları gösterilsin. $(M, ds^2_{l,m})$ üzerindeki ortonormal vektör alanları E_1, E_2, E_3 ile verilsin. $\delta = l^2 + (16m - l^2)\sin^2\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_0 \in (0,\pi)$ ve $2w_{1,2} = -l\cos\alpha_0 \pm \sqrt{\delta}$ olsun. $\gamma : I \to (M, ds^2_{l,m})$ birim hızlı, jeodezik olmayan bir biharmonik eğri ve γ^* onun $(M, ds^2_{l,m})$ manifoldundaki Bertrand eğri çifti olsun. Bu takdirde, γ^* eğrisinin parametrik eşitlikleri aşağıdaki gibidir:*

1. Çeşit *Eğer $\beta \neq$ sabit ise,*

$$\begin{aligned} \gamma^*(s) = &\left(\frac{b\sin\alpha_0 \sin\beta(s) + c}{b\beta'} - \lambda_0 \sin\beta(s)\right) E_1 \\ &+ \left(\frac{-b\sin\alpha_0\cos\beta(s) + d}{b\beta'} + \lambda_0\cos\beta(s)\right) E_2 \\ &+ \left(\frac{l}{4m}\beta(s) + \frac{1}{4m}\left[(4m - l^2)\cos\alpha_0 - lw_{1,2}\right] s\right) E_3 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Burada, β aşağıdaki diferansiyel denklemin sabit olmayan bir çözümüdür:

$$\beta' + 2md\sin\alpha_0\cos\beta(s) - 2mc\sin\alpha_0\sin\beta(s) = l\cos\alpha_0 + 2mb\sin^2\alpha_0 + w_{1,2}$$

ve integral sabitleri aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$c^2 + d^2 = \frac{b}{m}\left\{(l\cos\alpha_0 + w_{1,2} - \frac{1}{b}) + mb\sin^2\alpha_0\right\}.$$

Ayrıca, $b, \lambda_0 \in \mathbb{R}$ ve $b > 0$ dır.

*2. **Çeşit** Eğer $\beta = \beta_0 =$ sabit ve $\cos\beta_0\sin\beta_0 \neq 0$ ise,*

$$\begin{aligned}\gamma^*(s) = &\left(\frac{x(s)}{1 + m\left(\frac{x^2(s)}{\cos^2\beta_0} + 2ax(s)\tan\beta_0 + a^2\right)} - \lambda_0\sin\beta_0\right)E_1\\ &+\left(\frac{x(s)\tan\beta_0 + a}{1 + m\left(\frac{x^2(s)}{\cos^2\beta_0} + 2ax(s)\tan\beta_0 + a^2\right)} + \lambda_0\cos\beta_0\right)E_2\\ &+\left(\frac{1}{4m}\left[(4m - l^2)\cos\alpha_0 - lw_{1,2}\right]s + b\right)E_3\end{aligned} \tag{3.23}$$

şeklindedir. Burada,

$$a = \frac{w_{1,2} + l\cos\alpha_0}{2m\sin\beta_0\cos\beta_0}$$

ve $x(s)$ aşağıdaki diferansiyel denklemin bir çözümüdür:

$$x' = (1 + m[x^2 + (x(s)\tan\beta_0 + a)^2])\sin\alpha_0\cos\beta_0.$$

Ayrıca, $b, \lambda_0 \in \mathbb{R}$ dir.

*3. **Çeşit** Eğer $\cos\beta_0\sin\beta_0 = 0$ ve, x ile y nin değişimine bağlı olarak, $\cos\beta_0 = 0$ ise,*

$$\begin{aligned}\gamma^*(s) = &\left(\frac{x_0}{1 + m((x_0)^2 + y(s)^2)} - \lambda_0\sin\beta_0\right)E_1\\ &+\left(\frac{y(s)}{1 + m((x_0)^2 + y(s)^2)}\right)E_2\\ &+\left(\frac{1}{4m}\left[(4m - l^2)\cos\alpha_0 - lw_{1,2}\right]s + b\right)E_3\end{aligned} \tag{3.24}$$

şeklindedir. Burada,

$$x_0 = \pm\frac{w_{1,2} + l\cos\alpha_0}{2m\sin\alpha_0}$$

ve $y(s)$ aşağıdaki diferansiyel denklemin bir çözümüdür:

$$y' = \pm(1 + m[x_0^2 + y^2])\sin\alpha_0.$$

Ayrıca, $b, \lambda_0 \in \mathbb{R}$ ve $b > 0$ dir.

Kanıt 1. Çeşit jeodezik olmayan biharmonik eğri için F, (3.10) eşitliği olarak bulunmuştu. Bu eğri tipi için (2.23) eşitliği ile verilen N vektörü ve (2.18) eşitliğiyle verilen 1. çeşit γ eğrisi (3.19) eşitliğinde yerine yazılıp, (2.2) eşitliği ile verilen ortonormal çatıya göre düzenlenirse (3.22) eşitliği elde edilir.

2. Çeşit jeodezik olmayan biharmonik eğri için F, (3.11) eşitliği olarak bulunmuştu. Bu eğri tipi için N vektörü,

$$N = -\sin\beta_0 E_1 + \cos\beta_0 E_2$$

olarak bulunur. Yukarıda bulunan bu vektör ve (2.19) eşitliğiyle verilen 2. çeşit γ eğrisi (3.19) eşitliğinde yerine yazılıp, (2.2) eşitliği ile verilen ortonormal çatıya göre düzenlenirse (3.23) eşitliği elde edilir.

3. Çeşit jeodezik olmayan biharmonik eğri için F, (3.12) eşitliği olarak bulunmuştu. Bu eğri tipi için N vektörü de

$$N = -\sin\beta_0 E_1$$

olarak bulunur. Yukarıda bulunan bu vektör ve (2.20) eşitliğiyle verilen 3. çeşit γ eğrisi (3.19) eşitliğinde yerine yazılıp, (2.2) eşitliği ile verilen ortonormal çatıya göre düzenlenirse (3.24) eşitliği elde edilir.

3.4. 3–Boyutlu Cartan-Vranceanu Manifoldlarındaki Biharmonik Eğrilerin Mannheim Eğri Çifti

Bu kısımda, 3–boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki Mannheim eğri çifti tanımlanmıştır. Ayrıca, bu manifoldlardaki biharmonik eğrilerin Mannheim eğri çiftlerinin parametrik denklemleri elde edilmiştir.

Tanım 3.4.1 *Birim hızlı* $\gamma : I \to (M, ds^2_{l,m})$ *eğrisi ile aynı aralıkta tanımlı*

$$\gamma^* : I \to (M, ds^2_{l,m})$$

eğrisi verilsin. γ *ve* γ^**eğrilerinin Frenet çatıları sırasıyla,* $\{T, N, B\}$ *ve* $\{T^*, N^*, B^*\}$ *olsun. Her bir* $s \in I$ *için,* γ *eğrisinin asli normali ile* γ^* *ın binormali lineer bağımlı ise* γ^* *eğrisi* γ *eğrisiyle Mannheim eğri çifti oluşturuyor denir.*

Teorem 3.4.2 $\gamma^* : I \to (M, ds^2_{l,m})$ *eğrisi,* $\gamma : I \to (M, ds^2_{l,m})$ *eğrisi ile Mannheim eğri çifti oluşturuyor ise,*

$$\gamma(s) = \gamma^*(s) + \lambda B^*(s) \tag{3.25}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, λ *sabit bir sayıdır.*

Kanıt Tanım 3.4.1 dan γ^* eğrisi

$$\gamma(s) = \gamma^*(s) + \lambda(s) B^*(s) \tag{3.26}$$

şeklinde yazılabilir.

Bu (3.26) eşitliğinin türevi alınıp (2.6) ile verilen Frenet eşitliklerinden yararlanılırsa,

$$\begin{aligned}\gamma'(s) &= (\gamma^*(s))' + \lambda'(s)B^*(s) + \lambda(s)\,(B^*(s))' \\ &= T^*(s) - \lambda(s)\tau^*(s)N^*(s) + \lambda'(s)B^*(s)\end{aligned}$$

elde edilir.

γ^* eğrisi γ eğrisinin Mannheim eğri çifti olduğundan $B^*(s)$ ve $N(s)$ lineedir. O halde, $ds^2_{l,m}(T(s), B^*(s)) = 0$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned}\lambda'(s) &= 0 \\ \lambda(s) &= sabit\end{aligned} \tag{3.27}$$

elde edilir. Bulunan (3.27) değeri, (3.26) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\gamma(s) = \gamma^*(s) + \lambda B^*(s)$$

elde edilir.

Teorem 3.4.3 *(Yılmaz Ceylan ve Ergin 2015b)* $(M, ds^2_{l,m})$ *ile* $l^2 \neq 4m$ *ve* $m \neq 0$ *şeklindeki Cartan Vranceanu manifoldları gösterilsin.* $(M, ds^2_{l,m})$ *üzerindeki ortonormal vektör alanları* E_1, E_2, E_3 *ile verilsin.* $\delta = l^2 + (16m - l^2)\sin^2\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_0 \in (0,\pi)$ *ve* $2w_{1,2} = -l\cos\alpha_0 \pm \sqrt{\delta}$ *olsun.* $\gamma : I \to (M, ds^2_{l,m})$ *birim hızlı, jeodezik olmayan bir biharmonik eğri ve* γ^* *onun* $(M, ds^2_{l,m})$ *manifoldundaki Mannheim eğri çifti olsun. Bu takdirde,* γ^* *eğrisinin parametrik eşitlikleri aşağıdaki gibidir:*

1. Çeşit *Eğer* $\beta \neq sabit$ *ise,*

$$\begin{aligned}\gamma^*(s) = &\left(\frac{b\sin\alpha_0\sin\beta(s) + c}{b\beta'} - \lambda_0\cos\alpha_0\cos\beta(s)\right)E_1 \\ &+\left(\frac{-b\sin\alpha_0\cos\beta(s) + d}{b\beta'} - \lambda_0\cos\alpha_0\sin\beta(s)\right)E_2 \\ &+\left(\frac{l}{4m}\beta(s) + \frac{1}{4m}\left[(4m - l^2)\cos\alpha_0 - lw_{1,2}\right]s + \lambda_0\sin\alpha_0\right)E_3\end{aligned} \tag{3.28}$$

Burada, β *aşağıdaki diferansiyel denklemin sabit olmayan bir çözümüdür:*

$$\beta' + 2md\sin\alpha_0\cos\beta(s) - 2mc\sin\alpha_0\sin\beta(s) = l\cos\alpha_0 + 2mb\sin^2\alpha_0 + w_{1,2}$$

ve integral sabitleri aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$c^2 + d^2 = \frac{b}{m}\left\{(l\cos\alpha_0 + w_{1,2} - \frac{1}{b}) + mb\sin^2\alpha_0\right\}.$$

Ayrıca, $b, \lambda_0 \in \mathbb{R}$ *ve* $b > 0$ *dır.*

2. Çeşit *Eğer* $\beta = \beta_0 =$ *sabit ve* $\cos\beta_0 \sin\beta_0 \neq 0$ *ise,*

$$\begin{aligned}\gamma^*(s) = &\left(\frac{x(s)}{1 + m\left(\frac{x^2(s)}{\cos^2\beta_0} + 2ax(s)\tan\beta_0 + a^2\right)} - \lambda_0 \cos\alpha_0 \cos\beta_0\right) E_1 \\ &+ \left(\frac{x(s)\tan\beta_0 + a}{1 + m\left(\frac{x^2(s)}{\cos^2\beta_0} + 2ax(s)\tan\beta_0 + a^2\right)} - \lambda_0 \cos\alpha_0 \sin\beta_0\right) E_2 \\ &+ \left(\frac{1}{4m}\left[(4m - l^2)\cos\alpha_0 - lw_{1,2}\right] s + b + \lambda_0 \sin\alpha_0\right) E_3\end{aligned} \tag{3.29}$$

şeklindedir. Burada,

$$a = \frac{w_{1,2} + l\cos\alpha_0}{2m \sin\beta_0 \cos\beta_0}$$

ve $x(s)$ *aşağıdaki diferansiyel denklemin bir çözümüdür:*

$$x' = (1 + m[x^2 + (x(s)\tan\beta_0 + a)^2]) \sin\alpha_0 \cos\beta_0.$$

Ayrıca, $b, \lambda_0 \in \mathbb{R}$ *dir.*

3. Çeşit *Eğer* $\cos\beta_0 \sin\beta_0 = 0$ *ve,* x *ile* y *nin değişimine bağlı olarak,* $\cos\beta_0 = 0$ *ise,*

$$\begin{aligned}\gamma^*(s) = &\left(\frac{x_0}{1 + m((x_0)^2 + y(s)^2)}\right) E_1 \\ &+ \left(\frac{y(s)}{1 + m((x_0)^2 + y(s)^2)} - \lambda_0 \cos\alpha_0 \sin\beta_0\right) E_2 \\ &+ \left(\frac{1}{4m}\left[(4m - l^2)\cos\alpha_0 - lw_{1,2}\right] s + b + \lambda_0 \sin\alpha_0\right) E_3\end{aligned} \tag{3.30}$$

şeklindedir. Burada,

$$x_0 = \pm\frac{w_{1,2} + l\cos\alpha_0}{2m \sin\alpha_0}$$

ve $y(s)$ *aşağıdaki diferansiyel denklemin bir çözümüdür:*

$$y' = \pm(1 + m[x_0^2 + y^2]) \sin\alpha_0.$$

Ayrıca, $b, \lambda_0 \in \mathbb{R}$ *dir.*

Kanıt 1. Çeşit jeodezik olmayan biharmonik eğri için F, (3.10) eşitliği olarak bulunmuştu. Bu eğri tipi için (2.24) eşitliği ile verilen B vektörü ve (2.18) eşitliğiyle verilen 1. çeşit γ eğrisi (3.25) eşitliğinde yerine yazılıp, (2.2) eşitliği ile verilen ortonormal çatıya göre düzenlenirse (3.28) eşitliği elde edilir.

2. Çeşit jeodezik olmayan biharmonik eğri için F, (3.11) eşitliği olarak bulunmuştu. Bu eğri tipi için B vektörü,

$$B = -\cos\alpha_0 \cos\beta_0 E_1 - \cos\alpha_0 \sin\beta_0 E_2 + \sin\alpha_0 E_3.$$

olarak bulunur. Yukarıda bulunan bu vektör ve (2.19) eşitliğiyle verilen 2. çeşit γ eğrisi (3.25) eşitliğinde yerine yazılıp, (2.2) eşitliği ile verilen ortonormal çatıya göre düzenlenirse (3.29) eşitliği elde edilir.

3. Çeşit jeodezik olmayan biharmonik eğri için F, (3.12) eşitliği olarak bulunmuştu. Bu eğri tipi için B vektörü de

$$B = -\cos\alpha_0 \sin\beta_0 E_2 + \sin\alpha_0 E_3$$

olarak bulunur. Yukarıda bulunan bu vektör ve (2.20) eşitliğiyle verilen 3. çeşit γ eğrisi (3.25) eşitliğinde yerine yazılıp, (2.2) eşitliği ile verilen ortonormal çatıya göre düzenlenirse (3.30) eşitliği elde edilir.

4. $(2n+1)-$BOYUTLU CARTAN-VRANCEANU MANİFOLDLARINDAKİ BİHARMONİK EĞRİLERİN EĞRİ ÇİFTLERİNİN PARAMETRİK DENKLEMLERİ

Bu bölüm, bir önceki bölümde yapılan çalışmaların genelleştirilmesidir. Bu bölümde, $(2n+1)-$boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki jeodezik olmayan biharmonik eğrilerin eğri çiftlerinin parametrik denklemleri verilmiştir. Üç alt başlık altında sırasıyla, evolüt-involüt, Bertrand ve Mannheim eğri çiftleri karakterize edilmiştir.

4.1. $(2n+1)-$Boyutlu Cartan-Vranceanu Manifoldlarındaki Biharmonik Eğrilerin Evolüt ve İnvolüt Eğri Çifti

Bu kısımda, $(2n+1)-$boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki jeodezik olmayan biharmonik eğrilerin evolüt ve involüt eğri çiftleri incelenmiştir. $(2n+1)-$boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki bu eğri çiftleri, biharmonik eğrinin eğrilik ve burulma fonksiyonları cinsinden ifade edilmiştir.

Teorem 4.1.1 $(2n+1)-$*Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki jeodezik olmayan biharmonik eğrilerin en fazla* $(1,1)-$*mertebeden involüt-evolüt eğri çifti vardır.*

Kanıt Önerme 2.4.4 ın ispatından, bir biharmonik γ eğrisinin $\{T,N,B\}$ Frenet çatısına sahip olduğu görüldü. Tanım 1.5.5 den, (γ,γ^*) çiftinin $(1,1)-$mertebeden involüt-evolüt eğri çifti olduğu sonucu çıkar.

4.1.1. $(2n+1)-$Boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki biharmonik eğrilerin involüt eğri çifti

Bu kısımda, $(2n+1)-$boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki involüt eğri çifti tanımlanmıştır. Ayrıca, $(2n+1)-$boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki jeodezik olmayan biharmonik eğrilerin involüt eğri çiftlerinin parametrik denklemleri verilmiştir.

Tanım 4.1.2 $\gamma : I \to (M, ds^2_{l,m})$ *ve* $\gamma^* : I \to (M, ds^2_{l,m})$ *eğrileri verilsin.* $\gamma(s)$ *ve* $\gamma^*(s)$ *noktalarında* γ *ve* γ^* *eğrilerinin Frenet çatıları sırasıyla* $\{T,N_1,...,N_{2n}\}$, $\{T^*,N_1^*,...,N_{2n}^*\}$ *olmak üzere*

$$ds^2_{l,m}(T^*(s),T(s)) = 0$$

ise, γ *eğrisine* γ^* *eğrisinin involütü,* γ^* *eğrisine de* γ *eğrisinin evolütü denir.*

Teorem 4.1.3 $\gamma^* : I \to (M, ds^2_{l,m})$ *eğrisi,* $\gamma : I \to (M, ds^2_{l,m})$ *eğrisinin bir involütü ise,*

$$\gamma^*(s) = \gamma(s) + (\rho - s)T(s). \tag{4.1}$$

şeklinde yazılabilir.

Kanıt *Tanım* 4.1.2 *dan* γ^* *eğrisi*

$$\gamma^*(s) = \gamma(s) + u(s)T(s) \tag{4.2}$$

şeklinde yazılabilir.

(4.2) eşitliğinin türevi alınıp (2.6) ile verilen Frenet eşitliklerinden yararlanılırsa,

$$(\gamma^*(s))' = (1 + u'(s))T(s) + u(s)k_1(s)N_1(s)$$

elde edilir. γ^* eğrisi γ eğrisinin involütü olduğu için, $g(T^*(s), T(s)) = 0$ dır. Böylece,

$$1 + u'(s) = 0 \text{ veya } u(s) = \rho - s \tag{4.3}$$

dır. Burada, ρ integral sabitidir. (4.3) eşitliği (4.2) de yerine yazıldığında,

$$\gamma^*(s) = \gamma(s) + (\rho - s)T(s)$$

elde edilir.

Teorem 4.1.4 *$(M, ds^2_{l,m})$, $(2n+1)-$boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldu olsun öyle ki $m > 0$ ve $\frac{4m}{n} - l^2 \neq 0$ dır. $(M, ds^2_{l,m})$ üzerindeki ortonormal vektör alanları $1 \leq i \leq n$ için $E_{2i-1}, E_{2i}, E_{2n+1}$ ile gösterilsin. $\gamma : I \to (M, ds^2_{l,m})$ yay parametresi ile verilmiş jeodezik olmayan bir biharmonik eğri ve γ^* eğrisi de onun $(M, ds^2_{l,m})$ manifoldundaki involüt eğri çifti olsun. Bu takdirde, γ^* eğrisinin parametrik eşitlikleri aşağıdaki gibidir:*

$$\begin{aligned}
\gamma^*(s) = {} & \left(\left(\frac{\sqrt{n}\sin\beta_i}{b\sin\alpha}\right) + (\rho - s)\left(\frac{\sin\alpha\cos\beta_i}{\sqrt{n}}\right)\right)E_{2i-1}, \ 1 \leq i \leq n \\
& + \left(-\left(\frac{\sqrt{n}\cos\beta_i}{b\sin\alpha}\right) + (\rho - s)\left(\frac{\sin\alpha\sin\beta_i}{\sqrt{n}}\right)\right)E_{2i} \\
& + \left(\frac{lb}{2n}\left(\sin^2\alpha\right)s + \rho\cos\alpha\right)E_{2n+1}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Burada, ρ integral sabiti ve

$$\beta_i(s) = \frac{n + mb^2\sin^2\alpha}{bn}s + d_i$$

dır.

Kanıt Önerme 2.4.4 den F,

$$F = 1 + \frac{mb^2\sin^2\alpha}{n} \tag{4.5}$$

olarak elde edilir. T vektör alanı,

$$T = \left(\frac{\sin\alpha\cos\beta_i}{\sqrt{n}}\right)E_{2i-1} + \left(\frac{\sin\alpha\sin\beta_i}{\sqrt{n}}\right)E_{2i} + (\cos\alpha)E_{2n+1} \tag{4.6}$$

olarak bulunur. (4.6) ve (2.36) eşitlikleri, (4.1) eşitliğinde yerine yazılıp, (2.2) eşitliği ile verilen ortonormal çatıya göre düzenlenirse, (4.4) eşitliği elde edilir.

4.1.2. $(2n+1)-$Boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki biharmonik eğrilerin evolüt eğri çifti

Bu kısımda, $(2n+1)-$boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki evolüt eğri çifti tanımlanmıştır. Ayrıca, $(2n+1)-$boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki jeodezik olmayan biharmonik eğrilerin evolüt eğri çiftlerinin parametrik denklemleri verilmiştir. $(2n+1)-$boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki bu eğri çifti, biharmonik eğrinin eğrilik ve burulma fonksiyonları cinsinden ifade edilmiştir.

Tanım 4.1.5 *$\gamma : I \to (M, ds^2_{l,m})$ ve $\gamma^* : I \to (M, ds^2_{l,m})$ eğrileri verilsin. $\gamma(s)$ ve $\gamma^*(s)$ noktalarında γ ve γ^* eğrilerinin Frenet çatıları sırasıyla $\{T, N_1, ..., N_{2n}\}$, $\{T^*, N_1^*, ..., N_{2n}^*\}$ olmak üzere*

$$ds^2_{l,m}(T^*(s), T(s)) = 0$$

ise, γ eğrisine γ^* eğrisinin involütü, γ^* eğrisine de γ nın evolütü denir.

Teorem 4.1.6 *$\gamma^* : I \to (M, ds^2_{l,m})$ eğrisi, $\gamma : I \to (M, ds^2_{l,m})$ eğrisinin bir evolütü ise,*

$$\gamma^*(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa}N_1(s) - \frac{1}{\kappa}\tan(\tau s + \xi)N_2(s) \tag{4.7}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Kanıt Tanım 4.1.5 dan γ^* eğrisi

$$\gamma^*(s) = \gamma(s) + \lambda(s)N_1(s) + \mu(s)N_2(s) \tag{4.8}$$

şeklinde yazılabilir.

(4.8) eşitliğinin türevi alınıp (2.6) ile verilen Frenet eşitliklerinden yararlanılırsa,

$$(\gamma^*(s))' = (1 - \lambda\kappa)T(s) + (\lambda' - \mu\tau)N_1(s) + (\lambda\tau + \mu')N_2(s) \tag{4.9}$$

elde edilir. γ^* eğrisi γ eğrisinin evolütü olduğundan $g(T^*(s), T(s)) = 0$ dır. Böylece,

$$1 - \lambda\kappa = 0 \text{ veya } \lambda = \frac{1}{\kappa} \tag{4.10}$$

bulunur. (4.9) ve (4.10) eşitlikleri kullanılırsa,

$$(\gamma^*(s))' = (\lambda' - \mu\tau)N_1(s) + (\lambda\tau + \mu')N_2(s) \tag{4.11}$$

elde edilir. (4.11) ve (4.8) eşitliklerinden, $(\gamma^*)'$ vektör alanının $\gamma^* - \gamma$ vektör alanına paralel olduğu görülür. Böylece,

$$\tau = \frac{\mu\lambda' - \mu'\lambda}{\mu^2 + \lambda^2} = \left[\arctan\left(-\frac{\mu}{\lambda}\right)\right]' = sabit \tag{4.12}$$

olur. Eğer (4.12) eşitliğinin integrali alınacak olursa,

$$\arctan\left(-\frac{\mu}{\lambda}\right) = \tau s + \xi$$

elde edilir. Burada, ξ integral sabitidir. Buradan μ çekilirse,

$$\mu = -\frac{1}{\kappa}\tan(\tau s+\xi) \tag{4.13}$$

bulunur. (4.10) ve (4.13) eşitlikleri, (4.8) eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$\gamma^*(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa}N_1(s) - \frac{1}{\kappa}\tan(\tau s+\xi)N_2(s)$$

elde edilir.

Teorem 4.1.7 $(M, ds^2_{l,m})$, $(2n+1)-$*boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldu olsun, öyle ki* $m > 0$ *ve* $\frac{4m}{n} - l^2 \neq 0$ *dır.* $(M, ds^2_{l,m})$ *üzerindeki ortonormal vektör alanları* $1 \leq i \leq n$ *için* $E_{2i-1}, E_{2i}, E_{2n+1}$ *ile gösterilsin.* $\gamma : I \to (M, ds^2_{l,m})$ *yay parametresi ile verilmiş jeodezik olmayan bir biharmonik eğri ve* γ^* *eğrisi de onun* $(M, ds^2_{l,m})$ *manifoldundaki evolüt eğri çifti olsun. Bu takdirde,* γ^* *eğrisinin parametrik eşitlikleri aşağıdaki gibidir:*

$$\begin{aligned}\gamma^*(s) = &\left(\left(\frac{\sqrt{n}\sin\beta_i}{b\sin\alpha}\right) - \frac{1}{\kappa}\left(\frac{\sin\beta_i}{\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{\kappa}\tan(\tau s+\xi)\left(\frac{\cos\alpha\cos\beta_i}{\sqrt{n}}\right)\right)E_{2i-1},\ 1 \leq i \leq n\\ &+\left(-\left(\frac{\sqrt{n}\cos\beta_i}{b\sin\alpha}\right) + \frac{1}{\kappa}\left(\frac{\cos\beta_i}{\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{\kappa}\tan(\tau s+\xi)\left(\frac{\cos\alpha\sin\beta_i}{\sqrt{n}}\right)\right)E_{2i}\\ &+\left(\left((\cos\alpha)s + \frac{lb}{2n}(\sin^2\alpha)s\right) - \frac{1}{\kappa}\tan(\tau s+\xi)(\sin\alpha)\right)E_{2n+1}.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Burada, ξ *integral sabiti ve*

$$\beta_i(s) = \frac{n + mb^2\sin^2\alpha}{bn}s + d_i$$

dır.

Kanıt F, (4.5) eşitliği ile elde edilmişti. N_1 ve N_2 vektör alanları,

$$N_1 = -\left(\frac{\sin\beta_i}{\sqrt{n}}\right)E_{2i-1} + \left(\frac{\cos\beta_i}{\sqrt{n}}\right)E_{2i} \tag{4.15}$$

ve

$$N_2 = -\left(\frac{\cos\alpha\cos\beta_i}{\sqrt{n}}\right)E_{2i-1} - \left(\frac{\cos\alpha\sin\beta_i}{\sqrt{n}}\right)E_{2i} + (\sin\alpha)E_{2n+1} \tag{4.16}$$

olarak bulunur. (4.15), (4.16) ve (2.36) eşitlikleri, (4.7) eşitliğinde yerine yazılıp, (2.2) eşitliği ile verilen ortonormal çatıya göre düzenlenirse, (4.14) eşitliği elde edilir.

4.2. $(2n+1)-$Boyutlu Cartan-Vranceanu Manifoldlarındaki Biharmonik Eğrilerin Bertrand Eğri Çifti

Bu kısımda, $(2n+1)-$boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki Bertrand eğri çifti tanımlanmıştır. Ayrıca, $(2n+1)-$boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki jeodezik olmayan biharmonik eğrilerin Bertrand eğri çiftlerinin parametrik denklemleri verilmiştir.

Tanım 4.2.1 *$\gamma : I \to (M, ds^2_{l,m})$ ve $\gamma^* : I \to (M, ds^2_{l,m})$ eğrileri verilsin. $\gamma(s)$ ve $\gamma^*(s)$ noktalarında γ ve γ^* eğrilerinin Frenet çatıları sırasıyla $\{T, N_1, ..., N_{2n}\}$, $\{T^*, N_1^*, ..., N_{2n}^*\}$ olarak verildiğinde $\forall s \in I$ için,*

$$\{N_1^*(s), N_1(s)\}$$

lineer bağımlı ise, (γ, γ^*) eğri ikilisine bir Bertrand eğri çifti denir.

Teorem 4.2.2 *$\gamma^* : I \to (M, ds^2_{l,m})$ eğrisi, $\gamma : I \to (M, ds^2_{l,m})$ eğrisi ile Bertrand eğri çifti oluşturuyor ise,*

$$\gamma^*(s) = \gamma(s) + \lambda N_1(s), \ \forall s \in I \tag{4.17}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, λ bir sabittir.

Kanıt Tanım 4.2.1 dan γ^* eğrisi

$$\gamma^*(s) = \gamma(s) + \lambda(s) N_1(s) \tag{4.18}$$

şeklinde yazılabilir.

(4.18) eşitliğinin türevi alınıp (2.6) ile verilen Frenet eşitliklerinden yararlanılırsa,

$$\begin{aligned}(\gamma^*(s))' &= \gamma'(s) + \lambda'(s) N_1(s) + \lambda(s) N_1'(s) \\ &= (1-\kappa) T + \lambda'(s) N_1(s) + \tau(s) N_2(s)\end{aligned}$$

elde edilir.

γ^* eğrisi γ eğrisinin Bertrand eğri çifti olduğundan $N_1^*(s)$ ve $N_1(s)$ lineedir. O halde, $ds^2_{l,m}(T^*(s), N_1(s)) = 0$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned}\lambda'(s) &= 0 \\ \lambda(s) &= sabit\end{aligned} \tag{4.19}$$

elde edilir. Bulunan (4.19) değeri, (4.17) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\gamma^*(s) = \gamma(s) + \lambda N_1(s)$$

elde edilir.

Teorem 4.2.3 *$(M, ds^2_{l,m})$, $(2n+1)-$boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldu olsun öyle ki $m > 0$ ve $\frac{4m}{n} - l^2 \neq 0$ dır. $(M, ds^2_{l,m})$ üzerindeki ortonormal vektör alanları $1 \leq i \leq n$ için $E_{2i-1}, E_{2i}, E_{2n+1}$ ile gösterilsin. $\gamma : I \to (M, ds^2_{l,m})$ yay parametresi ile verilmiş jeodezik olmayan bir biharmonik eğri ve γ^* eğrisi de onun $(M, ds^2_{l,m})$ manifoldundaki Bertrand eğri çifti olsun. Bu takdirde, γ^* eğrisinin parametrik eşitlikleri aşağıdaki gibidir:*

$$\begin{aligned}\gamma^*(s) &= \left(\left(\frac{\sqrt{n}\sin\beta_i}{b\sin\alpha}\right) + \lambda\left(\frac{\sin\alpha\cos\beta_i}{\sqrt{n}}\right)\right)E_{2i-1},\ 1 \leq i \leq n \\ &+ \left(-\left(\frac{\sqrt{n}\cos\beta_i}{b\sin\alpha}\right) + \lambda\left(\frac{\sin\alpha\sin\beta_i}{\sqrt{n}}\right)\right)E_{2i} \\ &+ \left((\cos\alpha)\, s + \frac{lb}{2n}\left(\sin^2\alpha\right) s\right)E_{2n+1}\end{aligned} \tag{4.20}$$

Burada,

$$\beta_i(s) = \frac{n + mb^2\sin^2\alpha}{bn}s + d_i$$

dır.

Kanıt F, (4.5) eşitliği ile ve N_1 vektör alanı da (4.15) eşitliği ile elde edilmişti. (4.15) ve (2.36) eşitlikleri, (4.17) eşitliğinde yerine yazılıp, (2.2) eşitliği ile verilen ortonormal çatıya göre düzenlenirse, (4.20) eşitliği elde edilir.

4.3. $(2n+1)-$Boyutlu Cartan-Vranceanu Manifoldlarındaki Biharmonik Eğrilerin Mannheim Eğri Çifti

Bu kısımda, $(2n+1)-$boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki Mannheim eğri çifti tanımlanmıştır. Ayrıca, $(2n+1)-$boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki jeodezik olmayan biharmonik eğrilerin Mannheim eğri çiftlerinin parametrik denklemleri verilmiştir.

Tanım 4.3.1 *$\gamma : I \to (M, ds^2_{l,m})$ ve $\gamma^* : I \to (M, ds^2_{l,m})$ eğrileri verilsin. $\gamma(s)$ ve $\gamma^*(s)$ noktalarında γ ve γ^* eğrilerinin Frenet çatıları sırasıyla $\{T, N_1, ..., N_{2n}\}$, $\{T^*, N_1^*, ..., N_{2n}^*\}$ olarak verildiğinde $\forall s \in I$ için,*

$$\{N_2^*(s), N_1(s)\}$$

lineer bağımlı ise, (γ, γ^*) eğri ikilisine bir Mannheim eğri çifti denir.

Teorem 4.3.2 *$\gamma^* : I \to (M, ds^2_{l,m})$ eğrisi, $\gamma : I \to (M, ds^2_{l,m})$ eğrisi ile Mannheim eğri çifti oluşturuyor ise,*

$$\gamma(s) = \gamma^*(s) + \lambda N_2^*(s),\ \forall s \in I \tag{4.21}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, λ bir sabittir.

Kanıt Tanım 4.3.1 dan γ^* eğrisi

$$\gamma(s) = \gamma^*(s) + \lambda(s)B^*(s) \tag{4.22}$$

şeklinde yazılabilir.

(4.22) eşitliğinin türevi alınıp (2.6) ile verilen Frenet eşitliklerinden yararlanılırsa,

$$\begin{aligned}\gamma'(s) &= (\gamma^*(s))' + \lambda'(s)N_2^*(s) + \lambda(s)\,(N_2^*(s))' \\ &= T^*(s) - \lambda(s)\tau^*(s)N_1^*(s) + \lambda'(s)N_2^*(s)\end{aligned}$$

elde edilir.

γ^* eğrisi γ eğrisinin Mannheim eğri çifti olduğundan $N_2^*(s)$ ve $N_1(s)$ lineedir. O halde, $ds^2_{l,m}\,(T(s), N_2^*(s)) = 0$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned}\lambda'(s) &= 0 \\ \lambda(s) &= sabit\end{aligned} \tag{4.23}$$

elde edilir. Bulunan (4.23) değeri, (4.21) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\gamma(s) = \gamma^*(s) + \lambda N_2^*(s)$$

elde edilir.

Teorem 4.3.3 $(M, ds^2_{l,m})$, $(2n+1)-$*boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldu olsun öyle ki* $m > 0$ *ve* $\frac{4m}{n} - l^2 \neq 0$ *dır.* $(M, ds^2_{l,m})$ *üzerindeki ortonormal vektör alanları* $1 \leq i \leq n$ *için* $E_{2i-1}, E_{2i}, E_{2n+1}$ *ile gösterilsin.* $\gamma : I \to (M, ds^2_{l,m})$ *yay parametresi ile verilmiş jeodezik olmayan bir biharmonik eğri ve* γ^* *eğrisi de onun* $(M, ds^2_{l,m})$ *manifoldundaki Mannheim eğri çifti olsun. Bu takdirde,* γ^* *eğrisinin parametrik eşitlikleri aşağıdaki gibidir:*

$$\begin{aligned}\gamma^*(s) = &\left(\left(\frac{\sqrt{n}\sin\beta_i}{b\sin\alpha}\right) - \lambda\left(\frac{\cos\alpha\cos\beta_i}{\sqrt{n}}\right)\right)E_{2i-1},\ 1 \leq i \leq n \\ &+ \left(-\left(\frac{\sqrt{n}\cos\beta_i}{b\sin\alpha}\right) - \lambda\left(\frac{\cos\alpha\sin\beta_i}{\sqrt{n}}\right)\right)E_{2i} \\ &+ \left((\cos\alpha)\,s + \frac{lb}{2n}\left(\sin^2\alpha\right)s + \lambda\left(\sin\alpha\right)\right)E_{2n+1}\end{aligned} \tag{4.24}$$

Burada,

$$\beta_i(s) = \frac{n + mb^2\sin^2\alpha}{bn}s + d_i$$

dır.

Kanıt F, (4.5) eşitliği ile ve N_2 vektör alanı da (4.16) eşitliği ile elde edilmişti. (4.16) ve (2.36) eşitlikleri, (4.21) eşitliğinde yerine yazılıp, (2.2) eşitliği ile verilen ortonormal çatıya göre düzenlenirse, (4.24) eşitliği elde edilir.

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, Heisenberg gruplarını da kapsayan Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki iki eğrinin karşılık gelen noktalarındaki Frenet çatıları arasında bağıntılar kurularak eğri çiftleri elde edilmiştir.

Heisenberg gruplarındaki biharmonik eğrilerin eğri çiftleri, Heisenberg gruplarını da kapsayan Cartan-Vranceanu manifoldlarına taşındı. Açıkça, $3-$boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldlarında evolüt, involüt, Bertrand ve Mannheim eğri çiftleri tanımlandı. $3-$boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki biharmonik eğrilerin, evolüt, involüt, Bertrand, Mannheim eğri çeşitleri, biharmonik eğrilerin eğrilik ve burulması bakımından karakterize edildi.

Diğer yandan, $(2n+1)-$boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldlarında evolüt, involüt, Bertrand ve Mannheim eğri çiftleri tanımlandı. Ayrıca, $(2n+1)-$boyutlu Cartan-Vranceanu manifoldlarındaki biharmonik eğrilerin, evolüt, involüt, Bertrand, Mannheim eğri çeşitleri, biharmonik eğrilerin eğrilik ve burulması bakımından karakterize edildi.

6. KAYNAKLAR

BIANCHI, L. 1928. Gruppi Continui e Finiti. Ed. Zanichelli, Bologna.

BİLİCİ, M. and ÇALIŞKAN, M. 2009. On the Involutes of the Spacelike Curve with a Timelike Binormal in Minkowski 3−Space. *International Mathematical Forum*, 4(31):1497-1509.

BUKCU, B. and KARACAN, M.K. 2007. On the Involute and Evolute Curves of the Spacelike Curve with a Spacelike Binormal in Minkowski 3−Space. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 2(5): 221-232.

BUKCU, B. and KARACAN, M.K. 2009. On Involute and Evolute Curves of Spacelike Curve with a Spacelike Principal Normal in Minkowski 3−Space. *International J. Math. Combin.*, 1: 27-37.

BOOTHBY, W.M. 2003. An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry. Academic Press, USA, 419 p.

CADDEO, R., MONTALDO, S. and ONICIUC, C. 2001. Biharmonic Submanifolds of S^3. *Internat. J. Math.*, 12:867-876.

CADDEO, R., ONICIUC, C. and PIU, P. 2004. Explicit Formulas for Non-geodesic Biharmonic Curves of the Heisenberg Group. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec.*, Torino 62:265-278.

CADDEO, R., MONTALDO, S., ONICIUC, C. and PIU, P. 2006. The Classification of Biharmonic Curves of Cartan-Vranceanu 3−Dimensional Spaces. *Modern trends in geometry and topology, Cluj Univ. Press, Cluj-Napoca* :121-131.

CARTAN, E. 1951. Leçons sur la Geometrie des Espaces de Riemann. Gauthier-Villars, Paris, 378 p.

CHENG, Y. and LIN, C. 2009. On the Generalized Bertrand Curves in Euclidean N−spaces. *Note di Matematica Note Mat.*, 29(2):33-39.

CHO, J.T., INOGUCHI, J. and LEE, J. 2007. Biharmonic Curves in 3−Dimensional Sasakian Space Forms. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 186(4):685-701.

CHOI, J.H., KANG, T.H., KIM, Y.H. 2012. Bertrand Curves in 3− Dimensional Space Forms. *Appl. Math. Comput.*, 219:1040-1046.

CHOI, J.H., KANG, T.H., KIM, Y.H. 2013. Mannheim Curves in 3− Dimensional Space Forms. *Bull. Korean Soc.*, 50:1099-1108.

DIMITRIC, I. 1992. Submanifolds of E^3 with Harmonic Mean Curvature Vector. *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 20:53-65.

DO CARMO, M.P. 1993. Riemannian Geometry. Birkhauser, Boston, 300 p.

FETCU, D. 2005. Biharmonic Curves in the Generalized Heisenberg Group. *Contributions to Algebra and Geometry*, 46(2):513-521.

FETCU, D. 2007. Biharmonic Curves in Cartan-Vranceanu $(2n+1)-$Dimensional Spaces. *Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova. Matematica*, 53(1):59-65.

GÖRGÜLÜ, A. and ÖZDEMİR, E. 1986. A Generealization of the Bertrand Curves as General Inclined Curves. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank., Series* A_1, 35:53-60.

HACISALİHOĞLU, H.H. 1993. Diferensiyel Geometri Cilt I. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, 269 s.

HACISALİHOĞLU, H.H. 1994. Diferensiyel Geometri Cilt II. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, 340 s.

HACISALİHOĞLU, H.H., 2004. Diferensiyel Geometri Cilt III. Nobel Basımevi, Ankara, 206 s.

HACISALİHOĞLU, H.H., 2006. Yüksek Diferansiyel Geometriye Giriş. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, 439 s.

KÖRPINAR, T. and TURHAN, E. 2011a. Involute Curve of a Biharmonic Curve in the Heisenberg Group $Heis^3$. *Middle -East Journal of Scientific Research,* 7(3):335-338.

KÖRPINAR, T. and TURHAN, E. 2011b. On Evolute Curve of a Biharmonic Curve in the Heisenberg Group $Heis^3$. *International Journal of Academic Research*, 3(2):342-348.

KÖRPINAR, T. and TURHAN, E. 2011c. Characterization Bertrand Curve in the Heisenberg Group $Heis^3$. *Int. J. Open Problems Complex Analysis*, 3(2):61-67.

KUHNEL, W. 2002. Differential Geometry: Curves-Surfaces-Manifolds. American Mathematical Society, USA, 358 p.

KÜLAHCI, M. and ERGÜT, M. 2009. Bertrand Curves of AW (k)$-$Type in Lorentzian Space. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 70(4): 1725-1731.

LIU, H. and WANG, F. 2008. Mannheim Partner Curves in 3$-$Space. *Journey of Geometry*, 88:120-126.

MATSUDA, H. and YOROZU, S. 2003. Notes on Bertrand Curves. *Yokohama Mathematical Journal*, 50:41-58.

MATSUDA, H. and YOROZU, S. 2009. On Generalized Mannheim Curves in Euclidean 4−Space. *Nihonkai Math. J.*, 20(1):33-56.

OZKALDI, S., ILARSLAN, K. and YAYLI, Y. 2011. On Mannheim Partner Curves in Dual Lorentzian Space. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 40(5):649–661.

ÖZTEKİN, H.B. and ERGÜT, M. 2011. Null Mannheim Curves in the Minkowski 3−Space E_1^3. *Turkish Journal of Mathematics*, 35(1):107-114.

OZTURK, U., KOC OZTURK, E.B. and ILARSLAN, K. 2013. On the Involute-Evolute of the Pseudonull Curve in Minkowski 3−Space. *Journal of Applied Mathematics*, 2013, Article ID 651495, 6 pages.

ÖZYILMAZ, E. and YILMAZ, S. 1992. Involute-Evolute Curve Couples in the Euclidean 4−Space. *Int. J. Open Problems Compt. Math.*, 2(2):168-174.

SABUNCUOĞLU, A. 2006. Diferensiyel Geometri. Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 440 s.

SATO, T. 2012. Pseudo-Spherical Evolutes of Curves on a Spacelike Surface in Three Dimensional Lorentz-Minkowski Space. *Journal of geometry,* 103(2): 319-331.

ŞAHİN, B. 2012. Manifoldların Diferensiyel Geometrisi. Nobel, Ankara, 294 s.

ŞENYURT, S. and BEKTAŞ, Ö. 2012. Timelike-Spacelike Mannheim Partner Curves in $\mathbb{R}_1^3$. *International Journal of the Physical Sciences,* 7(1):100-106.

ŞENYURT, S. and GÜR, S. 2012. Timelike-Spacelike Involute-Evolute Curve Couple on Dual Lorentzian Space. J. Math. Comput. Sci., 2(6):1808-1823.

TURHAN, E., KÖRPINAR, T. and LOPEZ-BONILLA, J. 2011. Characterization Mannheim Curves in the Heisenberg Group $Heis^3$. *Journal of Vectorial Relativity JVR,* 6(1):29-36.

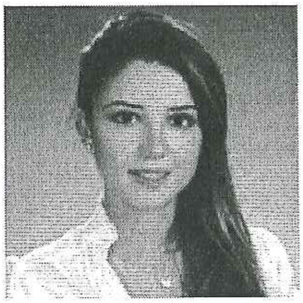
TURGUT, A. and ESİN, E. 1992. Involute-Evolute Curve Couples of Higher Order in $\mathbb{R}^n$ and Their Horizontal Lifts in $T\mathbb{R}^n$. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A_1*, 41(3):125-130.

VRANCEANU, G. 1947. Leçons de Geometrie Differentielle Vol 1. Ed. Acad. Rep. Pop. Roum., Bucharest, 422 p.

YILMAZ CEYLAN, A. and ERGİN, A.A. 2015a. Bertrand Mate of a Biharmonic Curve in Cartan-Vranceanu 3−Dimensional Space. *International Electronic Journal of Geometry*, 8(1):45-52.

YILMAZ CEYLAN, A. and ERGİN, A.A. 2015b. Mannheim Partner Curves in Cartan-Vranceanu 3−Space. *Filomat*, in press.

ÖZGEÇMİŞ



Ayşe Yılmaz Ceylan, 1985 yılında İskenderun'da doğdu. İlk öğrenimini Bursa'da, orta ve lise öğrenimini Antalya'da tamamladı. 2003 yılında girdiği Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2007 yılında mezun oldu. 2007 yılında Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. Yüksek lisans öğrenimini 2009 yılında Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde tamamlayarak, takip eden yıl Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında doktora öğrenimine başladı. Halen aynı birimde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır.