T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KÜTLELİ GRAVİTASYON TEORİLERİNDE SPİNLİ RELATİVİSTİK PARÇACIKLARIN KUANTUM MEKANİKSEL DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ

Ganim GEÇİM

DOKTORA TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI

2015

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KÜTLELİ GRAVİTASYON TEORİLERİNDE SPİNLİ RELATİVİSTİK PARÇACIKLARIN KUANTUM MEKANİKSEL DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ

Ganim GEÇİM

DOKTORA TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI

2015

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KÜTLELİ GRAVİTASYON TEORİLERİNDE SPİNLİ RELATİVİSTİK PARÇACIKLARIN KUANTUM MEKANİKSEL DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ

Ganim GEÇİM

DOKTORA TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI

Bu tez .../.../2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile kabul/red edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Yusuf SUCU

Prof. Dr. Nuri ÜNAL

Prof. Dr. İsmail BOZTOSUN

Doç. Dr. Timur ŞAHİN

Doç. Dr. Özcan SERT

ÖZET

KÜTLELİ GRAVİTASYON TEORİLERİNDE SPİNLİ RELATİVİSTİK PARÇACIKLARIN KUANTUM MEKANİKSEL DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ

Ganim GEÇİM

Doktora Tezi, Fizik Anabilim Dalı
Danışman : Yrd. Doç. Dr. Yusuf SUCU
Ağustos 2015, 91 sayfa

Kara delikler, kütleçekimin kuantizasyonu hakkındaki bir fikrin test edilebileceği kozmik bir laboratuvar olduğundan modern fizikte önemli bir yere sahiplerdir. Ayrıca, tutarlı bir kuantum kütleçekim kuramının oluşturulabileceğine dair en önemli delil Hawking radyasyonu olarak bilinen kara delik ışımasıdır. Bu bağlamda, tezin birinci kısmında, 2+1 boyutlu yeni kütleli gravitasyon kuramı çercevesinde elde edilen yeni-tip ve warped-AdS_3 kara deliklerinin Hawking ışıması, spin-0, spin-1/2 ve spin-1 parçacıkları için kuantum tünelleme yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Buna ek olarak, cisimsi (extended; string-like) spin-0 ve spin-1/2 parçacıklarının, kara delik özelliklerine ve tünelleme yapan parçacıkların toplam açısal momentumuna, kütlesine ve enerjisine bağlı olan Hawking ışıması hesaplandı. Aynı zamanda, cisimsi spin-0 ve spin-1/2 parçacıklarının farklı Hawking ışımasına, noktasal spin-0 ve spin-1/2 parçacıkların ise aynı Hawking ışımasına sahip olduklarını gözlemlenmiştir. Öte yandan, son gözlemsel verilere göre, evrenimiz ivmelenerek genişlemektedir. İvmelenerek genişlemenin kaynağı, modern kozmolojide hala önemli bir problem olduğu kabul edilmektedir. Bu nedenle, tezin ikinci kısmında, 2+1 boyutlu yeni kütleli gravitasyon kuramı kapsamında, fermiyonik ve bozonik alanlar ayrı ayrı gravitasyonel alan ile çiftlenim yaptırılmış ve böylelikle evrenin ivmelenerek genişleme problemi incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Graviton, Kara delik, Tünelleme, Hawking Işıması.

JÜRİ: Yrd. Doç. Dr. Yusuf SUCU (Danışman)

Prof. Dr. Nuri ÜNAL

Prof. Dr. İsmail BOZTOSUN

Doç. Dr. Timur ŞAHİN

Doç. Dr. Özcan SERT

ABSTRACT

INVESTIGATION OF THE QUANTUM MECHANICAL BEHAVIOR OF THE SPINNING RELATIVISTIC PARTICLES IN THE MASSIVE GRAVITY THEORIES

Ganim GEÇİM

PhD Thesis, in Physics
Supervisor : Asst. Prof. Dr. Yusuf SUCU
August 2015, 91 pages

Black holes have an important position in the modern physics since they are cosmological laboratories to test an idea about the quantization of the gravity. Moreover, the most important evidence in order to form a consistent quantum gravity theory is a black hole radiation, known as Hawking radiation. In this connection, in the first part of the thesis, Hawking radiation from new-type and warped-AdS_3 black holes obtained in the framework of of 2+1 dimensional new massive gravity, are scrutinized by using the quantum tunnelling method for spin-0, spin-1/2 and spin-1 particles. Additionally, Hawking radiation of the extended particles of spin-0 and spin-1/2 depending on black hole's properties as well as total angular momentum, energy and mass of tunnelling particles is calculated. At the same time, while Hawking radiation from extended particles of spin-0 and spin-1/2 is different, it observed to be same for point-like particles of spin-0 and spin-1/2. On the other hand, according to the recent observational data, our universe has an accelerating expansion. The source of accelerating expansion is still accepted to be a major problem in the modern cosmology. Therefore, in the second part of the study, by coupling the gravitational field in the context of the 2+1 dimensional new massive gravity theory with the fermionic and bosonic fields, expansion problem of the universe is investigated.

KEYWORDS: Graviton, Black Hole, Hawking Radiation, Tunnelling.

COMMITTEE: Asst. Prof. Dr. Yusuf SUCU (Supervisor)

Prof. Dr. Nuri ÜNAL

Prof. Dr. İsmail BOZTOSUN

Assoc. Prof. Dr. Timur ŞAHİN

Assoc. Prof. Dr. Özcan SERT

ÖNSÖZ

Eğri uzay-zamanda kuantum alan kuramının formalizmi, Planck ölçeğinde elementer parçacıkların ve gravitasyonun davranışının araştırılabileceği bir çerçeve sağlamaktadır. Kara deliklerin bir entropiye sahip olması, genişleyen evrenin ve kara deliğin parçacık yaratmaları, parçacıkların kara deliklerden kuantum mekaniksel olarak tünellemeleri ve oluşturdukları Hawking radyasyonu gibi olaylar bu kuram kapsamında incelenmektedir. Öte yandan, modern kozmolojinin en önemli problemlerinden biri olan evrenin ivmeli genişlemesini açıklamak için, skaler, bozonik ve fermiyonik alanların kullanılması önemli bir adımdır.

Bu tür fiziksel olayların iyi bir şekilde anlaşılması, oluşturulacak tutarlı bir kuantum gravitasyon kuramı açısından büyük bir öneme sahiptir.

Bütün gelişmelere rağmen, güncelliğini ve gizemini korumaya devam eden temel fiziğin uç sınırlarındaki problemlerle yakından ilişkili olan bu konularda bana çalışma fırsatı sağlayan, bu tezin oluşmasında büyük emekleri olan ve doktora eğitimim boyunca bilgi ve desteğini esirgemeyen danışmanım sayın Yrd. Doç. Dr. Yusuf SUCU' ya teşekkür ederim. Tez izleme komitesi üyeleri sayın Prof. Dr. Nuri ÜNAL ve sayın Prof. Dr. Veli KURT' a değerli yorum ve destekleri için teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$a(t)$	Ölçek çarpanı
$\beta_\mu(x)$	Eğri uzay-zamanda Kemmer matrisleri
$C_{\mu\nu}$	Cotton tensörü
$e^{\mu}_{(i)}(x)$	Triadlar
$\varepsilon^{\lambda\mu\nu}$	3 boyutta Levi-Civita tensörü
$\eta_{(i)(j)}$	(2+1) boyutlu düz uzay-zaman metrik tensörü
g	Metrik tensörün determinantı
$g_{\mu\nu}$	Metrik tensörü
$G_{\mu\nu}$	Einstein tensörü
Γ	Tünelleme olasılığı
$\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}$	Christoffell sembolleri
H	Hubble parametresi
$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	Planck sabiti
I	Birim matris
κ	Yüzey kütleçekimi (surface gravity)
$\pounds_{\widetilde{X}}$	$\widetilde{X}$ Vektör alanı boyunca Lie türevi
Λ	Kozmolojik sabit
$s^{\lambda\nu}(x)$	Spin operatorü
m ve λ	Graviton için kütle parametreleri
M	Monifold
$\Omega_{+/-}$	Warped-AdS_3 Karadeliğinin dış/iç olay ufku açısal hızı
ω_{QNM}	Karadeliğin yarı-normal mod frekansı
Φ	Skaler alan fonksiyonu
$\widetilde{\Phi}$	Genelleştirilmiş skaler alanı
ψ	Dirac spinörü
Ψ	Dirac spinörünün bilineer fonksiyonu
$\widetilde{\Psi}$	Genelleştirilmiş Dirac spinör alanı
Ψ_{DKP}	DKP için dalga fonksiyonu
R	Ricci skaleri
$R_{\mu\nu}$	Ricci tensörü
S	Klasik eylem fonksiyonu
$s^{\lambda\nu}(x)$	spin-1/2 için spin bağlantı katsayıları
Σ_μ	spin-1 parçacıkları için spin bağlantı katsayıları
$\overline{\sigma}^{\mu}(x)$	(2+1) boyutlu eğri uzay-zamanda Dirac matrisleri
$\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$	Pauli matrisleri
T_H	Hawking sıcaklığı
T_qM	M Manifoldunun q noktasındaki teğet uzayı
$\widetilde{X}$	Vektör alanı

Kısaltmalar

AdS_3	2+1 boyutlu Anti-de Sitter
BHT	Bergshoeff-Hohm-Townsend
BTZ	Banados-Teitelboim-Zanelli
CFS	Chandrasekhar-Friedman-Schutz
C-S	Chern-Simons
DKP	Duffin-Kemmer-Petiau
E-H	Einstein-Hilbert
FRW	Friedmann-Robertson-Walker
KG	Klein-Gordon
NMG	New Massive Gravity
TMG	Topologically Massive Gravity

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Kuantum mekaniği ve Einstein genel görelilik kuramları, 20. yüzyılın başlarında inşa edilmiş iki büyük kuramdır. Kuantum mekaniği maddenin mikroskobik davranışını deneylerle uyumlu bir şekilde açıklarken, genel görelilik kuramı ise maddenin makroskobik davranışını birçok gözlemsel veri ile uyumlu bir şekilde açıklamaktadır. Maddenin farklı enerji ölçeklerindeki olayları açıklamaya çalışan bu iki kuramın birleştirilmesi uğraşı, yani kuantum kütleçekim kuramı inşa etme çabası, 1930'larda başlayan ve günümüze kadar süregelen yoğun çalışmalara rağmen tam anlamıyla sonuçlandırılamamış, modern kuramsal fiziğin en önemli araştırma alanlarından biridir. Genel görelilik kuramının alan denklemlerinin doğrusaL olmayışı, tutarlı bir kuantum kütleçekim kuramının oluşturulmasındaki önemli engellerden biridir. Çünkü, bu durum inşa edilecek kuantum kütleçekim kuramının renormalize olmasını zorlaştırmaktadır. Bir diğer önemli sorun ise genel görelilik kuramının uzay-zamanın geometrik bir kuramı olmasıdır. Bu durumda ise, kuantize kütleçekim uzay-zaman dokusunun kuantize edilmesi anlamına gelir ki bunun matematiksel olarak nasıl kurulacağı ve fiziksel olarak ne anlama geldiği tam olarak bilinmemektedir (Carlip 2005a).

Gravitasyon kuramların içerdikleri matematiksel ve fiziksel güçlükler nedeniyle 2+1 boyutlu uzay-zamanda incelenmeleri daha kolay olur. Bundan dolayı 2+1 boyutlu gravitasyonel kuramları, son zamanlarda git gide önemi artan araştırma alanları arasındadır (Carlip 2005a). Özellikle, Deser ve Jackiw (1984) ve Deser vd (1984) tarafından bu konuda yapılan çalışmalar dönüm noktası olmuştur ve bu çalışmalardan sonra 2+1 buyutlu genel görelilik kuramları oldukça popüler olmuştur. Ancak, Einstein'ın genel görelilik kuramı 2+1 boyutlu uzay-zamanda (kozmolojik sabitin Λ=0 ya da $\Lambda \neq 0$ durumları için), madde uzay-zamanı sadece lokal olarak bükmekte ve bu nedenle gravitasyon alanın dinamik serbestlik derecesi sıfır olmaktadır (Bakas ve Sourdis 2011). Bu durumda, 2+1 boyutlu uzay-zamanda gravitasyon dalga çözümleri bulunamayacak ve dolayısıyla standart modelin öngördüğü aracı parçacık olan graviton söz konusu olmayacaktır (Barrow vd 1986, Giddings vd 1984). Ayrıca, kozmolojik sabitin sıfır olduğu durumda karadelik çözümü de bulunmamaktadır (Chan ve Mann 1994). Üstelik, kuramın zayıf alan yaklaşıklığında Newtonian limiti elde edilememektedir (Macias ve Camacho 2005). Bu sorunların 2+1 boyutlu genel göreliliğin yeniden formüle edilmesiyle ortadan kalkacağı görülmüştür. Bunun için iki temel yaklaşım söz konusudur; Birinci yaklaşım olarak, Einstein-Hilbert eylem fonksiyonuna, gravitasyonel Chern-Simons terimi eklenmesidir (Deser vd 1982). Bu durumda elde edilen kuram topolojik kütleli gravitasyon kuramı (Topologically Massive Gravity, TGM) olarak bilinmektedir (Bouchareb ve Clement 2007, Clement 1994, Nutku 1993). Bu kuram helisiteli graviton çözümlerini vermektedir, fakat bir helisite durumunda graviton kütleli iken diğer helisite durumunda ise graviton kütlesiz olmaktadır (Bakas ve Sourdis 2011). Ayrıca topolojik kütleli gravitasyon kuramı renormalize edilebilir kuantum alanı görünümündedir (Deser ve Yang 1990, Keszthelyi ve Kleppe 1992, Oda 2009). İkinci yaklaşımda ise, Einstein-Hilbert eylem fonksiyonuna, Ricci eğrilik tensorünün kuadratik terimi, yani yüksek mertebeden türev içeren terimler eklenmesidir. Bu yaklaşımdan ortaya çıkan kuram ise, yeni kütleli gravitasyon kuramı (New Massive Gravity, NMG) olarak bilinmektedir (Accioly vd 2011, Ahmedov ve Aliev 2011, Bergshoeff vd 2009a,b). Topolojik kütleli gravitasyon kuramının aksine yeni kütleli gravitasyon kuramında her iki helisite durumunda graviton aynı kütleye sahiptir (Deser ve Yang 1990). Ayrıca, kütleli gravitasyon kuramları, Newtonian limite sahip olmaları, gravitasyonel dalga çözümlerini içermeleri (graviton'un varolması) ve renormalize edilebilir olmaları bakımından, gravitasyonun kuantum etkilerinin araştırılabileceği, yüksek boyutlu kütleçekim kuramlarına kıyasla fiziksel ve matematiksel bakımdan daha basit ve kullanışlıdırlar.

2+1 boyutlu gravitasyon kuramlarında bir başka önemli gelişme, standart Einstein genel görelilik kuramında kozmolojik sabitin negatif alınması sonucu elde edilen BTZ (Banados-Teitelboim-Zanelli) kara delik çözümleridir (Banados vd 1992, 1993). Bu kuramlarda, kozmolojik sabitin negatif olduğu durumlarda, asimptotik olarak anti-de Sitter uzay-zamanı vermektedir. Yani, BTZ karadeliği lokal olarak anti-de Sitter (AdS) uzayına izometriktir. Hatta, BTZ kara deliği, sabit ve negatif eğrilikli bir uzay-zamanı tanımlamasına rağmen gerçek bir kara deliktir (Carlip 2005b). Yani, merkezinde bir uzay-zaman eğrilik tekilliği içermez. Bununla birlikte olay ufkuna sahiptir. Ayrıca dönme (rotasyon) hareketi olması durumunda, iç olay ufku olarak adlandırılan ikinci bir ufka sahiptir (Macias ve Camacho 2005). Öte yandan, benzer kara delik çözümleri kütleli gravitasyon kuramları kapsamında da elde edilmiş (Chen ve Ning 2010, Clement 2009, Maeda 2011, Moussa vd 2003) ve bu kara deliklerin kütle, açısal momentum ve entropi gibi özellikleri incelenmiştir (Bouchareb ve Clement 2007, Giribet 2009, Nam vd 2010). Bu kara deliklerden statik yeni tip kara deliği, yeni kütleli gravitasyon kuramının eylem fonksiyonunda bulunan parametrelerin sadece özel kombinasyonalarından elde edilen ve asimptotik olarak da bir anti-de Sitter kara deliğidir (Bergshoeff vd 2009b, Kwon vd 2011). Statik yeni tip kara delik, iç ve dış olmak üzere iki olay ufkuna ve eğrilik tekilliğine sahiptir. Öte yandan bir diğer önemli kara delik çözümü ise, topolojik kütleli gravitasyon kuramı kapsamında elde edilen warped-AdS_3 kara deliğidir (Moussa vd 2003). Warped-AdS_3 kara deliği de iki olay ufkuna sahiptir. Öte yandan warped-AdS_3 kara deliği metriğin parametreleri cinsinden çeşitli değerleri için kara deliği, matematiksel ve fiziksel bakımdan farklı karakteristik özellikler sergiler. Bu yeni kara delik çözümleri, özel durumlarda BTZ çözümlerine indirgenir.

Atom altı parçacıkların düşük hızlardaki, yani düşük enerjilerdeki davranışları Schrödinger denklemi yardımıyla deneylerle uyumlu bir şekilde açıklanmaktadır. Fakat bu parçacıkların yüksek hızlardaki davranışları incelenmek istendiğinde Schrödinger denklemi doğru bir şekilde işlememektedir. Söz konusu denklem zaten Lorentz dönüşümleri altında invaryant değildir. Bu nedenle, temel parçacıkların davranışlarını betimleyen ve aynı zamanda Einstein özel görelilik kuramı ile uyumlu bir relativistik kuantum mekaniksel denkleme ihtiyaç vardır. Bu amaç doğrultusunda çeşitli temel parçacıklar için yazılan relativistik kuantum mekaniksel denklemler şu şekilde sıralanabilir: Spin-0 kütleli veya kütlesiz parçacıkları betimleyen Klein-Gordon denklemi, Spin-1/2 kütleli parçacıkları betimleyen Dirac denklemi, Spin-1/2 kütlesiz parçacıklar için Weyl denklemi, kütleli spin-0 ve spin-1 parçacıkları için Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) denklemi, spin-3/2 kütleli parçacıklar için Rarita-Schwinger denklemi (Greiner 2000).

Mikroskobik evrende parçacıklar üzerinde kütleçekim etkisini incelemek için, eğri uzay-zamanda relativistik kuantum kuramına ihtiyaç vardır. Bunun için yukarıda verilen denklemler eğri uzay-zamana genellenir. Düz uzay-zamanda göreli kuantum mekaniğinin alan denklemlerinden, genel göreli kuantum alan denklemlerine 3+1 uzay-zaman boyutunda tetrad formalizmi kullanılarak geçilebilir (Birrel ve Davies 1982). Gerek 3+1 boyutlu uzay-zamanda, gerekse 2+1 boyutlu uzay-zamanda yazılan göreli kuantum mekaniksel denklemler, temsil ettikleri parçacıkların çeşitli uzay-zamanlardaki fiziksel özelliklerini incelemede çok işe yararlar. Bu denklemlerin çeşitli evren modellerindeki çözümleri, kozmoloji, astrofizik ve ayrıca parçacık yaratılması süreçleri açısından büyük bir öneme sahiptir. 3+1 boyutlu uzay-zamanda bu bağlamda yapılan çalışmalar, Fock (1929) ve Tetrode'un (1928) yapmış oldukları çalışmalara kadar eskiye dayanır. Brill ve Wheeler (1957) 3+1 boyutlu Schwarzschild kara deliği uzay-zamanında kütlesiz Dirac denklemini yazmış ve nötrinoların kütleçekim alanı ile etkileşmesine bağlı olarak nötrino-antinötrino çiftinin yaratılma sürecini incelemişlerdir. Genişleyen evrende spin-0 ve spin-1/2 parçacıklarının yaratılması olayı, ilk defa Parker (1968, 1969, 1970) tarafından Friedmann-Robertson-Walker (FRW) evren modeli kullanılarak incelenmiştir. Bunun dışında, kütleli Spin-1/2 parçacıkların yaratılması olayı için, Dirac denkleminin Bianchi tip-I evren modelinde, de Sitter evreninde ve uzaysal olarak düz FRW evreninde elde edilen çözümler örnek olarak verilebilir (Campos ve Verdaguer 1992, Davies 1975, Lotze 1986, Moradi 2008, Villalba ve Greiner 2001, Villalba 2005, 1984). Skaler parçacıkları (Spin-0) betimleyen Klein-Gordon (KG) denklemi, düz FRW evreninde anizotropik evren modelleri gibi farklı uzay-zaman modellerinde çözülmüş ve skaler parçacığın yaratılma olasılıkları tartışılmıştır (Campos ve Verdaguer 1992, Davies 1975, Lotze 1986, Moradi 2008, Villalba ve Greiner 2001, Villalba 2005, 1984). Sucu ve Ünal (2002), klasik zitterbewegung modelini (Sucu ve Ünal 2012, Ünal 1997) kullanarak, kütlesiz spin-1 vektör parçacığı olan foton için kuantum mekaniksel dalga denklemi yazmış ve bu denklemin 3+1 boyutlu FRW evrenindeki çözümlerini Maxwell denklemleri ile olan uyumunu tartışmışlardır. Literatürde, özellikle Klein-Gordon ve Dirac denklemleri pek çok farklı kozmolojik modellerdeki çözümleri, ayrıntılı bir biçimde tartışılmıştır (Barut ve Duru 1987, Harriott ve Williams 2001, Ramezan ve Khorrami 2010, Sucu ve Ünal 2004, 2007, Zecca 1997). Ayrıca, Spin-1 parçacıkları için Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) denklemi (Sucu ve Ünal 2005) ve spin3/2 parçacıklar için Rarita-Schwinger denklemin çözümleri, çeşitli evren modelleri kapsamında incelenmiştir (Christodoulakis vd 1988, del Castillo ve Ortigoza 1984, Gibbons 1976, Szereszewski ve Tafel 2002).

Kara delikler doğanın en gizemli, büyüleyici ve merak uyandırıcı nesnelerinden biridir. Klasik olarak bir karadelik ışığın dahi kaçamıyacağı, kütleçekimin çok şiddetli olduğu uzay-zaman bölgesi olarak kabul edilir. Bir kara delik sadece üç temel fiziksel parametre ile karakterize edilir: kütle, elektriksel yük ve açısal momentum. Klasik anlamda, bir kara deliğin olay ufku çizgisini geçen her şey kara deliğe düşmekte ve bir daha hiç bir şekilde kara delikten kaçamamaktadır. Ayrıca, kara deliklerin bu özelliğinden dolayı ısısal dengede olmaları söz konusu olmadığından, bir karadelik için sıcaklık tanımı yapmak imkansızdır. Bununla birlikte, yinede termodinamik yasaların kara deliklere uygulanması fikri ilk olarak Greif (1969) tarafından öne sürüldü. Öte yandan, Bekenstein (1973) ve Bardeen vd (1973), bir kara deliğin temel özellikleri ile termodinamiğin temel yasaları arasındaki benzerliğe dikkat çekmişler ve kara deliğin bir entropiye ve sıcaklığa sahip olabileceğini göstermişlerdir. Bu benzerliğe dayanarak, kara deliklerin termodinamiksel özelliklerini dört temel yasa ile açıklamışlardır. Öte yandan, Hawking (1974, 1975) kuantum vakum dalgalanmaları fikrini kullanarak, Schwarzchild kara deliği olay ufku civarında kütlesiz skaler alanının asimptotik geçmiş ve gelecek vacum durumlarının Bogoliubov katsayılarını hesaplayarak, Schwarzchild kara deliği tarafından salınan parçacıklar için bir spektrum elde etmiştir. Bu spektrumun kara cisim spektrumu ile özdeş olduğunu ve sahip olduğu sıcaklığın da tam olarak Bekenstein (1973) ve Bardeen vd (1973) analoji yaparak buldukları sıcaklık ifadesine eşit olduğunu göstermiştir. Bir kara deliğin ışıma yapabileceği (bu literatürde Hawking radyasyonu olarak bilinir) kuantum mekaniksel olarak keşfedilmesi, makroskobik bir cisim olan kara delikleri kuantum mekeniği ve termodinamik yasalar çerçevesinde incelemeye başlanmalarına bir temel oluşturur. Çünkü bu keşifle birlikte genel görelilik, termodinamik ve kuantum mekaniği gibi birbirinden ayrı gözüken kuramlar arasında tutarlı bir bağıntı kurulabileceğinin mümkün olduğu görülmüştür. Bununla bbirlikte; günümüzde, Hawking radyasyonunu kuantum mekaniksel olarak hesaplamak için bir çok yöntem geliştirilmiştir. Son zamanlarda bir çok kara deliğin radyasyonun sıcaklığının hesaplanmasında kullanılan başarılı yöntemlerden biri, relativistik spinli parçacıkların kara delikten kuantum mekaniksel olarak tünellemesi ilkesine dayanan Hamilton-Jacobi yöntemidir (Kerner ve Mann 2008, Kraus ve Wilczek 1994, Li ve Ren 2008, Parikh ve Wilczek 2000, Shankaranarayanan vd 2001, Srinivasan ve Padmanabhan 1999). Bu yöntem, olay ufkunu geçen parçacığı temsil eden ve klasik olarak yasak olan eylem fonksiyonunun kompleks kısmının hesabına dayanır. Kerr, Taub-NUT-AdS kara deliğinden ve Friedmann-Walker-Robertson (FWR) evreninde Dirac parçacığının (Kerner ve Mann 2008, Li ve Ren 2008, Li vd 2009, 2008, Xiong ve Qiang 1984, Yale 2011) ve spin-3/2 gravitino parçacığının (Yale ve Mann 2009) tünelleme olayları bu yöntemle incelenmiştir.

Standart kozmolojiye göre, evrendeki maddenin pozitif bir basınca ve çekici bir kuvvete neden olduğundan; evrenin genişleme hızının yavaşlaması gerektiği öngörülmektedir (Ross 1997). Halbuki, son yıllarda yapılan Süpernova-Ia gözlemlerine göre, evrenin ivmelenerek genişlediği ortaya çıkmıştır (Perlmutter vd 1999, Ries vd 1998). Bu gözlemsel sonucu açıklayabilmek için modifiye gravitasyon kuramları olarak bilinen alternatif modeller ileri sürülmüştür. Bu modellerde, evrenin toplam madde miktarının yaklaşık %70'ini oluşturduğuna inanılan karanlık enerjinin ivmeli genişlemeye neden olduğu öngörülmektedir. Vakum enerjisi olarak da yorumlanan kozmolojik sabit, bu ivmelenerek genişlemenin, karanlık enerjinin en basit açıklamasıdır. Alternatif bir yaklaşım ise, fermiyonik ve bozonik alanların evrenin ivmeli genişlemesine neden olan alanın kaynağı olarak ele almaktır. Bu bağlamda, fermiyonik alanın, evrenin erken dönemindeki genişleme evresinde etkin olduğu düşünülen hipotetik parçacık "inflaton" gibi davrandığı, öte yandan, günümüz evrenindeki ivmeli genişlemeye neden olduğu kabul edilen karanlık enerji gibi davrandığına yönelik, hem standart 3+1 boyutlu, hem de 2+1 boyutlu Einstein kütleçekim kuramı çerçevesinde çalışmalar mevcuttur (de Souza ve Kremer 2011, Geçim vd 2015b, Ribas vd 2005).

Tez kapsamında 2+1 boyutlu kütleli gravitasyon kuramları temelinde kara deliklerin Hawking ışımaları, relativistik spin-0, spin-1/2 ve spin-1 parçacıklarının kuantum mekaniksel tünelleme yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır. Bunun yanı sıra, spin-0, ve spin-1/2 parçacıklarının cisimsi (extended) yapıda olmaları durumunda; "kuantum kütleçekimin" tünelleme olayı ve Hawking sıcaklığı üzerindeki etkileri incelenmiştir. Öte yandan, fermiyonik ve bozonik alanı temsil eden eylem fonksiyonları, ayrı ayrı, gravitasyon alan eylem fonksiyonu ile minimal bir şekilde çiftlenimlenerek, bu alanların kozmik modeller üzerindeki etkileri araştırılmıştır.

Tezin kuramsal bilgiler ve kaynak taraması bölümünde, 2+1 boyutlu kütleli gravitasyon kuramları hakkında bilgi verilmiştir. Bu kuramların çözümleri arasında yer alan yeni-tip ve warped-AdS$_3$ kara deliklerinin genel özellikleri özetlenmiştir. Öte yandan, 2+1 boyutlu relativistik kuantum mekaniksel dalga denklemlerinden olan Klein-Gordon, Dirac ve Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) denklemleri eğrisel uzay-zamanlarda tanıtılmıştır. Materyal ve metod bölümünde, tez için gerekli olan matematiksel yöntemler verilmeden önce, kara delik termodinamiği ve Hawking ısıması olarak bilinen kara delik radyasyonu hakkında bilgi verilmiş, sonra kullanacağımız hesap yöntemi olarak Hamilton-Jacobi yöntemi tanıtılmıştır. Daha sonra, kara delikten tünelleme yaparak Hawking radyasyonuna neden olan parçacıklar üzerindeki kuantum kütleçekim etkilerin hesaba katılması için, genelleştirilmiş Heisenberg belirsizlik ilkesi çerçevesinde, relativistik kuantum mekaniksel dalda denklemleri 2+1 boyutlu eğri uzay-zamanda yeniden düzenlenmiştir. Ayrıca, fizikte simetri ile korumun yasaları arasındaki bağı kuran ve alan denklemlerin çözümünde kullanışlı bir yöntem olan Noether teoremi verilmiştir. Son olarak, Huen diferansiyel denklemleri ve bunların çözüm aileleri hakkında kısaca bilgi verilmiştir.

Tezin bulgular bölümü şu kısımlardan oluşmaktadır. Birinci kısımda, Yeni-tip kara delik uzay-zamanında Dirac ve DKP denklemlerinin çözümleri elde edilmiştir. İkinci kısımda, warped-AdS$_3$ kara deliği metriği kullanılarak Dirac denkleminin çözümleri elde edilmiş ve yarı-normal modlar (quasi-normal modes) bulunmuştur. Üçüncü kısımda, yeni-tip kara deliğin Hawking sıcaklığı spin-0, spin-1/2 ve spin-1 parçacıklarının kuantum mekaniksel olarak tünelleme olaylarından ayrı ayrı bulunmuştur. Ayrıca, aynı metrik için, spin-0 ve spin-1/2 parçacıklarının tünellemeleri esnasında kuantum kütleçekim faktörünün etkileri hesaplanmış ve standart sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Dördüncü kısımda ise, Warped anti-de Sitter kara deliğinin Hawking sıcaklığı spin-0, spin-1/2 ve spin-1 parçacıklarının tünellemesi yoluyla incelenmiştir. Ayrıca, kuantum kütleçekim etkilerin warped-AdS$_3$ kara deliğinin Hawking sıcaklığı üzerindeki katkısını hesaplamak için spin-0 ve spin-1/2 cisimsi (extended) parçacıklarının tünelleme olayı analiz edilmiştir. Dördüncü kısımda ise, yeni kütleli gravitasyon kuramı kapsamında, skaler alan, fermiyonik alan ve vektör alan eylem fonksiyonları ayrı ayrı kütleçekim eylem fonksiyonu ile minimal bir şekilde çiftlenim (coupling) edilerek kara delik ve kozmolojik çözümlerin varlığı araştırılmıştır.

Tartışma bölümünde, bulgular kısmında elde edilen çözümler, bazı özel durumlar için ayrı ayrı ele alınıp tartışılmıştır. Sonuç kısmında ise, tezin genel bir değerlendirmesi yapılmıştır.

2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI

2.1. (2+1) boyutlu Kütleli Gravitasyon Teorileri

2+1 boyutlu kütleçekim kuramları üzerindeki çalışmalar, noktasal bir ve iki kaynak cismin, statik çözümlerinin davranışlarını ilk inceleyen Staruszkiewicz'in (1963) çalışmasına kadar dayanır. Özellikle, Deser vd (1984) ve Witten'ın (1988, 1989) çalışmaları bu alanda yeni ufukların kapılarını açılmasına neden olmuştur. Son zamanlarda, 2+1 boyutlu kuramlar, genel görelilik, yüksek enerji parçacık fiziği, yoğun madde fiziği (özellikle grafen fiziği), topolojik alan kuramları ve sicim kuramları gibi geniş bir yelpazade yaygın olarak çalışılmaktadır. 2+1 boyutlu genel görelilik çerçevesinde, kara delik (Banados vd 1992), kurt delik (Brill 2000) ve kütleçekim dalgaları (Husain 1994) çözümleri elde edilmiştir. Öte yandan, grafenin doğal yapısı gereği, grafen içerinde elektronun davranışı 2+1 boyutlu uzay-zamanda Dirac denkleminin çözümleri, bu alandaki en popüler çalışmalardır (Kosinski vd 2012).

Standart Einstein genel görelilik kuramının, 2+1 boyutlu uzay-zamanda dinamik serbestlik derecesinin sıfır olması ve Newtonian limitinin olmaması, 2+1 boyutlu modifiye görelilik kuramların oluşturulmasına ön ayak olmuştur. Ancak bu modifiye kuramlar çerçevesinde; kütleçekim alanına eşlik ettiği kabul edilen graviton parçığının, 2+1 boyutlu uzay-zamanda bir kütleye sahip olduğunu ön gören iki yaklaşım bulunmaktadır: Birinci yaklaşımda, standart 2+1 boyutlu Einstein-Hilbert eylem fonksiyonuna, gravitasyonel Chern-Simons terimi eklenir (Deser ve Yang 1990, Keszthelyi ve Kleppe 1992, Oda 2009). Sonuçta elde edilen kuram topolojik kütleli gravitasyon kuramı (Topologically Massive Gravity, TGM) olarak bilinmektedir. Topolojik kütleli gravitasyon kuramı aşağıdaki eylem fonksiyonu ile tanımlanır; Einstain-Hilbert eylem fonksiyonu,

$$S_{E-H} = \frac{1}{\kappa^2} \int d^3x \sqrt{|g|}\,(R - 2\Lambda) \tag{2.1}$$

ve Chern-Simons eylem fonksiyonu da,

$$S_{C-S} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^3x \sqrt{|g|} \varepsilon^{\lambda\mu\nu} \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\sigma} \left(\partial_\mu \Gamma^{\sigma}{}_{\rho\nu} + \frac{2}{3} \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\tau} \Gamma^{\tau}{}_{\rho\nu} \right) \tag{2.2}$$

olmak üzere,

$$S = S_{E-H} + \frac{1}{\mu} S_{C-S} \tag{2.3}$$

ile verilmektedir. Burada, μ gravitonun kütlesidir ve $\varepsilon^{\lambda\mu\nu}$ Levi-Civita sembolü, $\Gamma^{\sigma}_{\rho\nu}$ ise Christoffel sembolüdür. Denklem (2.3)' ün, $g_{\mu\nu}$ metrik tensörüne göre varyasyonunu aldığımızda aşağıdaki hareket denklemlerini bulmuş oluruz;

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} S_{E-H} + \frac{1}{\mu} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} S_{C-S} = 0,$$

buradan, S_{E-H} eyleminin $g_{\mu\nu}$ metrik tensörüne göre varyasyonundan

$$\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} S_{E-H} = G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu},$$

$G_{\mu\nu}$, Einstein tensörü, ve S_{C-S} eyleminin $g_{\mu\nu}$ metrik tensörüne göre varyasyonundan

$$\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} S_{C-S} = C_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu}{}^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R \right),$$

$C_{\mu\nu}$, Cotton tensörü olmak üzere, topolojik kütleli gravitasyon kuramının hareket denklemleri,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} + \frac{1}{\mu} C_{\mu\nu} = 0 \tag{2.4}$$

elde edilir.

İkinci yaklaşımda ise, 2+1 boyutlu Einstein-Hilbert eylem fonksiyonuna, Ricci eğrilik tensorünün kuadratik terimi, yani yüksek mertebeden türevler içeren terim koyulur (Accioly vd 2011, Bergshoeff vd 2009a,b). Bu kuram ise yeni kütleli gravitasyon kuramı (New Massive Gravity, NMG) olarak bilinmektedir. Bergshoeff, Hohm ve Townsend (2009a, 2009b) tarafından önerilen bu yeni kütleli gravitasyon kuramı için eylem fonksiyonu,

$$S_{BHT} = \frac{1}{\kappa^2} \int d^3x \sqrt{|g|} \left(R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{3}{8} R^2 \right) \tag{2.5}$$

olmak üzere, genel eylem fonksiyonu;

$$S = S_{E-H} - \frac{1}{m^2} S_{BHT} \tag{2.6}$$

ile verilir. Burada, m^2 pozitif veya negatif değerler alabilen gravitonun kütle parametresidir (Bergshoeff vd 2009b). $m^2 \to \mp\infty$ limitinde, Yeni kütleli gravitasyon kuramı 2+1 boyutlu Eistein gravitasyon kuramına indirgenir. Denklem (2.6)'ün $g_{\mu\nu}$ metrik tensörüne göre varyasyon alınır, ve

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{BHT}}{\delta g_{\mu\nu}} &= \frac{1}{2} K_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \left(\frac{3}{2} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{13}{16} R^2 \right) + \frac{9}{4} R R_{\mu\nu} - 4 R_{\mu\alpha} R^{\alpha}_{\nu} \\ &+ \frac{1}{4} \left(4 \nabla^2 R_{\mu\nu} - \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} R - g_{\mu\nu} \nabla^2 R \right) \end{aligned}$$

şeklinde düzenlenirse, hareket denklemleri

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} - \frac{1}{2m^2} K_{\mu\nu} = 0, \tag{2.7}$$

olarak bulunur.

Yeni kütleli gravitasyon kuramının Denklem (2.7) ile verilen hareket denklemleri, BTZ kara deliği, Lifshitz-tipi kara delik, yeni-tip kara delik ve warped AdS_3 kara delik gibi çözümleri sağlamaktadır. Bu tezde, yeni kütleli gravitasyon kuramı çerçevesinde sadece yeni-tip kara delik çözümü dikkate alınacaktır. Öte yandan, Denklem (2.4) ile verilen topolojik kütleli gravitasyon kuramının hareket denklemlerinin bir çözümü olan warped AdS_3 kara delik metriği de kullanılacaktır. Bu iki kara deliğin Hawking radyasyon sıcaklığı, parçacıkların kuantum mehaniksel olarak tünelleme yöntemi kullanılarak da belirlenecektir.

2.1.1. (2+1) boyutlu yeni-tip kara delik uzay-zamanı

Yeni kütleli gravitasyon kuramının Denklem-(2.7) ile verilen hareket denklemlerinin bir çözümü olan yeni-tip karadeliği tanımlayan metrik,

$$ds^2 = L^2 \left[f(r)\, dt^2 - \frac{1}{f(r)} dr^2 - r^2 d\phi^2 \right] \tag{2.8}$$

ile verilir (Kwon vd 2011). Burada, b ve c integrasyon sabitleri olmak üzere $f(r){=}r^2{+}br + c$ ile verilir. $L^2{=}\frac{1}{2m^2}$ ile tanımlanan AdS_3 uzayının yarıçapıdır. Denklem (2.8) metriği ile tanımlanan karadeliğin, $r_{\pm}{=}\frac{1}{2}\left(-b \pm \sqrt{b^2-4c}\right)$ değerlerinde dış ve iç olmak üzere iki farklı ufka sahiptir. Buna göre, Denklem (2.8) metriğinin bir karadeliği tanımlaması b ve c sabitleri arasındaki farklı kombinasyonlara bağlıdır. Bu durum Çizelge 2.1'de özetlenmiştir.

Çizelge 2.1. b ve c sabitleri arasındaki farklı kombinasyonlara bağlı olarak karadelik oluşması (Kwon vd 2011)

$q = r_-/r_+$	b ve c	r_+ ve r_-
$q = 1$	$b < 0,\ c > 0 \quad (b^2 = 4c)$	$r_+ > 0,\ r_- > 0\ \ (r_+ = r_-)$
$0 < q < 1$	$b < 0,\ c > 0$	$r_+ > 0,\ r_- > 0\ \ (r_+ > r_-)$
$q = 0$	$b < 0,\ c = 0$	$r_+ > 0,\ r_- = 0$
$-1 < q < 0$	$b < 0,\ c < 0$	$r_+ > 0,\ r_- < 0\ \ (r_+ > \|r_-\|)$
$q = -1$	$b = 0,\ c > 0$	$r_+ > 0,\ r_- < 0\ \ (r_+ = -r_-)$
$q < -1$	$b > 0,\ c > 0$	$r_+ > 0,\ r_- < 0\ \ (r_+ < \|r_-\|)$

2.1.2. (2+1) boyutlu warped-AdS_3 kara delik uzay-zamanı

Topolojik kütleli gravitasyon kuramının hareket denklemlerinin bir çözümü olan warped-AdS_3 kara deliği (Moussa vd 2003)

$$ds^2 = N(r)^2 dt^2 - \frac{1}{N(r)^2 F(r)^2} dr^2 - F(r)^2 \left[d\phi + N^{\phi}(r) dt \right]^2 \tag{2.9}$$

metriği ile verilir. Burada kullanılan kısaltmalar,

$$F(r)^2 = r^2 + 4\omega r + 3\omega^2 + \frac{r_0^2}{3}\ , \quad N(r)^2 = \frac{r^2 - r_0^2}{F(r)^2}\ , \quad N^{\phi}(r) = -\frac{2r + 3\omega}{F(r)^2}$$

şeklindedir. Warped-AdS_3 karadeliği $r = \mp r_0$' da iç ve dış olmak üzere iki tane olay ufkuna sahiptir. Ayrıca, ω ve r_0 parametreleri, kara deliğin kütlesi ve açısal momentumu ile ilişkilendirilen iki parametredir. $r_0^2 > 0$ için, bu iki olay ufkunun çevre uzunluklar,

$$A_{\pm} = 2\pi r_{\pm} = \frac{2\pi \left|2r_0 \pm 3\omega\right|}{\sqrt{3}} \tag{2.10}$$

ve bunların sahip oldukları açısal hızlar da,

$$\Omega_{\pm} = \frac{3}{2r_0 \pm 3\omega} \tag{2.11}$$

şeklindedir. Öte yandan, $r_0 = 0$ durumu kara deliğin extremal durumuna karşılık gelir. Bu durumda, kara deliğin $r = 0$'da çift olay ufku oluşur. Bunun yanı sıra kara deliğin başka bir özel durumu da söz konusudur. $\omega = r_0 = 0$ durumu kara deliğin taban veya vakum durumu olarak nitelendirilir. Bu özel durumda metrik,

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{r^2}dr^2 - r^2\left[d\phi - \frac{2}{r^2}dt\right]^2 \tag{2.12}$$

olarak indirgenir (Moussa vd 2003).

2.2. (2+1) Boyutlu Uzay-zamanda Relativistik Dalga Denklemleri

Çalışmamızda kullanacağımız, spin-0, spin-1/2 ve spin-1 relativistik parçacıkların fiziksel davranışlarını temsil eden Klein-Gordon, Dirac ve DKP denklemlerinin eğri uzay-zamandaki formları tartışılacaktır.

2.2.1. Spin-0 skaler parçacıklar için Klein-Gordon (KG) denklemi

Parçacıkların kuantum mekaniksel etkilerini betimleyen, ancak relativistik etkileri içermeyen Schrödinger denklemi, doğal olarak, Lorentz dönüşümleri altında değişmez (invariant) olmadığından, fizikçiler, bu denklemin özel görelilikle uyumlu bir versiyonunu türetmeye çalışmışlardır. Klein-Gordon denklemi, spin-0 parçacıklarını temsil eden ve Lorentz dönüşümleri altında değişmez kalan ilk relativistik kuantum mekaniksel dalga denklemi olarak bilinir. 1920'lerde Klein, Fock, Schrödinger ve de Broglie'nin de aralarında bulunduğu birkaç fizikçi, bu denklemi standart Schrödinger denkleminin genelleştirilmiş hali olarak yazmışlardır.

Relativistik spin-0 parçacıklarını temsil eden dalga denklemi olan Klein-Gordon

$$p_\mu p^\mu \Phi = m_0^2 c^2 \Phi \tag{2.13}$$

olarak yazılır. Burada, c ışık hızı, m_0 skaler parçacığın kütlesi, p_μ parçacığın momentumu ve Φ skaler parçacığı temsil eden dalga fonksiyonudur. Klein-Gordon denklemi, içerdiği negatif enerji çözümleri ve olasılık akısının yorumlanmasındaki zorluklar nedeniyle, yazıldığı yıllarda uzun bir süre boyunca fiziksel olarak anlamsız olduğu kabul edildi. Serbest parçacığı karakterize eden $\phi = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(Et - \overrightarrow{p}.\overrightarrow{x}\right)\right]$ şeklindeki düzlem dalga çözümleri Klein-Gordon denklemini sağlarlar ve dolayısıyla,

$$E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$$

pozitif ve negatif özdeğerleri elde edilir. Buradaki negatif enerji özdurumunun neye karşılık geldiği, Dirac denklemi yazılıncaya kadar belirsiz kaldı (Dirac 1928a,b). Öte yandan, Klein-Gordon denklemi zamana göre ikinci mertebeden bir diferensiyel denklem olduğundan, olasılık yoğunluğu da

$$\rho = \frac{ih}{2m_0}\left[\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right]$$

şeklinde zamana göre birinci mertebeden olmaktadır. Dolayısıyla, olasılık pozitif tanımlı değildir (Greiner 2000).

Eğrisel uzay-zamanda spin-0 parçacıklarının davranışlarını inceleyebilmek için Klein-Gordon denklemi eğrisel koordinaklara genellemesi yapılır. Klein-Gordon denkleminin eğri uzay-zamana genellemesi,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right]\Phi\left(t,r,\phi\right) = \frac{m_0^2}{\hbar^2}\Phi\left(t,r,\phi\right) \tag{2.14}$$

şeklindedir (Birrel ve Davies 1982).

2.2.2. Spin-1/2 fermiyonlar için Dirac denklemi

Modern fizikte elde edilen en olağanüstü başarılarından biri, relativistik spin-1/2 parçacıkların davranışlarını açıklayan Dirac denklemidir. Dirac denklemi, 1928 yılında P.A.M. Dirac tarafından yazılan, kuantum mekaniğinin ilkeleri ile tam uyumlu ve özel görelilik kuramı ile tutarlı, elektron, pozitron, proton ve nötron gibi temel spin-1/2 parçacıklarını tanımlamakta kullanılan son derece yararlı bir denklemdir (Dirac 1928a,b). Dirac denklemi; elektron spinini kendiliğinden içermesi ve anti parçacıkların varlığını ortaya koyması nedeniyle çok önemlidir (bu parçacık ilk kez 1932 yılında gözlenmiş ve pozitron olarak adlandırılmıştır). Aynı zamanda tek bir elektron için olasılık genliğini açıklar. Bu tek parçacık kuramı, elektronun manyetik momentini ve spin tahminini oldukça iyi verir ve ayrıca, atomik spektral çizgilerde gözlenen ince yapıyı çok daha iyi açıklar. Aynı zamanda; Dirac denklemi negatif enerji çözümüne de açıklık getirmiştir. Bu çözüm, pozitif enerjili parçacıkların çözümlerinin bir benzeridir, ancak zamanda geriye doğru hareket eden parçacıkları temsil eder. Bu özellikleri nedeniyle Dirac denklemi, parçacık fiziğinden, yoğun madde fiziğinden, eğri uzay-zamana genelleştirilebilmesi nedeniyle de astrofizik ve kozmolojiye kadar geniş bir uygulama alanına ve öneme sahiptir.

Spin-1/2 parçacıkların (2+1) eğri uzay-zamandaki davranışlarını incelemek için Dirac denklemi aşağıdaki kovaryant formda yazılır (Sucu ve Ünal 2007).

$$i\overline{\sigma}^{\mu}(x)\left[\partial_{\mu}-\Gamma_{\mu}(x)\right]\Psi(x)=\frac{m_0}{\hbar}\Psi(x). \quad (2.15)$$

Bu temsilde, m_0 Dirac parçacığının kütlesi, $\Psi(x)$, 2×1 Dirac spinörüdür ve sadece bir tane spin polarizasyonu vardır. Bu iki bileşenli Dirac spinörlerinden biri pozitif özdeğere, diğeri ise negatif özdeğere karşılık gelir. $\overline{\sigma}^{\mu}(x)$ uzay-zamana bağlı Dirac matrisleridir ve $e^{\mu}_{(i)}(x)$ triadları kullanılarak $\overline{\sigma}^{i}$ düz uzay-zaman Dirac matrisleri cinsinden,

$$\overline{\sigma}^{\mu}(x)=e^{\mu}_{(i)}(x)\overline{\sigma}^{i} \quad (2.16)$$

bağıntısı ile verilir. $e^{\mu}_{(i)}(x)$ triadlar,

$$g_{\mu\nu}(x)=e^{(i)}_{\mu}(x)e^{(j)}_{\nu}(x)\eta_{(i)(j)} \quad (2.17)$$

bağıntısı yardımıyla hesaplanır. Buradaki $\eta_{(i)(j)}$ (2+1) boyutlu düz uzay-zaman metrik tensörüdür ve bu çalışmada (1,-1,-1) imzaya (signature) sahip olduğu kabul edilecek. $\overline{\sigma}^{i}$ düz uzay-zaman Dirac matrisleri, σ^1, σ^2 and σ^3 Pauli matrisleri cinsinden,

$$\overline{\sigma}^{0}=\sigma^{3}\ \ ,\overline{\sigma}^{1}=i\sigma^{1},\ \overline{\sigma}^{2}=i\sigma^{2} \quad (2.18)$$

şeklinde yazılır. $\Gamma_{\mu}(x)$ ise spin bağlantı katsayılarıdır ve,

$$\Gamma_{\mu}(x)=\frac{1}{4}g_{\lambda\alpha}(e^{i}_{\nu,\mu}e^{\alpha}_{i}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu})s^{\lambda\nu}(x) \quad (2.19)$$

ile verilmektedir. Burada, $g_{\mu\nu}(x)$ eğri uzay-zaman metrik tensörü, $\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}$ Christoffell sembolleri ve $s^{\lambda\nu}(x)$ ise

$$s^{\lambda\nu}(x)=\frac{1}{2}[\overline{\sigma}^{\lambda}(x),\overline{\sigma}^{\nu}(x)] \quad (2.20)$$

ile tanımlanan spin operatorüdür (Sucu ve Ünal 2007).

2.2.3. Spin-1 vektör parçacıklar için Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) denklemi

Spin-1 vektör parçacıklarını temsil eden Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) denklemi, Dirac denklemi gibi birinci mertebeden kısmi türevli bir denklemdir. DKP denkleminde gamma matrisleri ile verilen Dirac cebrinin yerini, beta matrisleri ile tanımlanan Kemmer cebri alır.

(2+1) boyutlu eğri uzay-zamanda DKP denklemi,

$$i\beta^{\mu}(x)\left[\partial_{\mu}-\Sigma_{\mu}\right]\Psi_{DKP}=m_0\Psi_{DKP} \quad (2.21)$$

ile verilir. Burada, $\beta_\mu(x)$ uzay-zamana bağlı 4×4'lük Kemmer matrisleridir, Σ_μ spin-1 için spin bağlantı katsayısı, Ψ_{DKP} spin-1 parçacığını temsil eden 4×1'lik sütun vektör ve m_0 spin-1 parçacığının kütlesidir. $\beta_\mu(x)$ Kemmer matrisleri I birim matris ve $\overline{\sigma}^\mu(x)$ uay-zamana bağlı Dirac matrislerine;

$$\beta^\mu(x) = \overline{\sigma}^\mu(x) \otimes I + I \otimes \overline{\sigma}^\mu(x). \tag{2.22}$$

şeklinde bağlıdır. Kemmer matrisleri

$$\beta^\mu(x)\beta^\nu(x)\beta^\alpha(x) + \beta^\alpha(x)\beta^\nu(x)\beta^\mu(x) = \beta^\mu(x)g^{\nu\alpha} + \beta^\alpha(x)g^{\nu\mu}$$

biçimindeki anti-komutasyon bağıntılarını sağlar (Dernek 2009). Ayrıca bu matrislerin sağladığı cebre Kemmer cebiri denir. Σ_μ spin-1 parçacığının bağlantı katsayısının açık formu ise (Dernek vd 2015, Sucu ve Ünal 2002, 2005).

$$\Sigma_\mu = \Gamma_\mu \otimes I + I \otimes \Gamma_\mu \tag{2.23}$$

şeklinde spin-1/2 parçacığının bağlantı katsayıları cinsinden tanımlanır. (2+1) boyutlu eğri uzay-zamanda spin-1 parçacığını temsil eden dalga fonksiyonu da,

$$\Psi_{DKP} = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

şeklinde tanımlanır.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Kara Delik Termodimaniği, Parçacık Tünelleme ve Hawking Sıcaklığı

Kara delikler, evrenin oluşumu ve işleyişini anlamaya, evreni yöneten bütün yasaları tek bir kuram, kuantum kütleçekim kuramı şeklinde nihai bir kuram çerçevesinde birleştirmeye çalışan günümüz kuramsal fizikçilerin en önemli oyuncaklarından biridir. Klasik olarak bir karadelik ışığın dahi kaçamayacağı, kütleçekimin çok şiddetli olduğu uzay-zaman bölgesi olarak adlandırılır. Kara delik, merkezinde tekillik ve bu tekilliği çevreleyen r_H yarıçaplı bir olay ufkundan ibarettir. Olay ufkunun ötesinde bildiğimiz bütün fizik yasaları anlamını yitirir. Bütün bu gizemine rağmen kara delikler sadece üç temel fiziksel parametre ile karakterize edilirler: kütle, elektriksel yük ve açısal momentum. Bu karakterizasyon göz önünde bulundurularak kara delikler dört temel grupta sınıflandırılabilir:

1- Elektriksel yükü ve açısal momentumu olmayan Schwarzschild tipi statik kara delikler,

2- Elektriksel olarak yüklü, fakat dönmeyen Reissner-Nordström tipi statik kara delik çözümleri,

3- Elektriksel olarak yüksüz, fakat dönen Kerr tipi kara delik çözümleri,

4- Elektriksel olarak yüklü ve dönen Kerr-Newmann tipi kara delikler.

Klasik bir sistem olarak ele aldığımızda, kara delikler hiç bir şeyle ısısal dengede olmadıklarından, bir karadelik için sıcaklık tanımı yapmak imkansızdır. Çünkü, klasik anlamda, olay ufku çizgisini geçen her şey kara deliğe düşmekte ve hiç bir şekilde geriye kaçamamaktadır. Termodinamik yasaların kara deliklere uygulama fikri ilk olarak Greif tarafından ortaya atılmış, fakat o günkü kara delikler hakkındaki bilgi yetersizliğinden dolayı bu konu hakkında somut bir öneri öne sürülememiştir (Greif 1969). 1970'lerin başında Bekenstein, yukarıda sıraladığımız kara deliğin temel özellikleri ile termodinamiğin temel yasaları arasındaki benzerliğe dikkat çekmiş ve kara deliğin bir entropiye ve sıcaklığa sahip olabileceğini göstermiştir. Fakat, Bekenstein benzetme yaparak bulduğu kara delik sıcaklığını radyasyon sıcaklığı olarak yorumlamamıştır. Bu benzerliğe dayanarak, Bardeen vd (1973) kara deliklerin termodinamiksel özelliklerini dört temel yasa ile açıklamışlardır. Şimdi sırasıyla, kara delik mekaniği yasaları olarak bilinen bu dört temel yasayı kısaca gözden geçirelim (Carlip 2004).

Sıfırıncı Yasa: Durağan bir kara deliğin yüzey kütleçekimi, olay ufku boyunca sabittir. Olay ufku, bir kara deliği karakterize eden önemli unsurlardan biridir. Çünkü, bir kara deliğe ilişkin bütün bilgileri sahip olduğu olay ufkundan alırız. Öte yandan, olay ufku da yüzey kütleçekimi ile betimlenir ki yüzey kütle çekimi birim test kütlesini olay ufkunda durağan tutmak için gereken kuvvetin ölçüsüdür. Bir kara deliğin yüzey kütleçekimi,

$$\kappa = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{tt}}{\sqrt{-g_{tt}g_{rr}}}\right]_{r=r_h} \tag{3.1}$$

metrik potansiyelleri veya,

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}\left[\chi^{\alpha;\beta}\chi_{\alpha;\beta}\right]_{r=r_h} \tag{3.2}$$

Killing vektörleri cinsinden ifade edilebilir (Bardeen vd 1973). Burada, χ^α olay ufkuna dik olan Killing vektörüdür (Poisson 2004). Yüzey kütleçekiminin durağan bir kara deliğin olay ufku boyunca sabit oluşu, termodinamikte ısısal dengedeki bir cismin sıcaklığının sabit oluşu ile benzerlik göstermektedir. Bu nedenle, kara delik sıcaklığı, olay ufkunun yüzey kütleçekimi ile ilişkilendirilir ve

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} \tag{3.3}$$

bağıntısı ile verilir (Bardeen vd 1973, Bekenstein 1973).

Birinci Yasa: Bu yasa kara deliğin sahip olduğu kütlenin, açısal momentumun, olay ufkunun alanının ve yükün değişimene bağlı olarak nasıl değiştiğini betimler. Başka bir deyişle, kara deliğin durağan olduğu bir durumdan, başka durağan bir duruma geçişi sırasında kütledeki değişimi betimler. Birinci yasa, A olay ufkunun yüzey alanı, J kara deliğin açısal momentumu ve Q yük miktarı olmak üzere,

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi}dA + \Omega_H dJ + \Phi dQ \tag{3.4}$$

bağıntısıyla verilir. Burada, κ yüzey kütleçekimi, Ω_H olay ufkunun açısal hızı ve Φ elektriksel potansiyeldir. Kara delik mekaniğinin birinci yasası, termodinamiğin

$$dE = TdS - PdV + \mu dN \tag{3.5}$$

birinci yasası ile benzerlik göstermektedir. Burada, E sistemin iç enerjisini, T sıcaklık, S entropi, P basınç, V hacim, μ kimyasal potansiyel ve N parçacık sayısıdır. Bu iki yasa karşılaştırıldığında, $\Omega_H dJ + \Phi dQ$ ve $-PdV + \mu dN$ iş terimleri olarak ele alındığında, $\frac{\kappa}{8\pi}dA$ terimi ile TdS teriminin benzer olduğu görülür. Dolayısıyla, sıcalık ile yüzey kütleçekimi ve olay ufku yüzey alanı ile entropi arasında bir analoji kurulabilir (Bekenstein 1973).

İkinci Yasa: Olay ufkunun yüzey alanı zamanla azalmaz. Yani herhangi bir klasik süreç ile yüzey alanı azalmaz. Bu durum

$$dA \geq 0 \tag{3.6}$$

ile verilir. Kara delik mekaniğinin ikinci yasası, termodinamiğin ikinci yasasının analoğu olduğu görülür (Bekenstein 1973, Hawking 1972).

Üçüncü Yasa: Herhangi sonlu sayıda fiziksel süreçle bir kara deliğin yüzey kütleçekimini sıfır yapmak mümkün değildir. Bu yasa, termodinamiğin üçüncü yasası ile benzerlik teşkil etmektedir (Bardeen vd 1973).

Kara delik mekaniği yasaları ile termodinamik yasaları arasındaki analoji ilişkisi Çizelge 3.1'de kısaca özetlenmiştir.

Çizelge 3.1. Termodinamik yasalar ile Kara delik yasaları arasındaki benzerlik durumları (Kiefer 2007)

	Termodinamik Sistem	Kara delik
0. Yasa	Isısal dengedeki cisim için $T = sbt$	Olay ufku boyunca $\kappa = sbt$
1. Yasa	$dE = TdS - PdV + \mu dN$	$dM = \frac{\kappa}{8\pi}dA + \Omega dJ + \Phi dQ$
2. Yasa	$dS \geq 0$	$dA \geq 0$
3. Yasa	$T = 0$ değerine ulaşılamaz	$\kappa = 0$ değerine ulaşılamaz

Kara delik mekaniğinin bu dört temel yasası klasiktir, yani kuantum mekaniksel olmayan bir yapıya sahip olup, sadece termodinamiğin temel yasaları ile kara deliklerin sahip olduğu, kütle, yük ve açısal momentumun değişim yasaları arasında yapılan analojiye dayanır. Bekenstein (1973) ve Bardeen vd. (1973) kara delik sıcaklığını bulurken bu analojiden yararlanmışlardır. Bu iki çalışmada, kara deliklerin parçacık soğurması veya salması hakkında herhangi bir şey söylenmemiştir. Öte yandan, kara delik olay ufku yakınında kütleçekimi çok şiddetli olduğundan, bu bölgede çok yüksek enerjiye ulaşılır ki bu durumda kuantum mekaniksel etkiler önem kazanmaya başlar. Kara delik olay ufku civarındaki bir bölgede kuantum etkiler vakum dalgalanmalarına (quantum vacuum fluctuation) neden olur. Hawking (1974, 1975) kuantum vakum dalgalanmaları fikrini kullanarak, Schwarzchild kara deliği olay ufku civarında kütlesiz skaler alanının asimptotik geçmiş ve gelecek vacum durumlarının Bogoliubov katsayılarını hesaplayarak, Schwarzchild kara deliği tarafından salınan parçacıklar için bir spektrum elde etmiştir. Bu spektrumun kara cisim spektrumu ile özdeş olduğunu ve sahip olduğu sıcaklığın da tam olarak Denklem (3.3) ile verilen ifadeye eşit olduğunu göstermiştir. Literatürde Hawking radyasyonu olarak bilinen kara delik ışımasının kuantum mekanik yasaların kullanılarak keşfi, makroskobik bir cisim olan kara deliği kuantum mekaniği ve termodinamik yasalar çerçevesinde incelenmesinin en temel çalışmalarından birini teşkil eder. Çünkü bu keşif sayesinde birbirinden ayrı olarak gözüken, genel görelilik, termodinamik ve kuantum mekaniği kuramları arasında tutarlı bir bağlantı kurulabileceğinin mümkün olduğu görülmüştür. Böyle bir bağlantı, oluşturulacak tutarlı bir kuantum kütleçekim kuramı açısından çok ömenli bir sınır taşını teşkil eder.

Günümüzde, Hawking radyasyonunu kuantum mekaniksel olarak hesaplamak için bir çok yöntem bulunmaktadır. Son zamanlarda bir çok kara deliğin radyasyon sıcaklığını hesaplamada kullanılan başarılı bir yöntem, relativistik spinli parçacıkların kara delikten kuantum mekaniksel olarak tünellemesi ilkesine dayanan Hamilton-Jacobi yöntemidir (Kerner ve Mann 2008, Kraus ve Wilczek 1994, Li ve Ren 2008, Parikh ve Wilczek 2000, Shankaranarayanan vd 2001, Srinivasan ve Padmanabhan 1999). Bu yöntem, olay ufkunu geçen parçacığı temsil eden ve klasik olarak yasaklanmış eylem fonksiyonunun kompleks kısmının hesaplanmasına dayanır. Tünelleme yapan bir parçacığın klasik olarak yasaklanmış olan yörüngesi için kara deliğin olay ufkunun iç kısmından dış kısmına doğru tünelleme olasılığı, Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) yaklaşımı kullanılarak,

$$\Gamma \propto \exp[-\frac{2}{\hbar} Im S] \tag{3.7}$$

ile verillir. Burada, S, tünelleme yapan parçacığın klasik olarak yasaklanmış eylem fonksiyonudur ve

$$g^{ik}\left(\frac{\partial S}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x^k}\right) + \frac{m^2}{\hbar^2} = 0 \tag{3.8}$$

ile verilen relativistik kuantum mekaniksel Hamilton-Jacobi denkleminin çözümüdür. Şimdi, Hamilton-Jacobi yöntemini kullanarak statik kara deliğin Hawking radyasyonunu inceleyelim. Genel formda statik kara delik metriği,

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + \frac{1}{B(r)}dr^2 + C(r)g_{ij}dx^i dx^j \tag{3.9}$$

ile temsil edilir. Buna göre, relativistik Hamilton-Jacobi denklemi $\hbar$ içeren terimler ihmal edildikten sonra,

$$-\frac{1}{A(r)}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + B(r)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{C(r)}g^{ij}\left(\frac{\partial S}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x^j}\right) + m^2 = 0 \tag{3.10}$$

şeklinde indirgenir. Bu şekilde lineer olmayan bir diferansiyel denklemi çözmek için, metriğin simetrilerinden yararlanılır. Kara delik metriğinin Killing vektörleri göz önünde bulundurularak Denklem (3.10) için,

$$S(t, r, x^i) = -Et + J_i x^i + W(r) + K \tag{3.11}$$

şeklinde bir çözüm önerisi yapılabilir. Burada, E kara deliğin ∂_t zamansal Killing vektörüne karşılık gelir ve parçacığın enerjisini temsil eder. J_i katsayıları ise metriğin ∂_{x^i} Killing vektörlerine karşılık gelen sabitlerdir ve K kompleks bir sabittir. $W(r)$ parçacığın radyal yöndeki yörüngesini betimler. Bu çözüm önerisi Hamilton-Jacobi denkleminde yerine yazılırsa radyal denklemden,

$$W_{\pm}(r) = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{A(r)B(r)}} \sqrt{E^2 - A(r)\left[m^2 + \frac{g^{ij}J_iJ_j}{C(r)}\right]} \tag{3.12}$$

elde edilir. Burada, " + " çözümler olay ufkundan dış uzaya tünelleyen parçacığın radyal yörüngesini, " − " çözümler ise olay ufkunu geçip kara deliğe düşen parçacığın radyal yörüngesini temsil eder. Radyal yörünge denklemleri, kara deliğin $r = r_h$ yarçaplı olay ufku üzerinden kompleks integral alınarak bulunur:

$$W_{\pm}(r_h) = \pm i \frac{\pi E}{\sqrt{A'(r_h)B'(r_h)}}.$$

Bu durumda tünelleme olasılıkları, sırasıyla,

$$P_{out} = \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\left(ImW_+(r_h) + ImK\right)\right] \tag{3.13}$$

ve

$$P_{in} = \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\left(ImW_-(r_h) + ImK\right)\right] \tag{3.14}$$

şeklinde bulunur. $ImW_+(r_h) = -ImW_-(r_h)$ olduğundan, parçacığın tünelleme olasılığı,

$$\Gamma = \exp[-\frac{2}{\hbar}ImS] = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \exp[-\frac{4}{\hbar}\frac{\pi E}{\sqrt{A'(r_h)B'(r_h)}}] \tag{3.15}$$

olur. Öte yandan, tünelleme olasılığı,

$$\Gamma = \exp[-\frac{E}{T}] \tag{3.16}$$

şeklinde yazılabileceğinden (Hartle ve Hawking 1976), kara deliğin radyasyon sıcaklığı,

$$T_H = \hbar\frac{\sqrt{A'(r_h)B'(r_h)}}{4\pi} \tag{3.17}$$

olarak bulunur ki bu da Hawking'in Bogoliubov katsayılarını hesaplayarak bulduğu ifade ile aynıdır.

3.2. Genelleştirilmiş Heisenberg Belirsizlik ilkesi, Dirac ve KG Denklemleri

Kütle çekiminin tutarlı bir kuantum kuramı olmasada buna rağmen, sicim kuramı (Zwiebach 2009), non-commutative kuram (Aschieri ve vd 2009, Connes ve Marcolli 2008) ve ilmek (loop) kuantum kütleçekim kuramı (Gambini ve Pullin 2011) gibi adaylar mevcuttur . Bu kuramların ortak özelliklerinden biri, Planck ölçeğinde ölçülebilir bir minimum uzunluğun var olabileceğine işaret etmeleridir (Amati vd 1989, Konishi vd 1990, Townsend 1977). Bu minimum uzunluğun temel dayanağı, temel parçacıkların noktasal değil, cisimsi (extended) bir yapıya sahip olmaları gerektiği fikrine dayanır. Örneğin sicim kuramında temel parçacıkların, noktasal değil, kapalı veya açık uçlu ipler (strings) olduğu varsayılır (Hossenfelder 2013). Minimum uzunluğun varlığı düşüncesi yeni olmayıp Heisenberg'in kuantum alan kuramındaki ıraksama sorunu üzerindeki çalışmalarına dayanır. Heisenberg, 1930'lu yıllarda, elektronun sonsuz enerji problemini çözmek için, r_0 eletronun yarıçapı olmak üzere, uzayın r_0^3 ile orantılı sonlu hacimli ilmeklerden oluştuğunu düşünmenin tutarlı olabileceğini önermiştir (Carazza ve Kragh 1995). Böylelikle, elektronun enerjisini hesaplarken, enerjinin sonlu kalmasını garantilemek için, integrallerin ıraksamaması için temel bir uzunluğun olması gerektiğine işaret etmiştir.

Ölçülebilir bir minimum uzunluğun varlığı, standart Heisenberg belirsizlik ilkesinin modifiye olmasına yol açar (Hossenfelder vd 2003, Hossenfelder 2006, Kempf vd 1995). Genelleştirilmiş Heisenberg belirsizlik ilkesinin literatürde farklı gösterimleri mevcuttur. Çalışmamızda

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}\left[1+\beta\left(\Delta p\right)^2\right] \tag{3.18}$$

ile verilen bağıntı kullanılacaktır (Kempf vd 1995). Burada, β, M_{Planck} Planck kütlesi ve β_0 boyutsuz bir sabit olmak üzere $\beta = \beta_0/M_{Planck}^2$ ile verilir. Öte yandan genelleştirilmiş komutasyon bağıntısı ise,

$$[\widehat{x}_i, \widehat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}\left(1+\beta p^2\right) \tag{3.19}$$

ile tanımlanır (Kempf vd 1995). Burada, $\widehat{x}_i$ ve $\widehat{p}_i$ sırasıyla genelleştirilmiş konum ve genelleştirilmiş momentum operatörleridir;

$$\widehat{x}_i = \widehat{x}_{0i},$$

$$\widehat{p}_i = \widehat{p}_{0i}\left(1+\beta p_{0i}^2\right). \tag{3.20}$$

$\widehat{x}_{0i}$ ve $\widehat{p}_{0i}$, standart konum ve momentum operatörleri olup, $[\widehat{x}_i, \widehat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$ bağıntısını sağlarlar. Öte yandan genelleştirilmiş enerji bağıntısı ise

$$\widetilde{E} = E\left(1-\beta E^2\right) \tag{3.21}$$

veya, $E^2 = p^2 + m_0^2$ enerji-momentum bağıntısı yardımıyla,

$$\widetilde{E} = E\left[1-\beta\left(p^2+m_0^2\right)\right] \tag{3.22}$$

yazılabilir. Burada p^2, Denklem-(3.20) yardımıyla ve β'nın yüksek dereceden terimleri ihmal edilerek,

$$p^2 = \widehat{p}_i\widehat{p}^i \simeq -h^2\left[\partial_i\partial^i - 2\beta h^2\left(\partial_j\partial^j\right)\left(\partial_i\partial^i\right)\right] \tag{3.23}$$

yazılabilir.

Genelleştirilmiş Heisenberg belirsizlik ilkesinin önemli uygulama alanlarından biri, kara deliklerin termodinamik özelliklerinin araştırılmasıdır. Bu bağlamda, kuantum kütleçekim etkisinin Hawking ışıması olarak bilinen kara delik radyasyonuna katkısını hesaplamak için, Genelleştirilmiş Heisenberg belirsizlik ilkesi yoluyla modifiye edilmiş Dirac denklemini kullanarak spin-1/2 parçacıkların ve modifiye edilmiş Klein-Gordon denklemi kullanılarak spin-0 skaler parçacıklarının kara delikten tünellemesi olayı kullanılarak (3+1) boyutlu çeşitli karadelikler için hesaplanmıştır (Chen vd 2013a, 2014a,b, 2013b, Li ve Zu 2015, Liu ve Ren 2014, Mu vd 2015). Bu çalışmalar ışığında, kuantum kütleçekim faktörünün (2+1) boyutlu karadeliklerin Hawking radyasyonu üzerindeki etkilerini spin-1/2 Dirac parçacıklarının tünellemesi yolu ile incelemek için Denklem (2.15) ile verilen Dirac denklemi aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir;

$$i\overline{\sigma}^0(x)\partial_0\Psi(x) = i\overline{\sigma}^\mu(x)\left[\partial_\mu - \Gamma_\mu(x) - \frac{m_0}{\hbar}\right]\Psi(x). \tag{3.24}$$

Denklem-(3.22) ve Denklem-(3.23) yardımı ile genelleştirilmiş Dirac denklemi, β'nın yüksek dereceden terimleri ihmal edilmesiyle,

$$\begin{aligned}&\left[i\overline{\sigma}^0(x)\partial_0 + i\left(1-\beta m_0^2\right)\overline{\sigma}^i(x)\partial_i + i\hbar^2\beta\overline{\sigma}^i(x)\partial_i\left(\partial_i\partial^i\right) - \beta m_0^2\right]\Psi \\ &-\left[\frac{m_0}{\hbar}\left[1 + h^2\beta\left(\partial_i\partial^i\right) - \beta m_0^2\right] + i\overline{\sigma}^\mu(x)\Gamma_\mu\left[1 + \hbar^2\beta\left(\partial_i\partial^i\right)\right]\right]\Psi = 0\end{aligned} \tag{3.25}$$

olarak bulunur.

Öte yandan, kuantum kütleçekim faktörünün Hawking radyasyonu üzerindeki etkilerini spin-0 parçacıklarının kuantum mekaniksel olarak tünellemesi yöntemi ile inceleyebilmek için, Denklem (2.13) ile verilen Klein-Gordon denklemi daha açık formda,

$$-\left(i\hbar\right)^2\partial_0\partial^0\Phi = \left[\left(-i\hbar\right)^2\partial_i\partial^i - m_0^2\right]\Phi \tag{3.26}$$

şeklinde yazılabilir. Buna dayanarak, genelleştirilmiş Klein-Gordon denklemi, Denklem (3.22), Denklem (3.23) ve $E^2 = p^2 + m_0^2$ enerji-momentum bağıntısı göz önüne alınırsa,

$$-\left(i\hbar\right)^2\partial_0\partial^0\widetilde{\Phi} = \left[\left(-i\hbar\right)^2\partial_i\partial^i - m_0^2\right]\left[1 - 2\beta\left(-\hbar^2\partial_i\partial^i + m_0^2\right)\right]\widetilde{\Phi} \tag{3.27}$$

olarak elde edilir. Burada yine β'nın yüksek dereceden terimleri ihmal edilmiştir.

3.3. Noether Teoremi ve Korunum Yasaları

Korunum yasaları kuramsal fizikte önemli bir yere sahiptir. Doğayı betimlemeye çalışan herhangi bir fizik kuramı, enerjinin korunumu, açısal momentumun korunumu ve lineer momentumun korunumunu sağlaması gerekmektedir. Bu korunum yasaları, sistemin sahip olduğu bazı simetrilerin doğal bir sonucudur. Örneğin enerjinin korunumu, sistemi betimleyen eylem fonksiyonunun zaman ötelemesi altında invaryant (değizmez) kalmasının, yani zaman simetrinin bir sonucudur. Benzer şekilde lineer momentumun korunumu, eylem fonksiyonunun uzay ötelemesi (öteleme simetrisi) altında invaryant kalmasının bir sonucudur. Öte yandan açısal momentum ise uzaysal dönmeler (dönme simetrisi) altında eylem fonksiyonunun invaryant kalmasının bir sonucudur (Goldstein 1980). Bir sistemin sahip olduğu simetriler ile korunum yasaları arasındaki bu ilişki Noether teoremi ile verilir (Bluman ve Kumai 1989, Stephani 1989). Dolayısıyla Noether simetrileri, fiziksel sistemi betimleyen Lagranjiyen fonsiyonunun simetrileridir. Diğer bir deyimle, Noether simetrileri, Lagranjiyen fonsiyonunun herhangi bir vektör alanı boyunca Lie türevi sıfıra eşit ise, bu vektör alanı sistemin korunan niceliklerine karşılık gelir.

Noether Teoremi: M, konfigürasyon uzayını temsil eden manifold ve T_qM bu manifold üzerindeki herhangi bir q noktasındaki teğet (tangent) uzayı olmak üzere, $TM = \underset{q\in M}{\cup} T_qM$ teğet demeti (tangent bundle) olsun. Sistemi betimleyen Lagranjiyen fonksiyonu, L, $L : TM \to M$, M manifoldu üzerindeki vektör alanı,

$$X = \alpha^i(q)\frac{\partial}{\partial q^i} \tag{3.28}$$

olmak üzere; bu vektör alanının, X, $TM = \underset{q\in M}{\cup} T_qM$ üzerine tam olarak taşınmış (complete lift) formu, $\widetilde{X}$,

$$\widetilde{X} = \alpha^i(q)\frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{\partial\alpha^i(q)}{\partial q^i}\dot{q}^i\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \tag{3.29}$$

boyunca L lagranjiyenin Lie türevi,

$$£_{\widetilde{X}}L = \alpha^i(q)\frac{\partial L}{\partial q^i} + \frac{\partial\alpha^i(q)}{\partial q^i}\dot{q}^i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0 \tag{3.30}$$

koşulunu sağlıyorsa sistemin korunan nicelikleri vardır. Bir sistemin korunan niceliklerinin bilinmesi, sistemi betimleyen denklemlerin çözülmesinde kolaylık sağlar. Noether teoremi, kozmolojide doğrusal olmayan (non-linear) alan denklemlerinin çözümünde kullanışlı bir yöntemdir (Capozziello vd 1996, de Ritis vd 1990).

3.4. Heun Diferansiyel Denklemleri ve Çözümleri

Kuramsal fiziğin uğraş alanı çerçevesindeki bir çok fiziksel sistem, birkaç diferansiyel denklem ailesi ile temsil edilebilir. İkinci mertebe lineer bir diferansiyel denklem olan Heun denklemi, son zamanlarda hem matematik hem de kuramsal fizikte aktif bir uygulama alanı bulmaktadır (Hortaçsu 2013). Genel ikinci mertebeden lineer Fuchsian diferasiyel denklem olan Heun denklemi dört tane tekil noktası vardır (Gürtaş 2012, Ronveaux 1995). Heun denkleminin genel kanonik formu, $\gamma+\delta+\epsilon=\alpha+\beta+1$ koşulu altında,

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{\gamma}{x}+\frac{\delta}{x-1}+\frac{\varepsilon}{x-a}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{\alpha\beta x-q}{z\left(z-1\right)\left(z-a\right)}y=0 \tag{3.31}$$

ile verilir. Bu denklem x=$0,1,a,\infty$ olmak üzere dört tane tekilliği vardır. Genel Heun diferansiyel denkleminin çözümü $H_G(a,q,\alpha,\gamma,\delta,x)$ ile temsil edilen genel Heun fonksiyonları ile verilir. $H_G(a,q,\alpha,\gamma,\delta,x)$ polinom çözümleri için, n tam sayı olmak üzere, α=$-n$ koşulu sağlanmalıdır. Genel Heun diferansiyel denklemi üç farklı durum için hipergeometrik diferansiyel denkleme indirgenir: a=1 ve q=$\alpha\beta$ durumunda, a=q=0 durumunda veya ϵ=0 ve q=$a\alpha\beta$ durumunda. Öte yandan, γ=δ=ϵ=$\frac{1}{2}$ durumunda Lame diferansiyel denklemine indirgenir.

Genel Heun diferansiyel denklemi dört tane önemli konflüent diferansiyel denkleme indirgenebilir (Gürtaş 2012, Ronveaux 1995). Konflüent diferansiyel denklemler, denklemlerin düzenli sonlu bir tekil noktasi ile z=∞'da bulunan düzenli tekil noktasının yine sonsuzda düzensiz bir tekilliğe yol açmasıyla elde edilir. Örneğin, x=a ve x=∞' da bulunan tekil noktaların birleştirilmesi sonucu konfluent Heun diferansiyel denklemi elde edilir:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\alpha+\frac{1+\beta}{x}+\frac{1+\varepsilon}{x-1}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{\mu}{x}+\frac{\upsilon}{x-1}\right)y=0. \tag{3.32}$$

Burada,

$$\mu=\frac{1}{2}\left[\alpha-\beta-\varepsilon-2\eta+\beta\left(\alpha-\varepsilon\right)\right],\ \upsilon=\frac{1}{2}\left[\alpha+\beta+\varepsilon+2\delta+2\eta+\varepsilon\left(\alpha+\beta\right)\right]$$

kısaltmaları kullanılmıştır. Konfluent Heun denklemi $x=0,1$ noktalarında düzenli tekil noktalara ve x=∞ noktasında ise düzensiz bir tekil noktaya sahiptir. Konfluent Heun diferansiyel denkleminin çözümü $H_C(\alpha,\beta,\epsilon,\delta,\eta,x)$ ile verilen konfluent Heun fonksiyonlarıdır. n=$0,1,2,3...$ olmak üzere,

$$\delta=-\alpha\left(n+1+\frac{\beta+\varepsilon}{2}\right)$$

koşulu altında konfluent Heun fonksiyonları polinom çözümlere dönüşür.

Çift (Double) konfluent Heun diferansiyel denklemi ise, $x\to\frac{x}{b}$ dönüşümü yapılıp x=1'deki düzenli tekil nokta x=∞'daki düzenli tekil noktaya taşınıp, aynı anda $a\to\infty$ ve $b\to0$ limitleri alınması ile elde edilir. Çitf konfluent Heun diferansiyel denkleminin kanonik formu,

$$\begin{aligned}x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\alpha_1x+\frac{\alpha_{-1}}{x}\right)\frac{dy}{dx}+\left[\left(B_0+\frac{\alpha_1\alpha_{-1}}{2}\right)+\left(B_1+\frac{\alpha_1}{2}\right)x\right]y\\+\left[\left(B_{-1}-\frac{\alpha_{-1}}{2}\right)\frac{1}{x}\right]y=0\end{aligned} \tag{3.33}$$

ile verilir. Burada, $\alpha_1, \alpha_{-1}, B_{-1}, B_0$ ve B_1 keyfi birer kompleks parametredir. Denklemin $x{=}0$ ve $x{=}\infty$'da olmak üzere iki tane düzensiz tekil noktası bulunmaktadır.

Öte yandan, $x \to \frac{x}{b}$ dönüşümü yapılıp $x{=}1$'deki düzenli tekil nokta $x{=}\infty$'daki düzenli tekil noktaya taşınıp, aynı anda $a \to \infty$ ve $b \to \infty$ limitleri alınması ile bikonfluent Heun diferansiyel denklemi elde edilir. Kanonik form olarak da,

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \left(1+\alpha-\beta x-2x^2\right)\frac{dy}{dx} + \left[\left(\gamma-\alpha-2\right)x - \frac{\delta+\left(1+\alpha\right)\beta}{2}\right]y = 0 \quad (3.34)$$

şeklinde yazılabilir. Bikonfluent Heun diferansiyel denkleminin $x{=}0$'da düzenli ve $x{=}\infty$'da ise düzensiz olmak üzere iki tane tekil noktası mevcuttur. Diferansiyel denklemin genel çözümü, $H_B(\alpha,\beta,\gamma,\delta,x)$ bikonfluent Heun fonksiyonları cinsinden kurulur. Heun fonksiyonları,

$$\gamma = 2\left(n+1\right)+\alpha$$

koşulu ile polinom çözümleri elde edilir.

Son olarak, genel Heun diferansiyel denkleminden doğrudan elde edilemeyen trikonfluent Heun diferansiyel denklemi ise

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \left(3x^2+\gamma\right)\frac{dy}{dx} + \left[\alpha+\beta x-3x\right]y = 0 \quad (3.35)$$

olarak verilir. Trikonfluent Heun diferansiyel denkleminin sadece $x{=}\infty$'da düzensiz tekil noktası bulunur. Denklemin genel çözümü, $H_T(\alpha,\beta,\gamma,x)$ trikonfluent Heun fonksiyonları ile verilir. Bu fonksiyonların,

$$\beta = 3\left(n+1\right)$$

koşulu ile polinom çözümleri elde edilir.

4. BULGULAR

4.1. Yeni-tip Kara Delik için Dirac Denkleminin Çözümleri

Fermiyonların (2+1) boyutlu yeni-tip kara delik uzay-zamanındaki davranışlarını incelemek için, (2.15) denklemi ile verilen Dirac denklemi kullanılacaktır. Bunun için öncelikle triadların, uzay-zamana bağlı Dirac matrislerinin ve spin bağlantı katsayılarının hesaplanması gerekir. (2.8) denklemi kullanılarak, sırasıyla, triadlar,

$$e^{\alpha}_{(i)} = diag(\frac{1}{L\sqrt{f(r)}}, \frac{\sqrt{f(r)}}{L}, \frac{1}{Lr}) \tag{4.1}$$

uzay-zamana bağlı Dirac matrisleri

$$\overline{\sigma}^0(x) = \frac{1}{L\sqrt{f(r)}}\sigma^3, \quad \overline{\sigma}^1(x) = i\frac{\sqrt{f(r)}}{L}\sigma^3, \quad \overline{\sigma}^2(x) = \frac{i}{Lr}\sigma^2, \tag{4.2}$$

ve spin bağlantı katsayıları da,

$$\Gamma_0 = -\frac{1}{4}f^{'}(r)\overline{\sigma}^3\overline{\sigma}^1 \ , \quad \Gamma_1 = 0, \quad \Gamma_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{f(r)}\overline{\sigma}^1\overline{\sigma}^2 \tag{4.3}$$

olarak hesaplanır. Buna göre Dirac denklemi,

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt[4]{f(r)r^2}}e^{-iEt}e^{ik\phi}\begin{pmatrix} R_1(r) \\ R_2(r) \end{pmatrix}$$

Dirac spinörünün tanımı kullanılarak,

$$\sqrt{f(r)}\left[\frac{d}{dr} - \frac{k}{r\sqrt{f(r)}}\right]R_1(r) + \left[m_0 + \frac{E}{\sqrt{f(r)}}\right]R_2(r) = 0,$$

$$\sqrt{f(r)}\left[\frac{d}{dr} + \frac{k}{r\sqrt{f(r)}}\right]R_2(r) + \left[m_0 - \frac{E}{\sqrt{f(r)}}\right]R_1(r) = 0 \tag{4.4}$$

şeklinde iki tane çiftlenimli denkleme indirgenir. Şimdi, Çizelge 2.1'de verilen yeni-tip kara delik uzay-zamanının özel durumlardan bazıları için Dirac denkleminin çözümlerini inceleyelim.

A- $b^2 = 4c$ **ve** $m_0 = 0$ **durumu:** Bu özel durum, kütlesiz Dirac parçacığının, ekstremal Yeni-tip kara delik uzay-zamanındaki hareketini betimler. Bu durumda, $r_0 = b/2$ ve $f(r) = (r + r_0)^2$ olmak üzere, (4.4) ile verilen çiftlenimli denklemlerin genel çözümleri, Whittaker fonksiyonları cinsinden,

$$R_1(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}\left\{AW\left(0, \frac{2k - r_0}{2r_0}, i\frac{2Er}{r_0(r + r_0)}\right) + BW\left(0, -\frac{2k - r_0}{2r_0}, i\frac{2Er}{r_0(r + r_0)}\right)\right\},$$

$$R_2(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \left\{ CW\left(0, \frac{2k + r_0}{2r_0}, i\frac{2Er}{r_0(r + r_0)}\right) + DW\left(0, -\frac{2k + r_0}{2r_0}, i\frac{2Er}{r_0(r + r_0)}\right) \right\} \tag{4.5}$$

şeklinde bulunur. Burada, A, B, C ve D normalizasyon sabitleridir.

B- $b^2 = 4c$ **ve** $k = 0$ **durumu:** Sıfır açısal momentum kuantum sayısına sahip kütleli Dirac parçacığının, ekstremal Yeni-tip karadelik uzay-zamanındaki hareketi için Denklem (4.4)' ün çözümleri,

$$\begin{aligned} R_1(r) = {} & A\frac{E\,(r + r_0)^{m_0} \exp\left(\frac{iE}{r+r_0}\right)}{(m_0 r + m_0 r_0 + E)\sqrt{r}} H_C\left(i2m_0, -2m_0, -2, 0, 1, \frac{E}{m_0\,(r + r_0)}\right) \\ & + B\frac{E\,(r + r_0)^{-m_0} \exp\left(\frac{iE}{r+r_0}\right)}{(m_0 r + m_0 r_0 + E)\sqrt{r}} H_C\left(i2m_0, 2m_0, -2, 0, 1, \frac{E}{m_0\,(r + r_0)}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2(r) = {} & C\frac{(r + r_0)^{m_0} \exp\left(\frac{iE}{r+r_0}\right)}{\sqrt{r}} H_C\left(i2m_0, -2m_0, -2, 0, 1, \frac{E}{m_0\,(r + r_0)}\right) \\ & + D\frac{(r + r_0)^{-m_0} \exp\left(\frac{iE}{r+r_0}\right)}{\sqrt{r}} H_C\left(i2m_0, 2m_0, -2, 0, 1, \frac{E}{m_0\,(r + r_0)}\right) \end{aligned} \tag{4.6}$$

A, B, C ve D normalizasyon sabitleri olmak üzere konflüent Heun fonksiyonları cinsinden bulunur.

C- $b = 0$ **ve** $c < 0$ **durumu:** Bu durumda $f(r) = r^2 + c$ olur ve yeni-tip karadelik metriği, dönmeyen BTZ kara delik metriğine indirgenir. Denklem (4.4) ile verilen çiftlenimli denklem sistemini bu özel koşul altında çözmebilmek için,$r = \sqrt{|c|}\sinh(\theta)$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d}{d\theta} - \frac{\widetilde{k}}{\sinh(\theta)}\right] R_1(\theta) + \left[m_0 + \frac{\widetilde{E}}{\cosh(\theta)}\right] R_2(\theta) = 0, \\ & \left[\frac{d}{d\theta} + \frac{\widetilde{k}}{\sinh(\theta)}\right] R_2(\theta) + \left[m_0 - \frac{\widetilde{E}}{\cosh(\theta)}\right] R_1(\theta) = 0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

elde edilir. Burada, $\widetilde{k} = k/\sqrt{|c|}$ ve $\widetilde{E} = E/\sqrt{|c|}$. Yukarıdaki çiftlenimli diferansiyel denklem sistemini çözebilmek için, önce taraf tarafa toplayıp ve sonra da taraf tarafa çıkarırsak,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d}{d\theta} + \widetilde{k}\frac{\cosh(\theta)}{\sinh(\theta)} + \widetilde{E}\frac{\sinh(\theta)}{\cosh(\theta)}\right] F(\theta) + \left[\widetilde{E} + m_0 - \widetilde{k} - \frac{1}{2}\right] G(\theta) = 0, \\ & \left[\frac{d}{d\theta} - \widetilde{k}\frac{\cosh(\theta)}{\sinh(\theta)} - \widetilde{E}\frac{\sinh(\theta)}{\cosh(\theta)}\right] G(\theta) + \left[-\widetilde{E} + m_0 + \widetilde{k} - \frac{1}{2}\right] F(\theta) = 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

denklem sistemi elde edilir. Burada,

$$R_1(\theta) + R_2(\theta) = \exp\left(-\frac{\theta}{2}\right)[F(\theta) + G(\theta)],$$

$$R_2(\theta) - R_1(\theta) = \exp\left(\frac{\theta}{2}\right)[F(\theta) - G(\theta)]$$

tanımları kullanılmıştır. Bu iki çiftlenimli diferansiyel denklemin ortak çözümünden,

$$\begin{aligned} G(\theta) = {} & A\sinh^{\widetilde{k}}(\theta)\cosh^{\widetilde{E}}(\theta)_2 F_1\left[a, b, \frac{1+2\widetilde{E}}{2}, \cosh^2(\theta)\right] \\ & + B\sinh^{\widetilde{k}}(\theta)\cosh^{1-\widetilde{E}}(\theta)_2 F_1\left[c, d, \frac{3-2\widetilde{E}}{2}, \cosh^2(\theta)\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(\theta) = {} & C\widetilde{k}\sinh^{\widetilde{k}-1}(\theta)\cosh^{\widetilde{E}+1}(\theta)_2 F_1\left[a, b, \frac{1+2\widetilde{E}}{2}, \cosh^2(\theta)\right] \\ & + D\widetilde{k}\sinh^{\widetilde{k}-1}(\theta)\cosh^{-\widetilde{E}}(\theta)_2 F_1\left[c, d, \frac{3-2\widetilde{E}}{2}, \cosh^2(\theta)\right] \end{aligned} \tag{4.9}$$

şeklinde elde edilir. Burada, A, B, C ve D normalizasyon sabitleridir ve,

$$a = \frac{2\left(\widetilde{k} + \widetilde{E}\right) + \sqrt{1 + 4m_0(m_0 - 1) + 16\widetilde{k}\widetilde{E}}}{4},$$

$$b = \frac{2\left(\widetilde{k} + \widetilde{E}\right) - \sqrt{1 + 4m_0(m_0 - 1) + 16\widetilde{k}\widetilde{E}}}{4},$$

$$c = \frac{2\left(\widetilde{k} - \widetilde{E} + 1\right) + \sqrt{1 + 4m_0(m_0 - 1) + 16\widetilde{k}\widetilde{E}}}{4},$$

$$d = \frac{2\left(\widetilde{k} - \widetilde{E} + 1\right) - \sqrt{1 + 4m_0(m_0 - 1) + 16\widetilde{k}\widetilde{E}}}{4}$$

kısaltmaları kullanılmıştır.

4.2. Yeni-tip Kara Delik için DKP Denkleminin Çözümleri

Spin-1 vektör parçacıklarının (2+1) boyutlu yeni-tip kara deliği uzay-zamanındaki hareketini incelemek için (2.21) ile verilen relativistik dalga denklemi kullanılacaktır. Denklem (2.22) ile verilen Kemmer matrisleri, Denklem (2.16) ve Denklem (4.36) kullanılarak,

$$\beta^0 = \overline{\sigma}^0(x) \otimes I + I \otimes \overline{\sigma}^0(x) = \frac{2}{L\sqrt{f}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\beta^1 = \overline{\sigma}^1(x) \otimes I + I \otimes \overline{\sigma}^1(x) = \frac{i\sqrt{f}}{L} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta^2 = \overline{\sigma}^2(x) \otimes I + I \otimes \overline{\sigma}^2(x) = \frac{1}{Lr} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

şeklinde bulunur. Öte yandan, Denklem (2.23) ile verilen spin bağlantı katsayıları Denklem (4.37) yardımı ile,

$$\Sigma_0 = -\frac{i}{4}\frac{df}{dr} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \Sigma_1 = 0, \ \Sigma_2 = -i\sqrt{f} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

olarak hesaplanır. Buna göre, Denklem (2.21) ile verilen DKP denkleminde, Denklem (2.24) dalga fonksiyonu tanımı kullanılarak,

$$\frac{2}{\sqrt{f(r)}}\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + i\frac{\Psi_2 + \Psi_3}{2\sqrt{f(r)}}\frac{df(r)}{dr} + i\sqrt{f(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left[\Psi_2 + \Psi_3\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\left[\Psi_2 + \Psi_3\right] = -m_0\Psi_1 \tag{4.12}$$

$$\frac{2}{\sqrt{f(r)}}\frac{\partial \Psi_4}{\partial t} - i\frac{\Psi_2 + \Psi_3}{2\sqrt{f(r)}}\frac{df(r)}{dr} + i\sqrt{f(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left[\Psi_2 + \Psi_3\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\left[\Psi_2 + \Psi_3\right] = -m_0\Psi_4 \tag{4.13}$$

$$i\sqrt{f(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left[\Psi_1 + \Psi_4\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\left[\Psi_4 - \Psi_1\right] + i\frac{\sqrt{f(r)}}{r}\left[\Psi_4 + \Psi_1\right] = -m_0\Psi_2 \tag{4.14}$$

$$i\sqrt{f(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left[\Psi_1 + \Psi_4\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\left[\Psi_4 - \Psi_1\right] + i\frac{\sqrt{f(r)}}{r}\left[\Psi_4 + \Psi_1\right] = -m_0\Psi_3 \tag{4.15}$$

denklem sistemi elde edilir. Denklem (4.14) ve Denklem (4.15) karşılaştırıldığında, Ψ_2=Ψ_3 olduğu görülür. Öte yandan,

$$\Psi_{DKP} = e^{-iEt}e^{ik\phi}\begin{pmatrix} R_1(r) \\ R_2(r) \\ R_2(r) \\ R_4(r) \end{pmatrix}$$

tanımı yukarıdaki denklem sisteminde yerine yazıldıktan sonra, Denklem (4.12) ile Denklem (4.13) taraf tarafa toplanıp çıkarılırsa,

$$R_1(r) + R_4(r) = \frac{4f(r)}{2E - m_0\sqrt{f(r)}}\frac{dR_2(r)}{dr}, \tag{4.16}$$

$$R_4(r) - R_1(r) = \frac{2f(r)}{m_0\sqrt{f(r)} - 2E}\left[\frac{1}{\sqrt{f(r)}}\frac{df(r)}{dr} + \frac{2k}{r}\right]R_2(r) \tag{4.17}$$

bulunur. Dolayısıyla, Denklem (4.14)

$$\frac{d^2R_2(r)}{dr^2} + \left[\frac{1}{\sqrt{f(r)}}\frac{df(r)}{dr} + \frac{m_0\sqrt{f(r)}}{2f(r)\left[2E - m_0\sqrt{f(r)}\right]}\frac{df(r)}{dr} + \frac{1}{r}\right]\frac{dR_2(r)}{dr}$$
$$+\left[\frac{m_0\left[2E - m_0\sqrt{f(r)}\right]}{4f(r)\sqrt{f(r)}} - \frac{k^2}{r^2f(r)} - \frac{k}{2f(r)\sqrt{f(r)}}\frac{df(r)}{dr}\right]R_2(r) = 0 \tag{4.18}$$

şeklinde indirgenir. Denklem (4.18)'yı çözmek için Çizelge 2.1' deki bazı özel durumları kullanalım.

A- b^2=$4c$ **ve** m_0=0 **durumu:** Kütlesiz vektör parçacığının, ekstremal Yeni-tip kara delik uzay-zamanındaki hareketini betimler. Bu durumda, r_0=$b/2$ ve $f(r)$=$(r+r_0)^2$ olmak üzere, Denklem (4.18)

$$\frac{d^2R_2(r)}{dr^2} + \left[\frac{1}{r} + \frac{2}{r+r_0}\right]\frac{dR_2(r)}{dr} - \left[\frac{k}{r\left(r+r_0\right)^2} + \frac{k^2}{r^2\left(r+r_0\right)^2}\right]R_2(r) = 0$$

olur. Bu denklemin çözümü de,

$$R_2(r) = A\left(\frac{r}{r+r_0}\right)^{\frac{k}{r_0}} + B\frac{(2k - r - r_0)}{r+r_0}\left(\frac{r+r_0}{r}\right)^{\frac{k}{r_0}}$$

ile verilir. Burada, A ve B normalizasyon sabitleridir.

B- b=0 **ve** c<0 **durumu:** Kütleli vektör bozonlarının hareketlerini belirlemek için, bu özel durumda Denklem-(4.18)

$$\frac{d^2R_2(r)}{dr^2} + \left[\frac{1}{r} + \frac{2}{r^2 - a^2}\right]\frac{dR_2(r)}{dr} - \left[\frac{k}{\left(r^2 - a^2\right)^{3/2}} + \frac{k^2}{r^2\left(r^2 - a^2\right)}\right]R_2(r) = 0$$

şeklinde olur. Burada, $a{=}i\sqrt{|c|}$. Bu denklemin genel çözümü ise, genel Heun fonksiyonları cinsinden,

$$R_2(r) = Ar^{-i\frac{k}{r_0}} H_G\left(2, \frac{ik\,(ik-3a)}{a^2}, -\frac{ik}{a}, \frac{2a-ik}{a}, \frac{a-ik}{a}, 1, \frac{a-i\sqrt{r^2-a^2}}{a}\right)$$

$$+B\frac{\left(a+i\sqrt{r^2-a^2}\right)^{\frac{a+ik}{2a}}\left(a-i\sqrt{r^2-a^2}\right)^{\frac{a-ik}{2a}}}{r} H_G\left(2, 0, 0, 2, \frac{a+ik}{a}, 1, \frac{a-i\sqrt{r^2-a^2}}{a}\right)$$

şeklinde bulunur.

4.3. Warped-AdS$_3$ Kara Delik için Dirac Denkleminin Çözümü

Spin-1/2 Dirac parçacıkların warped-AdS$_3$ kara deliğinin varlığındaki davranışlarını ve bu parçacıkların karadelik üzerindeki etkilerinin araştırılması için (2.15) denklemi ile verilen eğri uzay-zaman formunda yazılan Dirac denklemi kullanılacaktır. Buna göre, Denklem (2.9) ile verilen warped-AdS$_3$ karadelik metriği için, Denklem (2.17) kullanılarak triadlar, Denklem (2.16 kullanılarak uzay-zamana bağlı Dirac matrisleri ve Denklem (2.19 kullanılarak spin-bağlantı katsayıları hesaplanır. Bu durumda, triadlar

$$e^{\mu}_{(0)} = \left(\frac{1}{N}, 0, -\frac{N^{\phi}}{N}\right), \quad e^{\mu}_{(1)} = (0, FN, 0), \quad e^{\mu}_{(2)} = \left(0, 0, \frac{1}{F}\right), \tag{4.19}$$

Dirac matrisleri,

$$\overline{\sigma}^0(x) = \frac{1}{N(r)}\sigma^3, \ \overline{\sigma}^1(x) = iN(r)F(r)\sigma^3,$$

$$\overline{\sigma}^2(x) = -\frac{N^{\phi}(r)}{N(r)}\sigma^3 + \frac{i}{F(r)}\sigma^2 \tag{4.20}$$

ve spin bağlantı katsayıları da,

$$\Gamma_0 = -\frac{F}{4}\left[\left(2N\frac{dN}{dr} - F^2N^{\phi}\frac{dN^{\phi}}{dr}\right)\sigma^3\sigma^1 + \left(2NN^{\phi}\frac{dF}{dr} + FN\frac{dN^{\phi}}{dr}\right)\sigma^1\sigma^2\right],$$

$$\Gamma_1 = -\frac{1}{8N^3}\left(\frac{FN^{\phi}}{N}I - \sigma^3\sigma^1\right)\left[\left(2N^2F + F^3N^{\phi^2}\right)\frac{dN^{\phi}}{dr} + 2N^2N^{\phi}\frac{dF}{dr}\right],$$

$$\Gamma_2 = \frac{1}{4}\left[F^3\frac{dN^{\phi}}{dr}\sigma^3\sigma^1 - 2NF\frac{dF}{dr}\sigma^1\sigma^2\right] \tag{4.21}$$

şeklinde olur. Elde edilen bu sonuçlar, (2.15) ile verilen Dirac denkleminde yazılıp, Dirac spinorü için

$$\Psi = e^{-iEt}e^{ik\phi}\begin{pmatrix} R_1(r) \\ R_2(r) \end{pmatrix}$$

tanımı yardımı ile,

$$\left[-\frac{E}{N}-\frac{kN^{\phi}}{N}+m_0+M(r)\right]R_1(r)+\left[NF\frac{d}{dr}+K(r)+\frac{k}{F}\right]R_2(r)=0,$$

$$\left[NF\frac{d}{dr}+K(r)-\frac{k}{F}\right]R_1(r)+\left[\frac{E}{N}+\frac{kN^{\phi}}{N}+m_0+M(r)\right]R_2(r)=0 \quad (4.22)$$

iki tane çiftlenimli denklem elde edilir. Burada, E parçacığın enerjisi, k açısal momentum kuantum sayısı ve $K(r)$ ile $M(r)$ kısaltmaları aşağıdaki gibidir,

$$\begin{aligned} K(r) &= \frac{2FNN'-F^3N^{\phi}N^{\phi'}}{4N}+\frac{F^2N^{\phi}\left(2N^2FN^{\phi'}+F^3N^{\phi}N^{\phi'}+2N^2N^{\phi}F'\right)}{8N^3} \\ &+\frac{F^3N^{\phi}N^{\phi'}}{4N}+\frac{NF'}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(r) &= -\frac{2N^{\phi}NFF'+F^2NN^{\phi'}}{4N}-\frac{F^2\left(2N^2FN^{\phi'}+F^3N^{\phi}N^{\phi'}+2N^2N^{\phi}F'\right)}{8N^2} \\ &+\frac{F^2N^{\phi'}}{4}+\frac{N^{\phi}FF'}{2}. \end{aligned}$$

Burada, "′" işareti r' ye göre türevi göstermektedir. Şimdi, (4.22) çiftlenimli denklemlerini, Warped-AdS$_3$ karadeliğinin r_0=0 ve ω=0 için taban durumu ya da vakum durumu olarak adlandırılan extremal özel bir durumu için çözelim. Dolayısıyla Denklem (4.22) aşağıdaki gibi sadeleşir:

$$\left[r\frac{d}{dr}-\frac{3}{2}-\frac{k}{r}\right]R_1(r)+\left[E-\frac{2k}{r}+m_0-\frac{3}{2}\right]R_2(r)=0,$$

$$\left[r\frac{d}{dr}-\frac{3}{2}+\frac{k}{r}\right]R_2(r)-\left[E-\frac{2k}{r}-m_0+\frac{3}{2}\right]R_1(r)=0 \quad (4.23)$$

Bu iki denklemin ortak çözümünden konfluent Heun fonksiyonları bulunur.

$$R_1(r)=Ae^{i\frac{k\sqrt{3}}{r}}r^{\frac{3-\sqrt{(9-4E^2)+4m_0(m_0-3)}}{2}}H_C\left(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\eta,\frac{4hk}{(2E+2m_0-3)\,r}\right). \quad (4.24)$$

Burada A normalizasyon sabiti olmak üzere, aşağıda verilen kısaltmalar kullanılmıştır.

$$\alpha=i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(2E+2m_0-3\right), \quad \beta=\sqrt{(9-4E^2)+4m_0\left(m_0-3\right)}, \quad \gamma=-2,$$

$$\delta = -2\left(E + m_0 - \frac{3}{2}\right), \qquad \eta = \frac{8E^2 + E\left(8m_0 - 14\right) + 7 - 2m_0}{4}.$$

Konfluent Heun fonksiyonlarının özelliklerinden yararlanarak enerji spektrumu bulunabilir. n pozitif tam sayı olmak üzere,

$$\delta = -\alpha\left[n + 1 + \frac{\beta + \gamma}{2}\right]$$

bağıntısından, spin-1/2 Dirac parçacıklarının yarı-normal modlarının (quasi-normal modes) frekansları,

$$\omega_1 = \frac{3 - 2m_0}{2},$$

$$\omega_2 = i\frac{\sqrt{3}}{2}\left[4n + \sqrt{12n^2 + 4m_0^2 - 12m_0 + 9}\right],$$

$$\omega_3 = i\frac{\sqrt{3}}{2}\left[4n - \sqrt{12n^2 + 4m_0^2 - 12m_0 + 9}\right] \tag{4.25}$$

olarak bulunur. Karateristik kompleks frekaslar içeren ve pertürbasyon denklemlerinin tam çözümleri olan yarı-normal modlar, kuantum kütleçekim fiziğini ve kara delik fiziğini daha derin bir şekilde anlaşılması bakımından önemlidir. Yarı-normal mod frekansaları reel kısmı pertürbasyon alanının harmonik hareketinin frekansını verirken, kompleks kısım ise sönüm hareketinin frekansı ile ilişkilidir (Chandrasekhar ve Detweiler 1975, Myung ve Moon 2012). Bilinen bütün yarı-normal modlar sadece kompleks kısma sahip olmalarına rağmen, genel olarak ω_{QNM}=ω_R + ω_I şeklinde gösterilir (Fernando ve Correa 2012, Myung ve Moon 2012). Frekansın kompleks kısmı bir kara deliğin kararlılığı ile ilgilidir. Buna göre, yarı-normal mod frekansının kopleks kısmının negatif olması kara deliğin pertürbatif alan var olmasına rağmen kararlı kaldığını gösterir. Öte yandan, yarı-normal mod frekansının kopleks kısmının pozitif olması pertürbatif alanın kara deliği tedirgin ettiğini ve kararsızlaştırdığı anlamına gelir. Biz çalışmamızda, warped-AdS_3 karadeliğinin özel bir durumu olan taban durum (vakum durum) yani çıplak tekillik hali için, fermiyonik alanı pertürbatif alan olarak kullandık. Warped-AdS_3 karadeliğinin bu özel durumu için bulmuş olduğumuz yarı-normal mod frekans değerleri Denklem (4.25) ile verilmektedir. Dolayısıyla, n=0 ve n=1 değerleri için ω_3 yarı-normal mod frekansının negatif değer aldığı ve buna bağlı olarak fermiyonik alanın varlığında ekstremal warped-AdS_3 kara deliğinin kararsız olacağı görülür. Bu kararsızlık da, ekstremal warped-AdS_3 kara deliğinin termodinamiksel özellikleri ile yakından ilişkilidir. Modern kozmolojinin hala açık olan problemlerinden biri olan ekstremal karadelikler ve çıplak tekillikli kara deliklerin varlığına dairdir. Bu çalışmada, ekstremal ve aynı zamanda çıplak bir tekilliğe sahip bir kara deliğin fiziksel bir özelliği olduğu gözlemlendi. Bir sonraki bölümde, aynı kara deliğin, yine bu özel durumu göz önünde bulundurularak, parçacık tünelleme yöntemi kullanılarak, Hawking sıcaklığı hesaplanacaktır.

4.4. Yeni-tip Kara Deliğinden Parçacık Tünellemesi ve Hawking Sıcaklığı

4.4.1. Spin-0 skaler parçacık tünellemesi ve Hawking sıcaklığı

Denklem (2.8) ile verilen (2+1) boyutlu yeni-tip kara deliğinden spin-0 paraçacıklarının tünellemesini incelemek için, Denklem (2.14)'deki spin-0 parçacıklarını temsil eden Klein-Gordon denklemi kullanılır. Skaler parçacığı temsil eden dalga fonksiyonu, A bir sabit ve $S(t,r,\phi)$ parçacığın klasik eylem fonksiyonu olmak üzere (Srinivasan ve Padmanabhan 1999),

$$\Phi(t,r,\phi) = A\exp\left(\frac{i}{\hbar}S(t,r,\phi)\right) \tag{4.26}$$

ile tanımlanır. Bu tanım ve Denklem-(2.8) yardımı ile Klein-Gordon denklemi, $\hbar$ Planck sabitini içeren terimlerin ihmal edilmesi ile Hamilton-Jacobi denklemi elde edilir.

$$\frac{1}{f(r)}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - f(r)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 - m_0^2L^2 = 0. \tag{4.27}$$

Yeni-tip karadeliğin Killing vektörleri, ∂_t ve ∂_ϕ olduğundan, yukarıdaki Hamilton-Jacobi denklemini çözmek için, $S(t,r,\phi){=}{-}Et + j\phi + W(r) + C$ çözüm önerisi yapılır. Burada, E ve j sırasıyla skaler parçacığın enerjisi ve açısal momentumu, C ise sanal bir sabittir. Buna göre, parçacığı radyal denklemi,

$$W_\pm(r) = \pm\int\frac{\sqrt{E^2 - f(r)\left(m_0^2L^2 + \frac{j^2}{r^2}\right)}}{f(r)}dr \tag{4.28}$$

şeklinde bulunur. Burada, $'+'$ ve $'-'$, sırasıyla kara delikten çıkan ve içine giren skaler parçacıklarının radyal yörüngelerini temsil eder. Yeni-tip karadelik $r{=}r_+$' da basit bir kutbu vardır. Bu basit kutup civarında $f(r)$,

$$f(r_+) = (r - r_+)\left(\frac{df(r)}{dr}\right) + \frac{1}{2}(r - r_+)^2\left(\frac{d^2f(r)}{dr^2}\right) + ... \tag{4.29}$$

şeklinde seriye açılıp birinci mertebeden terimlerin katkısı dikkate alınırsa, $r{=}r_+$'daki dış olay ufku civarında, Denklem (4.28) kompleks integralinin değeri,

$$W_\pm(r) = \pm i\frac{\pi E}{f'(r_+)}. \tag{4.30}$$

Öte yandan, bir Parçacığın, kara deliğin olay ufkunun iç kısmından dış kısmına doğru tünelleme olasılığı (Volovik 1992),

$$\Gamma = e^{-\frac{2}{\hbar}ImS} = \frac{P_{out}}{P_{in}} \tag{4.31}$$

ile verilir. Burada, P_{out} ve P_{in} sırasıyla parçacıkların kara delikten kaçma ve kara deliğin içine düşme olasılıklarıdır ve aşağıdaki gibi tanımlanırlar:

$$P_{out} = \exp\left[-\frac{2}{\hbar}ImW_{+}(r)\right],$$

$$P_{in} = \exp\left[-\frac{2}{\hbar}ImW_{-}(r)\right] \tag{4.32}$$

Bu durumda, Denklem-(4.31)' den $ImS(t,r,\phi)$=$ImW_{+}(r) - ImW_{-}(r)$. Ayrıca, Denklem (4.30 göre, $ImW_{+}(r)$=$-ImW_{-}(r)$ olduğu görülür. Buna göre skaler parçacığın tünelleme olasılığı,

$$\Gamma = \exp\left[-\frac{4\pi E}{\hbar\, f'(r_{+})}\right]. \tag{4.33}$$

olarak bulunur. Öte yandan, klasik eylem fonksiyonu parçacığın enerjisine göre seriye açılırsa olasılık,

$$\Gamma = e^{-\frac{2}{\hbar}ImS} = e^{-\beta E} \tag{4.34}$$

olarak bulunur. Burada, β sıcaklığın tersidir. Bütün bunların ışığında, (2+1) boyutlu Yeni-tip kara deliğinden tünelleyen skaler parçacığının Hawking sıcaklığı,

$$T_{H} = \hbar\frac{f'(r_{+})}{4\pi} \tag{4.35}$$

olarak bulunur (Geçim ve Sucu 2013). Bu sonuç klasik yöntem olan yüzey kütleçekim (surface gravity) ile hesaplanan değer ile tutarlıdır. Şöyle ki, Yeni-tip kara deliğin dış olay ufku için yüzey kütleçekimi

$$\kappa = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{tt}}{\sqrt{-g_{tt}g_{rr}}}\right]_{r=r_{+}} = \frac{1}{2}f'(r_{+})$$

için Hawking sıcaklığı,

$$T_{H} = \frac{\hbar\kappa}{2\pi} = \hbar\frac{f'(r_{+})}{4\pi}$$

şeklinde hesaplanır.

4.4.2. Spin-1/2 Dirac parçacık tünellemesi ve Hawking sıcaklığı

Spin-$1/2$ Dirac parçacıklarının (2+1) boyutlu Yeni-tip kara delikten tünelleme olasılıklarını ve oluşturdukları Hawking sıcaklığını hesaplamak için Denklem (2.15) ile verilen Dirac denklemi kullanılacaktır. Bu nedenle, (2+1) boyutlu Yeni-tip kara delik için sıfırdan farklı triadlar Denklem (2.17) ve spin bağlantı katsayıları da Denklem (2.19) ve Denklem (2.20) kullanılarak hesaplanmalıdır. Buna göre, sıfırdan farklı triadlar,

$$e^{\alpha}_{(i)} = diag\left(\frac{1}{L\sqrt{f(r)}}, \frac{\sqrt{f(r)}}{L}, \frac{1}{Lr}\right) \tag{4.36}$$

ve spin bağlantı katsayıları da,

$$\Gamma_0 = -\frac{1}{4} f^{'}(r)\overline{\sigma}^3\overline{\sigma}^1\ , \quad \Gamma_1 = 0, \quad \Gamma_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{f(r)}\overline{\sigma}^1\overline{\sigma}^2 \tag{4.37}$$

olarak hesaplanır. Buna göre Dirac denklemi,

$$\begin{aligned} & i\sqrt{f(r)}\left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r\sqrt{f(r)}}\frac{\partial}{\partial \phi}\right]\Psi_1 + \left[-\frac{1}{\sqrt{f(r)}}\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{m_0 L}{\hbar}\right]\Psi_2 = 0, \\ & i\sqrt{f(r)}\left[\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r\sqrt{f(r)}}\frac{\partial}{\partial \phi}\right]\Psi_2 + \left[\frac{1}{\sqrt{f(r)}}\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{m_0 L}{\hbar}\right]\Psi_1 = 0 \end{aligned} \tag{4.38}$$

şeklinde çiftlenimli iki denkleme indirgenir. Dirac parçacıklarının Denklem (2.8) ile verilen (2+1) boyutlu yeni-tip kara delikten tünelleme olayını incelemek için Dirac spinörü, $A\,(t, r, \phi)$ ve $B\,(t, r, \phi)$ uzay-zaman koordinatlarına bağlı birer fonksiyon olmak üzere,

$$\Psi(x) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}S\,(t, r, \phi)\right)\begin{pmatrix} A\,(t, r, \phi) \\ B\,(t, r, \phi)\end{pmatrix} \tag{4.39}$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu tanım Denklem (4.38) kullanılıp, $\hbar$ Planck sabitini içeren terimler ihmal edilirse,

$$\begin{aligned} & A\left[m_0 L + \frac{1}{\sqrt{f(r)}}\frac{\partial S}{\partial t}\right] + B\left[i\sqrt{f(r)}\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial \phi}\right] = 0 \\ & A\left[-i\sqrt{f(r)}\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial \phi}\right] + B\left[-m_0 L + \frac{1}{\sqrt{f(r)}}\frac{\partial S}{\partial t}\right] = 0 \end{aligned} \tag{4.40}$$

denklemleri elde edilir. Sıfırdan farklı $A\,(t, r, \phi)$ ve $B\,(t, r, \phi)$ katsayıları için katsayılar determinantının sıfır olma koşulundan,

$$\frac{1}{f\,(r)}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - f\,(r)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 - m_0^2 L^2 = 0 \tag{4.41}$$

Hamilton-Jacobi denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü için, $S(t,r,\phi)=-Et+j\phi+K(r)+C$ olarak tanımlanırsa radyal denklemden,

$$K_{\pm}(r)=\pm\int\frac{\sqrt{E^2-f(r)\left(m_0^2L^2+\frac{j^2}{r^2}\right)}}{f(r)}dr \tag{4.42}$$

integral fonksiyonu bulunur. $r=r_+$'daki dış olay ufku civarında kompleks integralin değeri,

$$K_{\pm}(r)=\pm i\frac{\pi E}{f'(r_+)}. \tag{4.43}$$

olarak hesaplanır. Denklem (4.31) ve Denklem (4.32) yardımıyla Dirac parçacığının tünelleme olasılığı,

$$\Gamma=\exp\left[-\frac{4\pi E}{\hbar\ f'(r_+)}\right] \tag{4.44}$$

ve buna dayanarak Denklem (4.34) kullanılarak Hawking sıcaklığı,

$$T_H=\hbar\frac{f'(r_+)}{4\pi} \tag{4.45}$$

olarak hesaplanır (Geçim ve Sucu 2013).Bu sonuç, hem klasik yöntem olan yüzey kütleçekim (surface gravity) ile hesaplanan değer ile tutarlıdır, hem de spin-0 skaler parçacıklarının Hawking sıcaklığı ile aynıdır.

4.4.3. Spin-1 vektör parçacık tünellemesi ve Hawking sıcaklığı

Spin-1 vektör parçacıklarının (2+1) boyutlu yeni-tip kara deliğinden tünellemesi olayını incelemek ve oluşturdukları Hawking radyasyon sıcaklığını hesaplamak için, (2.21) ile verilen birinci mertebeden dalga denklemi kullanılacaktır. Denklem (2.22) ile verilen Kemmer matrisleri, Denklem (2.16) ve Denklem (4.36) kullanılarak,

$$\beta^0=\overline{\sigma}^0(x)\otimes I+I\otimes\overline{\sigma}^0(x)=\frac{2}{L\sqrt{f}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},$$

$$\beta^1=\overline{\sigma}^1(x)\otimes I+I\otimes\overline{\sigma}^1(x)=\frac{i\sqrt{f}}{L}\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix},$$

$$\beta^2 = \overline{\sigma}^2(x) \otimes I + I \otimes \overline{\sigma}^2(x) = \frac{1}{Lr}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.46}$$

şeklinde bulunur. Öte yandan, Denklem (2.23) ile verilen spin bağlantı katsayıları Denklem (4.37) yardımı ile,

$$\Sigma_0 = -\frac{i}{4}\frac{df}{dr}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \Sigma_1 = 0, \ \Sigma_2 = -i\sqrt{f}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.47}$$

olarak hesaplanır. Bu hesaplamalar ışığında, spin-1 vektör parçacıklarının (2+1) boyutlu yeni-tip kara deliğinden tünellemesini incelemek için, dalga fonksiyonunu,

$$\Psi_{DKP} = \exp\left(\frac{i}{\hbar}S\left(t,r,\phi\right)\right)\begin{pmatrix} A\left(t,r,\phi\right) \\ B\left(t,r,\phi\right) \\ B\left(t,r,\phi\right) \\ D\left(t,r,\phi\right) \end{pmatrix} \tag{4.48}$$

şeklinde tanımlanıp, Denklem (4.46) ve Denklem (4.47) ile birlikte, Denklem (2.21) DKP denkleminde yerine yazıldıktan sonra $\hbar$ Planck sabitini içeren terimler de ihmal edilmesi durumunda,

$$\begin{aligned}
&A\left[\frac{i}{\sqrt{f}}\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{im_0L}{2}\right] + B\left[-\sqrt{f}\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial S}{\partial \phi}\right] = 0, \\
&A\left[-\sqrt{f}\frac{\partial S}{\partial r} - \frac{i}{r}\frac{\partial S}{\partial \phi}\right] + B\left[im_0L\right] + D\left[-\sqrt{f}\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial S}{\partial \phi}\right] = 0, \\
&B\left[-\sqrt{f}\frac{\partial S}{\partial r} - \frac{i}{r}\frac{\partial S}{\partial \phi}\right] + D\left[-\frac{i}{\sqrt{f}}\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{im_0L}{2}\right] = 0
\end{aligned} \tag{4.49}$$

çiftlenimli denklem sistemi elde edilir. A, B ve D katsayıları sırıfdan farklı olmak üzere; bu denklem sisteminin katsayılar determimantı,

$$\frac{1}{f(r)}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - f(r)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 - \frac{m_0^2L^2}{4} = 0 \tag{4.50}$$

Hamilton-Jacobi denklemini verir. Bu denklemi çözmek için, $S\left(t,r,\phi\right) = -Et + j\phi + K\left(r\right) + C$ çözüm önerisi yapılıp yerine yazılırsa,

$$K_{\pm}\left(r\right) = \pm\int\frac{\sqrt{E^2 - f\left(r\right)\left(\frac{m_0^2L^2}{4} + \frac{j^2}{r^2}\right)}}{f\left(r\right)}dr \tag{4.51}$$

spin-1 vektör parçacıklarının izledikleri radyal yörüngenin denklem bulunur. $r{=}r_+$'daki dış olay ufku civarında kompleks integralin değeri,

$$K_{\pm}(r) = \pm i \frac{\pi E}{f'(r_+)} \tag{4.52}$$

olarak hesaplanır. Denklem (4.31) ve Denklem (4.32) yardımıyla vektör parçacıklarının tünelleme olasılığı,

$$\Gamma = \exp\left[-\frac{4\pi E}{\hbar\ f'(r_+)}\right] \tag{4.53}$$

ve buna dayanarak (4.34) bağıntısı kullanılarak Hawking sıcaklığı,

$$T_H = \hbar \frac{f'(r_+)}{4\pi} \tag{4.54}$$

Bu sonuç, hem klasik yöntem olan yüzey kütleçekim (surface gravity) ile hesaplanan değer ile tutarlıdır, hem de spin-0 skaler parçacıklarının ve spin-1/2 Dirac parçacıklarının Hawking sıcaklığı ile aynıdır.

4.4.4. Tünelleme ve sıcaklık üzerine kuantum kütleçekim etkiler

4.4.4.1. Spin-0 skaler parçacık tünellemesi

Spin-0 parçacıklarının Denklem (2.8) ile verilen yeni-tip kara deliğinden tünelleme yaparken kuantum kütleçekim etkilerini hesaplamak için, Denklem (3.27) ile verilen genelleştirilmiş Klein-Gordon denklemi,

$$\frac{\hbar^2}{f}\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial t^2} - \frac{\hbar^2}{r^2}\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial \phi^2} - 2\beta\hbar^4 f \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[-\frac{f}{L^2}\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial r^2}\right] - \frac{2\beta\hbar^4}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\left[-\frac{1}{L^2 r}\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial \phi^2}\right]$$
$$-\hbar^2 f \frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial r^2} + m_0^2 L^2\left(1-2\beta m_0^2\right)\widetilde{\Phi} = 0 \tag{4.55}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Buna göre, $r{=}r_+$ dış olay ufkundan spin-0 parçacıklarının tünelleme olayını ve bunun sebep olduğu Hawking radyasyonunu hesaplamak için dalga fonksiyonu için, A bir sabit olmak üzere,

$$\widetilde{\Phi}(t,r,\phi) = A \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(t,r,\phi)\right), \tag{4.56}$$

ile verilen tanımı, yukarıdaki denklemde yerine yazıp, daha sonra $\hbar$ Planck sabitini ve β' nın yüksek mertebelerini içeren terimler de ihmal edilirse,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - f(r)^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{f(r)}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 - m_0^2 L^2 f(r) - \beta\frac{2f(r)}{r^4 L^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^4$$
$$+\beta\left[m_0^4 L^2 f(r) - \frac{2f(r)^3}{L^2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^4\right] = 0 \tag{4.57}$$

genelleştirilmiş Hamilton-Jacobi denklemi elde edilir. Bu denklemi çözmek için, $S(t,r,\phi){=}-Et + j\phi + W(r) + C$ ve $W(r){=}W_0(r) + \beta W_1(r)$ (Liu ve Ren 2014) şeklinde bir çözüm önerisi Denklem (4.57)' de yerine yazılıp β' nın yüksek mertebelerini içeren terimler ihmal edildikten sonra,

$$W_{\pm}(r) = \pm \int \frac{\sqrt{E^2 - f(r)\left(m_0^2 L^2 + j^2/r^2\right)}}{f(r)} \left[1 + \beta D\right] dr \tag{4.58}$$

elde edilir. Burada,

$$D = \frac{f(r)^2 \left(m_0^4 L^4 - j^4/r^4\right) - \left[E^2 - f(r)\left(m_0^2 L^2 + j^2/r^2\right)\right]^2}{L^2 f(r)\left[E^2 - f(r)\left(m_0^2 L^2 + j^2/r^2\right)\right]}$$

kısaltması kullanıldı. Bu durumda, $r{=}r_+$ dış olay ufkunda yarı-çember üzerinden komplex integralinin sonucu,

$$\Sigma_{KG} = \frac{\left(r_+ - r_-\right)^2 \left[3L^2 m_0^2 r_+^2 + 3j^2\right] + 4E^2 r_+^2}{2L^2 r_+^2 \left(r_+ - r_-\right)^4}$$

olmak üzere,

$$W_{\pm}(r) = \pm i\pi \frac{E}{r_+ - r_-} \left[1 + \beta \Sigma_{KG}\right] \tag{4.59}$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla, kuantum kütleçekim etkileri altında skaler parçacıklarının (2+1) boyutlu Yeni-tip kara deliğinden tünelleme olasılığı,

$$\Gamma = \exp\left(-\frac{4\pi E}{\hbar\left(r_+ - r_-\right)}\left[1 + \beta \Sigma_{KG}\right]\right) \tag{4.60}$$

bulunur. Buna göre tünelleme yapan spin-0 parçacıklarının sebep oldukları radyasyonun Hawking Sıcaklığı da,

$$T_H = \frac{\hbar\left(r_+ - r_-\right)}{4\pi} \frac{1}{\left[1 + \beta \Sigma_{KG}\right]} \tag{4.61}$$

veya $\beta\Sigma_{KG}$' ye göre seriye açıp yaklaşık olarak,

$$T_H^{KG} \simeq \frac{\hbar\left(r_+ - r_-\right)}{4\pi}\left[1 - \beta \Sigma_{KG}\right] \tag{4.62}$$

bulunur. Buna göre, kuantum kütleçekim etkilerin hesaba katılmasıyla Hawking sıcaklığının sadece kara deliğn özellikleri bağlı olmadığı aynı zamanda kara delikten tünelleme yapan parçacığın kütle, enerji ve açısal momentum değerlerine de bağlı olduğu görülür. Kuantum kütleçekimsel etkilerin bir diğer önemli sonucu da, Denklem (4.35) ile Denklem (4.62) karşılaştırdığımızda, kuantum kütleçekim etkilerinin Hawking sıcaklğının düşmesine sebep olduğu ortaya çıkar.

4.4.4.2. Spin-1/2 Dirac parçacık tünellemesi

Yeni-tip karadelikten spin-1/2 parçacıklarının tünellemesi olayında kuantum kütleçekim etkilerini araştırmak için Denklem (3.25) ile verilen genelleştirilmiş Dirac denklemi kullanılacaktır. Buna göre, $r{=}r_+$ dış olay ufkundan spin-1/2 parçacıklarının tünelleme olayına ve bunun sebep olduğu Hawking radyasyonuna kuantum kütleçekim etkilerini hesaplamak için,

$$\widetilde{\Psi}(x) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}S\left(t,r,\phi\right)\right)\begin{pmatrix} A\left(t,r,\phi\right) \\ B\left(t,r,\phi\right)\end{pmatrix} \tag{4.63}$$

ile tanımlanan Dirac spinörü, Denklem-(4.36) ve Denklem (4.37), Denklem (3.25) genelleştirilmiş Dirac denkleminde yerine yazıp $\hbar$ Planck sabitini ve β' nın yüksek mertebelerini içeren içeren terimler ihmal edilirse,

$$\begin{aligned} A&\left[\frac{1}{L\sqrt{f}}\frac{\partial S}{\partial t} + m_0\left(1-\beta m_0^2\right) + \frac{\beta m_0}{L^2 r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 + \frac{\beta m_0 f}{L^2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2\right] \\ &+B\left[i\frac{\sqrt{f}\left(1-\beta m_0^2\right)}{L}\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{\left(1-\beta m_0^2\right)}{Lr}\frac{\partial S}{\partial \phi} + i\frac{\beta f^{3/2}}{L^3}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^3\right] \\ &+B\left[i\frac{\beta\sqrt{f}}{L^3 r^2}\frac{\partial S}{\partial r}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 + \frac{\beta f}{L^3 r}\frac{\partial S}{\partial \phi}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{\beta}{L^3 r^3}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^3\right] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A&\left[-i\frac{\sqrt{f}\left(1-\beta m_0^2\right)}{L}\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{\left(1-\beta m_0^2\right)}{Lr}\frac{\partial S}{\partial \phi} - i\frac{\beta f^{3/2}}{L^3}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^3\right] \\ &+A\left[-i\frac{\beta\sqrt{f}}{L^3 r^2}\frac{\partial S}{\partial r}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 + \frac{\beta f}{L^3 r}\frac{\partial S}{\partial \phi}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{\beta}{L^3 r^3}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^3\right] \\ +B&\left[\frac{1}{L\sqrt{f}}\frac{\partial S}{\partial t} - m_0\left(1-\beta m_0^2\right) - \frac{\beta m_0}{L^2 r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 - \frac{\beta m_0 f}{L^2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2\right] = 0 \end{aligned} \tag{4.64}$$

çiftlenimli diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Sıfırdan farklı A ve B fonksiyonları için katsayılar determinantının sıfır olması gerekir. Buna göre, determinant alınır ve β'nın yüksek dereceden terimleri ihmal edilirse;

$$\begin{aligned} \beta&\left[2m_0^4 - \frac{4f}{L^4 r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 - \frac{2}{L^4 r^4}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^4 - \frac{2f^2}{L^4}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^4\right] \\ &+\frac{1}{L^2 f}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \frac{f}{L^2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{L^2 r}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 - m_0^2 = 0 \end{aligned} \tag{4.65}$$

Hamilton-Jacobi denklemi elde edilir. $S\left(t,r,\phi\right){=}{-}Et + j\phi + K\left(r\right) + C$ ve $K\left(r\right){=}K_0\left(r\right) + \beta K_1\left(r\right)$ (Liu ve Ren, 2014) şeklinde bir çözüm önerisi Denklem

(4.65)' de yerine yazılıp β' nın yüksek mertebelerini içeren terimler ihmal edildikten sonra integral alınırsa,

$$\chi = \frac{E^2\left[E^2 - 2m_0^2L^2f(r)\right]}{L^2f(r)\left[E^2 - f(r)\left(m_0^2L^2 + j^2/r^2\right)\right]}$$

olmak üzere,

$$K_{\pm}(r) = \pm\int\frac{\sqrt{E^2 - f(r)\left(m_0^2L^2 + j^2/r^2\right)}}{f(r)}\left[1 + \beta\chi\right]dr \tag{4.66}$$

elde edilir. Bu durumda, $r{=}r_+$ dış olay ufkunda yarı-çember üzerinden bu komplex integralinin sonucu,

$$K_{\pm}(r) = \pm i\pi\frac{E}{r_+ - r_-}\left[1 + \beta\Pi_D\right] \tag{4.67}$$

şeklinde bulunur. Burada,

$$\Pi_D = \frac{\left(r_+ - r_-\right)^2\left[3L^2m_0^2r_+^2 - j^2\right] + 4E^2r_+^2}{2L^2r_+^2\left(r_+ - r_-\right)^4}.$$

Dolayısıyla, kuantum kütleçekim etkileri altında fermiyonik parçacıklarının (2+1) boyutlu Yeni-tip kara deliğinden tünelleme olasılığı,

$$\Gamma = \exp\left(-\frac{4\pi E}{\hbar\left(r_+ - r_-\right)}\left[1 + \beta\Pi_D\right]\right) \tag{4.68}$$

bulunur. Buna göre tünelleme yapan spin-1/2 parçacıklarının sebep oldukları radyasyonun Hawking Sıcaklığı da,

$$T_H = \frac{\hbar\left(r_+ - r_-\right)}{4\pi}\frac{1}{\left[1 + \beta\Pi_D\right]} \tag{4.69}$$

veya $\beta\Pi_D$' ye göre seriye açıp yaklaşık olarak,

$$T_H^D \simeq \frac{\hbar\left(r_+ - r_-\right)}{4\pi}\left[1 - \beta\Pi_D\right] \tag{4.70}$$

bulunur. Bu sonuca göre, Denklem-(4.45) ile Denklem (4.70) karşılaştırdığımızda, kuantum kütleçekim etkilerinin Hawking sıcaklğının düşmesine sebep olduğu ortaya çıkar. Bunun yanısıra, Hawking sıcaklığının sadece kara deliğin özelliklerine değil, aynı zamanda tünelleyen Dirac parçacığının kütlesine, enerjisine ve toplam açısal momentumuna bağlı olduğu görülmektedir.

Ayrıca, bu sonuç, spin-0 parçacıklarının Denklem (4.62) ile verilen radyasyon sıcaklığının, spin-1/2 parçacıklarının radyasyon sıcaklığından daha düşük olduğunu göstermektedir;

$$T_H^D = T_H^{KG} + \beta\frac{\hbar j^2}{2\pi L^2r_+^2\left(r_+ - r_-\right)^3}. \tag{4.71}$$

Öte yandan, kuantum kütleçekim etkilerinin ihmal edildiği, yani β=0, durumda her iki parçacığın oluşturdukları Hawking sıcaklıkları eşittir.

4.5. Warped-AdS$_3$ Kara Deliğinde Parçacık Tünellemesi ve Hawking Sıcaklığı

4.5.1. Spin-0 skaler parçacık tünellemesi ve Hawking sıcaklığı

Denklem (2.9) ile verilen warped-AdS$_3$ kara deliğinden spin-0 skaler parçacığının tünelleme olayını incelemek için, Denklem (4.26) ile tanımlanan dalga fonksiyonu Klein-Gordon denkleminde yerine yazılıp, $\hbar$ Planck sabitini içeren terimlerin ihmal edilirse,

$$F(r)^2\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - 2F(r)^2 N^{\phi}(r)\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right) - N(r)^4 F(r)^4\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2$$

$$+\left(F(r)^2 N^{\phi}(r)^2 - N(r)^2\right)\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 + N(r)^2 F(r)^2 m_0^2 = 0 \tag{4.72}$$

Hamilton-Jacobi denklemi elde edilir. ∂_t ve ∂_ϕ warped-AdS$_3$ kara deliğinin Killing vektörleri olduğundan, $S(t,r,\phi){=}{-}Et + j\phi + W(r) + C$ çözüm önerisi Denklem (4.72) Hamilton-Jacobi denkleminde yerine yazılırsa,

$$W_{\pm}(r) = \pm\int \frac{\sqrt{\left(E + jN^{\phi}(r)\right)^2 + N(r)^2\left(m_0^2 - \frac{j^2}{F(r)^2}\right)}}{F(r)N(r)^2}dr \tag{4.73}$$

skaler parçacığın radyal denklemi elde edilir. $r{=}r_0$ dış olay ufku üzerinden kompleks integral hesaplanırsa,

$$W_{\pm}(r) = \pm\frac{i\pi\sqrt{3}(E - j\Omega_+)}{6r_0}\left(2r_0 + 3\omega\right)$$

sonucu bulunur. Burada Ω_+ dış olay ufkunun açısal hızıdır ve

$$\Omega_+ = -\left(\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right)_{r=r_H} = -N^{\phi}(r_0) = \frac{3}{2r_0 + \omega}$$

şeklinde hesaplanır. Buna göre tünelleme olasılığı,

$$\Gamma = \exp\left[-\frac{2\pi(E - j\Omega_+)\left(2r_0 + 3\omega\right)}{\hbar\sqrt{3}r_0}\right], \tag{4.74}$$

ve dolayısıyla Hawking ışıması,

$$T_H = \frac{\hbar\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{r_0}{2r_0 + 3\omega}\right) \tag{4.75}$$

olarak hesaplanır (Geçim ve Sucu 2015a). Bu sonuç, klasik yöntem olan yüzey kütleçekim (surface gravity) ile hesaplanan değer ile tutarlıdır:

$$\kappa = \frac{1}{2}\left[F(r)\frac{\partial}{\partial r}\left[N^2(r)\right]\right]_{r=r_0} = \frac{\sqrt{3}r_0}{2r_0 + 3\omega}$$

için

$$T_H = \frac{\hbar\kappa}{2\pi} = \frac{\hbar\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{r_0}{2r_0+3\omega}\right).$$

4.5.2. Spin-1/2 Dirac parçacık tünellemesi ve Hawking sıcaklığı

Denklem (2.9) ile verilen (2+1) boyutlu warped-AdS$_3$ kara deliği için sıfırdan farklı triadlar Denklem (2.17) ve spin bağlantı katsayıları da Denklem (2.19) ve Denklem (2.20) kullanılarak hesaplanırsa, sırasıyla, sıfırdan farklı triadlar,

$$e^{\mu}_{(0)} = \left(\frac{1}{N}, 0, -\frac{N^{\phi}}{N}\right), \qquad e^{\mu}_{(1)} = (0, FN, 0) \qquad e^{\mu}_{(2)} = \left(0, 0, \frac{1}{F}\right) \tag{4.76}$$

ve spin bağlantı katsayıları da,

$$\Gamma_0 = -\frac{F}{4}\left[\left(2N\frac{dN}{dr} - F^2N^{\phi}\frac{dN^{\phi}}{dr}\right)\sigma^3\sigma^1 + \left(2NN^{\phi}\frac{dF}{dr} + FN\frac{dN^{\phi}}{dr}\right)\sigma^1\sigma^2\right],$$

$$\Gamma_1 = -\frac{1}{8N^3}\left(\frac{FN^{\phi}}{N}I - \sigma^3\sigma^1\right)\left[\left(2N^2F + F^3N^{\phi^2}\right)\frac{dN^{\phi}}{dr} + 2N^2N^{\phi}\frac{dF}{dr}\right],$$

$$\Gamma_3 = \frac{1}{4}\left[F^3\frac{dN^{\phi}}{dr}\sigma^3\sigma^1 - 2NF\frac{dF}{dr}\sigma^1\sigma^2\right] \tag{4.77}$$

olarak hesaplanır. Warped-AdS$_3$ kara deliğinin $r{=}r_0$'daki dış olay ufkundan spin-1/2 Dirac parçacıklarının tünelleme olayını ve bunun sebep olduğu Hawking radyasyonunu hesaplamak için Denklem (4.39) ile verilen dalga fonksiyonu Dirac denkleminde yerine yazılıp $\hbar$ Planck sabitini içeren terimlerin ihmal edilirse,

$$A\left[m_0N(r) + \frac{\partial S}{\partial t} - N^{\phi}(r)\frac{\partial S}{\partial \phi}\right] + B\left[iF(r)N(r)^2\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{N(r)}{F(r)}\frac{\partial S}{\partial \phi}\right] = 0,$$

$$A\left[iF(r)N(r)^2\frac{\partial S}{\partial r} - \frac{N(r)}{F(r)}\frac{\partial S}{\partial \phi}\right] + B\left[m_0N(r) - \frac{\partial S}{\partial t} + N^{\phi}(r)\frac{\partial S}{\partial \phi}\right] = 0 \tag{4.78}$$

çiftlenimli denklem sistemi elde edilir. $A(t,r,\phi)$ ve $B(t,r,\phi)$ sıfırdan farklı olmak üzere; katsayılar determinantından,

$$F(r)^2\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - 2F(r)^2N^{\phi}(r)\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right) - N(r)^4F(r)^4\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2$$
$$+\left(F(r)^2N^{\phi}(r)^2 - N(r)^2\right)\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 - N(r)^2F(r)^2m_0^2 = 0 \tag{4.79}$$

Hamilton-Jacobi denklemi bulunur. $S(t,r,\phi){=}{-}Et+j\phi+K(r)+C$ çözüm önerisi göz önünde bulundurularak, Dirac parçacıklarının tünelleme sırasında izledikleri radyal yörünge denklemi,

$$K_{\pm}(r)=\pm\int\frac{\sqrt{\left(E+jN^{\phi}(r)\right)^{2}-N(r)^{2}\left(m_{0}^{2}+\frac{j^{2}}{F(r)^{2}}\right)}}{F(r)N(r)^{2}}dr \tag{4.80}$$

olarak ifade edilir. Dolayısıyla, $r{=}r_0$'daki dış olay ufku üzerinden kompleks integral hesaplanırsa, $K_{\pm}(r)$,

$$K_{\pm}(r)=\pm\frac{i\pi\sqrt{3}(E-j\Omega_{+})}{6r_{0}}\left(2r_{0}+3\omega\right) \tag{4.81}$$

şeklinde bulunur. Bu sonuçlara göre Dirac parçacıklarının Warped-AdS$_3$ karadeliğinden tünelleme olasılıkları,

$$\Gamma=\frac{P_{out}}{P_{in}}=\exp\left[-\frac{2\pi(E-j\Omega_{+})\left(2r_{0}+3\omega\right)}{\hbar\sqrt{3}r_{0}}\right] \tag{4.82}$$

ve bu parçacıkların sebep oldukları Hawking ışıması,

$$T_{H}=\frac{\hbar\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{r_{0}}{2r_{0}+3\omega}\right) \tag{4.83}$$

olarak bulunur (Geçim ve Sucu 2015a). Bu sonuç, hem klasik yöntem olan yüzey kütleçekim (surface gravity) ile hesaplanan

$$\kappa=\frac{1}{2}\left[F(r)\frac{\partial}{\partial r}\left[N^{2}(r)\right]\right]_{r=r_{0}}=\frac{\sqrt{3}r_{0}}{2r_{0}+3\omega}$$

ise

$$T_{H}=\frac{\hbar\kappa}{2\pi}=\frac{\hbar\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{r_{0}}{2r_{0}+3\omega}\right)$$

değer ile tutarlıdır, hem de spin-0 skaler parçacıklarının Hawking sıcaklığı ile aynı çıkmıştır.

4.5.3. Spin-1 vektör parçacık tünellemesi ve Hawking sıcaklığı

Kütleli spin-1 vektör parçacıklarının (2+1) boyutlu warped-AdS$_3$ kara deliğinden tünellemesi olayını incelemek ve oluşturdukları Hawking radyasyon sıcaklığını hesaplamak için, Denklem (2.21) ile verilmiş olan eğri uzay-zamana genelleştirilen DKP denklemi kullanılacaktır (Dernek vd 2015).

Basitlik bakımından, Denklem (2.9) ile verilen warped-AdS$_3$ kara deliği metriği, Killing vektörleri yardımıyla, $d\varphi = d\phi + N^{\phi}dt$ dönüşümü ile diagonal hale getirilebilir;

$$ds^2 = N^2 dt^2 - \frac{1}{N^2 F^2} dr^2 - F^2 d\varphi^2. \tag{4.84}$$

Bu durumda, Denklem (2.22) ile verilen Kemmer matrisleri ve Denklem (2.23) ile verilen spin-1 parçacıkları için spin bağlantı katsayıları, Denklem (2.16), Denklem (2.18), Denklem (2.19) ve Denklem (2.20) yardımıyla hesaplanabilir. Buna göre, Kemmer matrisleri,

$$\beta^0 = \overline{\sigma}^0(x) \otimes I + I \otimes \overline{\sigma}^0(x) = \frac{2}{N}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\beta^1 = \overline{\sigma}^1(x) \otimes I + I \otimes \overline{\sigma}^1(x) = iNF\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta^2 = \overline{\sigma}^2(x) \otimes I + I \otimes \overline{\sigma}^2(x) = \frac{1}{F}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.85}$$

ve spin bağlantı katsayıları,

$$\Sigma_0 = -\frac{i}{2}FN\frac{dN}{dr}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \Sigma_1 = 0, \ \Sigma_2 = -iNF\frac{dF}{dr}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.86}$$

şeklinde hesaplanır. Bu hesaplamalar ışığında, spin-1 vektör parçacıklarının (2+1) boyutlu Warped-AdS$_3$ kara deliğinden tünellemesini hesaplayabilmek için, Denklem (4.48) ile tanımlalan dalga fonksiyonu , Denklem (4.85) ve Denklem (4.86) ile birlikte, Denklem (2.21) DKP denkleminde yerine yazıldıktan sonra $\hbar$ Planck sabitini içeren terimler de ihmal edilirse,

$$A\left[\frac{i}{N}\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{im_0}{2}\right] + B\left[-NF\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{i}{F}\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right] = 0,$$

$$A\left[-NF\frac{\partial S}{\partial r} - \frac{i}{F}\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right] + B\left[im_0\right] + D\left[-NF\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{i}{F}\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right] = 0,$$

$$B\left[-NF\frac{\partial S}{\partial r}-\frac{i}{F}\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right]+D\left[-\frac{i}{N}\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{im_0}{2}\right]=0 \qquad (4.87)$$

çiftlenimli denklem sistemi elde edilir. A, B ve D sıfırdan farklı olmak üzere; katsayılar determimantından,

$$\frac{1}{N^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2-N^2F^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2-\frac{1}{F^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2-\frac{m_0^2}{4}=0 \qquad (4.88)$$

Hamilton-Jacobi denklemi bulunur. Bu denklemi çözmek için, $S\,(t,r,\varphi)$=$-(E+j\Omega_+)t+j\varphi+K\,(r)+C$ çözüm önerisi yerine yazılırsa,

$$K_\pm\,(r)=\pm\int\frac{\sqrt{(E-j\Omega_+)^2-N^2\left(\frac{m_0^2}{4}+\frac{j^2}{F^2}\right)}}{N^2F}dr \qquad (4.89)$$

elde edilir. Warped-AdS_3 kara deliğinin r=r_0'daki dış olay ufku üzerinden kompleks integral hesaplanırsa,

$$K_\pm(r)=\pm\frac{i\pi\sqrt{3}(E-j\Omega_+)}{6r_0}\,(2r_0+3\omega) \qquad (4.90)$$

bulunur. Bu sonuçlara göre kütleli spin-1 parçacıklarının Warped-AdS_3 kara deliğinden tünelleme olasılıkları,

$$\Gamma=\frac{P_{out}}{P_{in}}=\exp\left[-\frac{2\pi(E-j\Omega_+)\,(2r_0+3\omega)}{\hbar\sqrt{3}r_0}\right] \qquad (4.91)$$

ve bu parçacıkların sebep oldukları Hawking ışıması,

$$T_H=\frac{\hbar\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{r_0}{2r_0+3\omega}\right) \qquad (4.92)$$

olarak bulunur. Bu sonuca göre, warped-AdS_3 kara deliğinin Hawking sıcaklığı, relativistik parçacıkların kara delikten tünellemesi metodu kullanılarak hesaplandığında, spin durumları farklı olan üç parçacık için aynı sonucun bulunduğu görüldü.

Warped-AdS_3 kara deliği, ω parametresinin farklı değerleri için farklı fiziksel ve matematiksel özellikler sergiler. Kara deliğin, $r=\pm r_0$ iki olay ufkuna sahip olduğu daha önce söz edilmişti. Bu olay ufuklarının çevreleri, $A_\pm$=$2\pi r_\pm$=$\frac{2\pi|2r_0\pm3\omega|}{\sqrt{3}}$ ile verilir. Eğer $\omega\neq\mp\frac{2r_0}{3}$ ise, Kruskal koordinatları yardımı ile warped-AdS_3 kara delik metriği bu iki tane olay ufku boyunca asimptotik olarak genişletilebilir. Ayrıca, ω=$\frac{2r_0}{3}$ değeri için warped-AdS_3 kara deliği sadece r=r_0'da bir tane olay ufkuna sahip olur ve yine bu olay ufku boyunca Kruskal koordinatları yardımı ile genişletilebilir. Dolayısıyla, ω parametresi $\frac{2r_0}{3}$ ifadesine göre alacağı değerlere göre warped-AdS_3 kara deliği için kritik bir öneme sahiptir. Örneğin, ω>0 koşulu altında

ω parametresi warped-AdS$_3$ kara deliğinin Hawking sıcaklığı üzerinde önemli etkileri vardır. Eğer, $\omega < \frac{2r_0}{3}$ ise Denklem (4.75), Denklem (4.83) ve Denklem (4.92) Hawking sıcaklığının arttığını görürüz. Öte yandan, eğer $\omega > \frac{2r_0}{3}$ ise sıcaklığın azaldığı görülür. Sıcaklıktaki bu davranışlar, warped-AdS$_3$ kara deliğinin kararsızlığı ile açıklanabilir. Kara deliğin, dış ve iç olay ufuklarının açısal hızları sırasıyla, $\Omega_+ = \frac{3}{2r_0+3\omega}$ and $\Omega_- = \frac{3}{3\omega-2r_0}$ değerindedir. Bu bakış açısı doğrultusunda, $\omega < \frac{2\ r_0}{3}$ değerleri için dış olay ufkunun açısal hızı pozitif iken ($\Omega_+ > 0$), iç olay ufkunun açısal hızı negatif olur ($\Omega_- < 0$). Ayrıca, kara deliğin açısal momentumu da,

$$J = \frac{\pi}{\kappa}\left(\omega^2 - \frac{5}{9}r_0^2\right)$$

ifadesinden negatif olacağı görülür. Bu koşullar altında, akışkan yıldızlarda geçerli olan CFS (Chandrasekhar-Friedman-Schutz) mekanizmasında (Campbell 1970, Chandrasekhar 1970, Friedman ve Schutz 1978) olduğu gibi, Warped-AdS$_3$ karadeliğinin gravitasyonel dalga yayımladığı ve buna bağlı olarak açısal momentum kaybettiği söylenebilir. Dalayısıyla, Hawking ışımasındaki artışın, kara delik tarafından salınan bu gravitasyonel dalgaların neden olduğu düşünülebilir (Geçim ve Sucu 2015a).

Warped-AdS$_3$ kara deliğinin bir diğer önemli özelliği ise, $r_0 = 0$'da extremal kara delik olmasıdır. Bu durumda $r = 0$'da çift olay ufku vardır. Buna göre, klasik anlamda yüzey kütleçekimi sıfır ve dolayısıyla Hawking sıcaklığının da sıfır olduğu görülür. Yani,

$$\kappa = \frac{1}{2}\left[F(r)\frac{\partial}{\partial r}\left[N^2(r)\right]\right]_{r=0} = 0$$

ve dolayısıyla, Hawking sıcaklığı da, $T_H = \frac{\hbar\kappa}{2\pi} = 0$ olur. Fakat, extremal durum için Dirac denklemi yeniden yazılırsa, Denklem-(4.80) ile verilen kompleks integralin $r = 0$ tekillik noktası civarındaki değeri, metrik katsayılar

$$F(r)^2 = r^2 + 4\omega r + 3\omega^2 \ , \qquad N(r)^2 = \frac{r^2}{F(r)^2} \ , \qquad N^\phi(r) = -\frac{2r + 3\omega}{F(r)^2}$$

şeklinde olmak üzere,

$$K_\pm(r) = \pm\frac{i2\pi E}{\sqrt{3}} \tag{4.93}$$

bulunur. Dolayısıyla, $r = 0$ tekillik noktasından Dirac parçacıklarının tünelleme olasılığının,

$$\Gamma = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \exp\left[-\frac{8\pi E}{\hbar\sqrt{3}}\right] \tag{4.94}$$

biçiminde olduğu ve bu parçacıkların sebep oldukları Hawking sıcaklığının,

$$T_H = \frac{\hbar\sqrt{3}}{8\pi} \tag{4.95}$$

şeklinde olduğu görülür. Bu sonuca göre, extremal warped-AdS$_3$ kara deliği kuantum mekaniksel olarak ışıma yapabileceğini göstermektedir (Geçim ve Sucu 2014).

4.5.4. Tünelleme ve sıcaklık üzerine kuantum kütleçekim etkiler

4.5.4.1. Spin-0 skaler parçacık tünellemesi

Spin-0 parçacıklarının warped-AdS$_3$ kara deliğinden tünellemesi esnasında kuantum kütleçekim etkinin, tünelleme olayındaki katkısını hesaplamak için, Denklem (3.27)' deki genelleştirilmiş Klein-Gordon denklemi Denklem (3.27) ile verilen metrik göz önünde bulundurularak,

$$\frac{\hbar^2}{N^2}\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial t^2} - \hbar^2 N^2 F^2 \frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial r^2} - \frac{\hbar^2}{F^2}\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial\varphi^2} - 2\beta\hbar^4 N^2 F^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[-N^2F^2\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial r^2}\right]$$
$$-\frac{2\beta\hbar^4}{F^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left[-\frac{1}{F^2}\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial\varphi^2}\right] + m_0^2\left(1-2\beta m_0^2\right)\widetilde{\Phi} = 0 \tag{4.96}$$

şeklinde indirgenir. Buna göre, $r{=}r_0$ dış olay ufkundan spin-0 parçacıklarının tünelleme olayını ve bunun sebep olduğu Hawking radyasyonunu hesaplamak için dalga fonksiyonu için, A bir sabit olmak üzere,

$$\widetilde{\Phi}\left(t,r,\varphi\right) = A\exp\left(\frac{i}{\hbar}S\left(t,r,\varphi\right)\right) \tag{4.97}$$

ile verilen tanımı, yukarıdaki genelleştirilmiş Klein-Gordon denkleminde yerine yazıp, $\hbar$ Planck sabitini içeren terimler de ihmal edildiğinde,

$$\frac{1}{N^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - F^2N^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{F^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2 - m_0^2 - \beta\left[2F^4N^4\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^4\right]$$
$$+\beta\left[2m_0^4 - \frac{2}{F^4}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^4\right] = 0 \tag{4.98}$$

genelleştirilmiş Hamilton-Jacobi denklemi elde edilir. Bu denklemi çözmek için, $S\left(t,r,\varphi\right){=}-(E-j\Omega_+)t + j\varphi + W\left(r\right) + C$ ve $W\left(r\right){=}W_0\left(r\right) + \beta W_1\left(r\right)$ şeklinde bir çözüm önerisi yukarıdaki denklemde yerine yazıp β' nın yüksek mertebelerini içeren terimler ihmal ettikten sonra integral alınırsa,

$$W_\pm = \pm\int \frac{\sqrt{\left(E-j\Omega_+\right)^2 - N^2\left(m_0^2 + \frac{j^2}{F^2}\right)}}{N^2F}\left[1+\beta\Delta\right]dr \tag{4.99}$$

elde edilir. Burada,

$$\Delta = \frac{N^4\left(m_0^4 - \frac{j^4}{F^4}\right) - \left[\left(E - j\Omega_+\right)^2 - N^2\left(m_0^2 + \frac{j^2}{F^2}\right)\right]^2}{N^2 F\left[\left(E - j\Omega_+\right)^2 - N^2\left(m_0^2 + \frac{j^2}{F^2}\right)\right]}$$

kısaltması kullanıldı. Bu durumda, $r = r_0$ dış olay ufkunda yarı-çember üzerinden (4.99) komplex integralinin sonucu,

$$\Sigma_{KG} = \frac{\left(2r_0 + 3\omega\right)^2\left[9 + \left(E - j\Omega_+\right)^2\left(9\omega^2 - 6\omega r_0 - 5r_0\right)\right] + 27j^2r_0^2}{6r_0^2\left(2r_0 + 3\omega\right)^2}$$

olmak üzere,

$$W_{\pm} = \pm i\pi\frac{\sqrt{3}\left(E - j\Omega_+\right)\left(2r_0 + 3\omega\right)}{6r_0}\left[1 + \beta\Sigma_{KG}\right] \tag{4.100}$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla tünelleme olasılığı,

$$\Gamma = \exp\left(-\frac{2\pi\left(E - j\Omega_+\right)\left(2r_0 + 3\omega\right)}{\hbar\sqrt{3}r_0}\left[1 + \beta\Sigma_{KG}\right]\right) \tag{4.101}$$

ve buna bağlı olarak Hawking Sıcaklığı,

$$T_H = \frac{\hbar\sqrt{3}r_0}{2\pi\left(2r_0 + 3\omega\right)}\frac{1}{\left[1 + \beta\Sigma_{KG}\right]} \tag{4.102}$$

şeklinde bulunur. Yukarıda bulunan Hawking sıcaklığı, $\beta\Sigma_{KG}$ niceliğinin serisi şeklinde açılıp yaklaşık olarak,

$$T_H^{KG} \simeq \frac{\hbar\sqrt{3}r_0}{2\pi\left(2r_0 + 3\omega\right)}\left[1 - \beta\Sigma_{KG}\right] \tag{4.103}$$

yazılabilir. Kuantum kütleçekim etkilerden kaynaklanan düzeltme terimi, Hawking sıcaklığının sadece kara deliğin özelliklerine değil, aynı zamanda kara delikten tünelleme yapan parçacığın bazı temel özelliklerine, yani sahip olduğu enerji ve toplam açısal momentum değerlerine de bağlı olduğunu göstermektedir. Bir diğer önemli sonuç da, Denklem (4.75) ve Denklem (4.103) karşılaştırıldığında, spin-0 skaler parçacıklarının Warped-AdS$_3$ karadeliğinden tünellemeleri sırsında kuantum kütleçekimsel etkiler nedeniyle oluşturdukları Hawking sıcaklığının azaldığı gerçeğidir.

4.5.4.2. Spin-1/2 Dirac parçacık tünellemesi

Spin-1/2 parçacıklarının Denklem (4.84) ile verilen warped-AdS$_3$ kara deliğinden tünelleme yaparken kuantum kütleçekim etkilerini hesaplamak için, Denklem (3.25) ile verilen genelleştirilmiş Dirac denklemi kullanılacaktır. Denklem (4.84) warped-AdS$_3$ kara deliği metriği kullanılarak, sıfırdan farklı triadlar Denklem (2.17) ve spin bağlantı katsayıları da Denklem (2.19) ve Denklem (2.20) kullanılarak hesaplanırsa, sırasıyla, sıfırdan farklı triadlar,

$$e^{\mu}_{(0)} = \left(\frac{1}{N}, 0, 0\right), \qquad e^{\mu}_{(1)} = (0, FN, 0) \qquad e^{\mu}_{(2)} = \left(0, 0, \frac{1}{F}\right) \tag{4.104}$$

ve spin bağlantı katsayıları da,

$$\Gamma_0 = -\frac{1}{2}FN\frac{dN}{dr}\sigma^3\sigma^1, \qquad \Gamma_1 = 0, \qquad \Gamma_3 = -\frac{1}{2}NF\frac{dF}{dr}\sigma^1\sigma^2$$

olarak bulunur. Buna göre, $r{=}r_0$ dış olay ufkundan spin-1/2 parçacıklarının tünelleme olayını ve bunun sebep olduğu Hawking radyasyonunu hesaplamak için dalga fonksiyonu Denklem (4.63) ile verilen tanımı, Denklem (3.25)' de yerine yazılıp $\hbar$ Planck sabitini içeren terimler de ihmal edildikden sonra, Denklem (3.25),

$$\begin{aligned}
&A\left[\frac{1}{N}\frac{\partial S}{\partial t} + m_0\left(1-\beta m_0^2\right) + \frac{\beta m_0}{F^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + \beta m_0 F^2N^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2\right] \\
&+B\left[iFN\left(1-\beta m_0^2\right)\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{\left(1-\beta m_0^2\right)}{F}\frac{\partial S}{\partial \varphi} + i\beta F^3N^3\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^3\right] \\
&+B\left[i\frac{\beta N}{F}\frac{\partial S}{\partial r}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + \beta FN^2\frac{\partial S}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{\beta}{F^3}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^3\right] = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&A\left[-iFN\left(1-\beta m_0^2\right)\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{\left(1-\beta m_0^2\right)}{F}\frac{\partial S}{\partial \varphi} - i\beta F^3N^3\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^3\right] \\
&+A\left[-i\frac{\beta N}{F}\frac{\partial S}{\partial r}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + \beta FN^2\frac{\partial S}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{\beta}{F^3}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^3\right] \\
&+B\left[\frac{1}{N}\frac{\partial S}{\partial t} + m_0\left(1-\beta m_0^2\right) - \frac{\beta m_0}{F^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - \beta m_0 F^2N^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2\right] = 0
\end{aligned} \tag{4.105}$$

durumuna gelir. Sıfırdan farklı A ve B fonksiyonları için katsayılar determinantının sıfır olması gerekir. Buna göre, determinant alınır ve β'nın yüksek dereceden terimleri ihmal edilirse;

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - F^2N^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{F^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - m_0^2 - \beta\left[2F^4N^4\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^4\right] \\
&+\beta\left[2m_0^4 - 4N^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - \frac{2}{F^4}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^4\right] = 0
\end{aligned} \tag{4.106}$$

Hamilton-Jacobi denklemi elde edilir. Bu denklemi çözmek için, $S(t,r,\varphi){=}-(E-j\Omega_+)t+j\varphi+K(r)+C$ ve $K(r){=}K_0(r)+\beta K_1(r)$ şeklindeki bir çözüm önerisi yukarıdaki denklemde yerine yazılıp, β'nın yüksek dereceden terimleri ihmal edildikten sonra integre edilirse, spin-1/2 parçacıklarının izleyecekleri radyal yörünge için

$$\lambda = \frac{(E-j\Omega_+)^2\left[(E-j\Omega_+)^2-2m_0^2N^2\right]}{N^2F\left[(E-j\Omega_+)^2-N^2\left(m_0^2+\frac{j^2}{F^2}\right)\right]}$$

kısaltması kullanılarak, $K_\pm$,

$$K_\pm = \pm\int \frac{\sqrt{(E-j\Omega_+)^2-N^2\left(m_0^2+\frac{j^2}{F^2}\right)}}{N^2F}\left[1+\beta\lambda\right]dr \tag{4.107}$$

şeklinde olur. $r{=}r_0$ dış olay ufkunda yarı-çember üzerinden komplex integral alınmasıyla,

$$K_\pm = \pm i\pi\frac{\sqrt{3}\,(E-j\Omega_+)\,(2r_0+3\omega)}{6r_0}\left[1+\beta\Upsilon_D\right] \tag{4.108}$$

bulunur. Burada,

$$\Upsilon_D = \frac{(2r_0+3\omega)^2\left[9+(E-j\Omega_+)^2\left(9\omega^2-6\omega r_0-5r_0\right)\right]-9j^2r_0^2}{6r_0^2\,(2r_0+3\omega)^2}$$

kısaltması kullanılmıştır. Bu sonuçlara dayanarak, kuantum kütleçekim etkiler hesaaba katıldığında spin-1/2 Dirac parçacıklarının warped-AdS$_3$ kara deliğinden tünelleme olasılıkları ve oluşturacakları Hawking radyasyonunun sıcaklığı, sırasıyla,

$$\Gamma = \exp\left(-\frac{2\pi\,(E-j\Omega_+)\,(2r_0+3\omega)}{\hbar\sqrt{3}r_0}\left[1+\beta\Upsilon_D\right]\right) \tag{4.109}$$

ve

$$T_H = \frac{\hbar\sqrt{3}r_0}{2\pi\,(2r_0+3\omega)}\frac{1}{\left[1+\beta\Upsilon_D\right]} \tag{4.110}$$

şeklinde bulunur. Yukarıda bulunan Hawking sıcaklığı, $\beta\Upsilon_D$ niceliğinin serisi şeklinde açılıp β'nın yüksek dereceli terimleri atılırsa, yaklaşık olarak,

$$T_H^D \simeq \frac{\hbar\sqrt{3}r_0}{2\pi\,(2r_0+3\omega)}\left[1-\beta\Upsilon_D\right] \tag{4.111}$$

yazılabilir. Bu sonuca göre, kuantum kütleçekimsel etkiler nedeni ile Hawking sıcaklığı sadece kara deliğin özelliklerine değil, aynı zamanda tünelleyen parçacığın sahip olduğu enerji ve toplam açısal momentumuna da bağlı olduğu görülür. Bunun yanı sıra, Denklem (4.83) ve Denklem (4.111) karşılaştırdığımızda, spin-1/2 Dirac parçacıklarının Warped-AdS$_3$ kara deliğinden tünellemeleri sırasında kuantum kütleçekimsel etkiler nedeniyle oluşturdukları Hawking sıcaklığının azaldığı görülür.

Diğer taraftan, Denklem (4.111) ile Denklem (4.111) kıyaslandığında ise, kuantum kütleçekim etkiler hesaba katıldığında spin-1/2 parçacıklarının oluşturduğu radyasyon sıcaklığının, spin-0 parçacıklarının oluşturduğu radyasyon sıcaklığından daha yüksek olduğu görülür.

$$T_H^D = T_H^{KG} + \beta \frac{\hbar 3\sqrt{3} j^2 r_0}{\pi \left(2r_0 + 3\omega\right)^3}. \tag{4.112}$$

Öte yandan, kuantum kütleçekim etkilerinin yok sayıldığı, $\beta = 0$, durumda her iki parçacığın oluşturdukları Hawking sıcaklıkları eşittir.

4.6. Gravitasyon Alanının Çeşitli Alanlarla Çiftlenimi

Tezin bu kısmında, yeni kütleli gravitasyon kuramı çerçevesinde, gravitasyon alanı temsil eden eylem fonksiyonuna, sırayla, fermiyonik ve bosonik alan eylem fonksiyonları minimal olarak çiftlenim edilerek, bu alanların kozmik etkileri araştırılacaktır. Elde edilecek alan denklemleri, Noether simetri yaklaşımı kullanılarak çözülecektir. Bu bölümde, $16\pi G = c = \hbar = 1$ olarak alınacaktır.

4.6.1. Gravitasyonel alanın skaler alanla çiftlenimi

4.6.1.1. Kozmolojik çözümler

Yeni kütleli gravitasyonel kuramı için eylem fonksiyonu Denklem (2.6) ile verilmiştir. Eğri uzay-zamanda Spin-0 skaler alanını temsil eden Lagranjiyen yoğunluğu,

$$L_{scalar} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\partial_\mu \phi\right) \left(\partial_\nu \phi\right) - U\left(\phi\right) \tag{4.113}$$

şeklindedir. Burada, ϕ sadece zamanın fonksiyonu olduğunu kabul ettiğimiz skaler alanını, $U(\phi)$ skaler alanı temsil eden potansiyel fonksiyonu ve $g^{\mu\nu}$ kontravaryant metrik tensördür. Buna göre skaler alanının yeni kütleli gravitasyon kuramı kapsamında, gravitasyonel alanı ile minimal bir şekilde çiftlenim edilmesi sonucu oluşan sistemin toplam eylem fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$S_T = \int d^3x \sqrt{|g|} \left[R - 2\Lambda - \frac{1}{m^2} \left(R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{3}{8} R^2 \right) + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\partial_\mu \phi\right) \left(\partial_\nu \phi\right) - U\left(\phi\right) \right]. \tag{4.114}$$

Bu çalışmada, homojen, izotropik ve uzaysal olarak düz (2+1)-boyutlu FRW uzay-zamanını kullanılacaktır. Bu uzay-zamanı temsil eden metrik,

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2[dr^2 + r^2 d\theta^2] \tag{4.115}$$

ile temsil edilir. Burada, $a(t)$ ölçek çarpanıdır. Bu metrik için R Ricci skaleri ve $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ kuadretik terimi, sırasıyla, aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$R = \frac{2\left(2a\ddot{a} + \dot{a}^2\right)}{a^2}, \tag{4.116}$$

$$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)^2 + 4\frac{\ddot{a}}{a}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^4. \tag{4.117}$$

Burada "." işareti zamana göre türev alındığını belirtmekterdir. Denklem (4.116) ve Denklem (4.117), Denklem (4.114)'de yerine yazılıp, gerekli kısmi integrasyonlar yapıldıktan sonra, sistemi tanımlayan Lagranjiyen fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur.

$$L = -2\left[\dot{a}^2 + a^2\Lambda\right] + \frac{\dot{a}^4}{6ma^2} + a^2\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - U(\phi)\right]. \tag{4.118}$$

Buna göre, Euler-Lagrange denklemi,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \tag{4.119}$$

kullanılarak, sistemin hareket denklemleri aşağıdaki gibi bulunabilir. Buna göre, birinci Friedmann denklemi,

$$\frac{\ddot{a}}{a}\left[\frac{2H^2}{m^2} - 4\right] = -4\Lambda + \frac{H^4}{m^2} + \dot{\phi}^2 - 2U(\phi) \tag{4.120}$$

ve Klein-Gordon denklemi ise,

$$\ddot{\phi} + 2H\dot{\phi} + \frac{dU(\phi)}{d\phi} = 0 \tag{4.121}$$

olarak bulunur. Öte yandan, Einstein kuramında, alan denklemlerini 00 bileşenine karşılık gelen ve enerji fonksiyonu olarak bilinen,

$$E_L = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = 0 \tag{4.122}$$

koşulu yardımıyla,

$$H^2 = \Lambda + \frac{H^4}{4m^2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + U(\phi)\right] \tag{4.123}$$

ikinci Friedmann Denklemi elde edilir. Burada, $H=\frac{\dot{a}}{a}$ ile tanımlanan Hubble parametresidir. Boşluğun enerji yoğunluğu

$$\rho_{\Lambda} = \Lambda,$$

skaler alanın enerji yoğunluğu,

$$\rho_{\phi} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^{2} + U(\phi) + \frac{H^4}{4m^2}$$

ve skaler alanın basınç,

$$p_{\phi} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^{2} - U(\phi) + \frac{H^4}{2m^2}$$

tanımlarını kullanarak, Denklem (4.120) ve Denklem (4.123) daha sade bir biçime getirilebilir;

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{2\rho_{\Lambda} + \rho_{\phi}}{2} \tag{4.124}$$

ve

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{2\rho_{\Lambda} - p_{\phi}}{2 - \frac{4H^2}{m^2}} \tag{4.125}$$

(4.124) ve (4.125) denklemlerini çözülebilmeleri için $U(\phi)$ skaler alan potansiyel fonksiyonunun açık formunun bilinmesi gerekir. Bu nedenle, Noether Simetri yaklaşımı kullanılarak etkileşme potansiyeli belirlenecektir.

Teğet Konfigürasyon uzayının (TM uzayı) koordinatları $(a, \dot{a}, \phi, \dot{\phi})$ ile temsil edilir. Buna göre, Denklem-(3.29) ile tanımlanan vektör alanı,

$$\widetilde{X} = \alpha(a,\phi)\frac{\partial}{\partial a} + \dot{\alpha}(a,\phi)\frac{\partial}{\partial \dot{a}} + \beta(a,\phi)\frac{\partial}{\partial \phi} + \dot{\beta}(a,\phi)\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} \tag{4.126}$$

olarak yeniden tanımlanır. Burada,

$$\dot{\alpha}(a,\phi) = \dot{a}\frac{\partial \alpha(a,\phi)}{\partial a} + \dot{\phi}\frac{\partial \alpha(a,\phi)}{\partial \phi},$$

$$\dot{\beta}(a,\phi) = \dot{a}\frac{\partial \beta(a,\phi)}{\partial a} + \dot{\phi}\frac{\partial \beta(a,\phi)}{\partial \phi}$$

kısaltmaları kullanıldı. Buna göre, Denklem (3.30) ile verilen $\pounds_{\widetilde{X}}L=0$ Noether simetri koşulundan $\dot{a}^4, \dot{a}^2, \dot{a}^3\dot{\phi}, \dot{a}\dot{\phi}, \dot{a}^3\dot{\phi}^2$ terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesi sonucu aşağıdaki diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

$$\alpha(a,\phi) - 2a\frac{\partial \alpha(a,\phi)}{\partial a} = 0, \tag{4.127}$$

$$\frac{\partial\alpha\left(a,\phi\right)}{\partial a}=0, \tag{4.128}$$

$$\frac{\partial\alpha\left(a,\phi\right)}{\partial\phi}=0, \tag{4.129}$$

$$a^{2}\frac{\partial\beta\left(a,\phi\right)}{\partial a}-4\frac{\partial\alpha\left(a,\phi\right)}{\partial\phi}=0, \tag{4.130}$$

$$\alpha\left(a,\phi\right)+a\frac{\partial\beta\left(a,\phi\right)}{\partial\phi}=0, \tag{4.131}$$

$$4\Lambda\alpha\left(a,\phi\right)+a\beta\left(a,\phi\right)\frac{dU(\phi)}{d\phi}+2\alpha\left(a,\phi\right)U(\phi)=0. \tag{4.132}$$

(4.127)-(4.129) denklemlerinden $\alpha=0$ olduğu görülür. Denklem (4.130) ve Denklem (4.131) ortak çözümünden $\beta=\beta_0$, sabit olduğu görülür. Dolayısıyla, Denklem (4.132)'dan etkileşim potansiyeli $U(\phi)=U_0$ şeklinde bulunur. Bu sonuçlar ışığında, $\phi(t)=\phi_0$ skaler alanın zamandan bağımsız olması koşulu altında, Denklem (4.120) ve Denklem (4.123),

$$\frac{\ddot{a}}{a}\left[\frac{2}{m^{2}}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{2}-4\right]=-4\Lambda+\frac{1}{m^{2}}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{4}-2U_0,$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{2}=\Lambda+\frac{U_0}{2}+\frac{1}{4m^{2}}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{4}$$

şeklinde indirgenir. Bu iki denklemin ortak çözümünden, $\Lambda_{eff}=\Lambda+U_0/2$ tanımı ve $m^2>\Lambda_{eff}$ olmak üzere aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$\Lambda_{eff}>0$ ise;

$$a\left(t\right)=e^{K(t-t_0)} \tag{4.133}$$

evrenin genişlemesini tasvir eden de Sitter uzay-zamanı çözümü elde edilir. Burada, $K^2=2m^2\pm 2m\sqrt{m^2-\Lambda_{eff}}$ kısaltması kullanılmıştır. Bu sonuç literatürdeki sonuçlarla uyumludur (Gabadadze vd 2012). Öte yandan,

$\Lambda_{eff}<0$ ise;

$$a\left(t\right)=e^{iK_1(t-t_0)} \tag{4.134}$$

çözümü elde edilir ki, bu çözüm evrenin salınım (oscillating universe) hareketi yaptığını gösterir. Burada, $K_1=\sqrt{2m\sqrt{m^2-\Lambda_{eff}}-2m^2}$.

4.6.1.2. Kara delik çözümleri

Çalışmamızın bu kısmında, genel statik düzlem simetrik uzay-zaman metriği kullanılarak kara delik çözümleri araştırılacaktır. Genel statik düzlemsel simetrik uzay-zaman metriği

$$ds^2 = A(r)dt^2 - \frac{1}{A(r)}dr^2 - r^2 d\theta^2 \tag{4.135}$$

ile temsil edilir. Bu metrik için R, Ricci skaleri, ve $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ kuadretik terimi, sırasıyla,

$$R = -\frac{rA'' + 2A'}{r},$$

$$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = \frac{\left(rA'' + 2A'\right)^2}{2r^2} + \frac{A'^2}{r^2}$$

şeklinde hesaplanır. Burada " $'$ " işareti r' ye göre türev alındığını belirtmektedir. Hesaplanan bu terimler, Denklem (4.114)'da yerine yazılıp, gerekli kısmi integrasyonlar yapıldıktan sonra, sistemin eylem fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur.

$$S = \int dr \left[-A' - 2r\Lambda - \frac{rA''^2}{8m^2} - \frac{rA}{2}\phi'^2 - rU(r) \right]. \tag{4.136}$$

Eylem fonksiyonunda görülen A''^2 teriminden kurtulmak için yardımcı bir değişken tanımlanır. Bu değişken, eylem fonksiyonunun en yüksek mertebeden türev içeren fonksiyona göre (burada A''^2 fonksiyonu) birinci türevi olarak tanımlanır (Boulware ve vd 1984, Sanyal ve Modak 2002). Buna göre yardımcı değişken Q olarak tanımlanırsa,

$$\frac{r}{8m^2}Q = -\frac{\partial S}{\partial A''} = \frac{2r}{8m^2}A'' \quad \rightarrow \quad Q = 2A''$$

olarak bulunur. Yardımcı değişken Denklem (4.136)' de kullanılarak, sistemi tanımlayan Lagranjiyen fonksiyonu şu şekilde elde edilir.

$$L = -A' - 2r\Lambda + \frac{A'Q}{8m^2} + \frac{rA'Q'}{8m^2} + \frac{rQ^2}{32m^2} - \frac{rA}{2}\phi'^2 - rU(r). \tag{4.137}$$

Sistemin hareket denklemleri, Denklem (4.119) ile verilen Euler-Lagrange denklemi yardımıyla,

$$Q'' + \frac{2}{r}Q' + 4m^2\phi'^2 = 0, \tag{4.138}$$

$$\phi'' + \left(\frac{A'}{A} + \frac{1}{r}\right)\phi' + \frac{1}{A}\frac{dU(\phi)}{d\phi} = 0, \tag{4.139}$$

$$Q = A'' \tag{4.140}$$

olarak bulunur. Öte yandan, Hamilton ya da enerji koşulu olarak bilinen ve Denklem (4.122) ile verilen bağıntı yardımı ile

$$A'Q' + 16m^2\Lambda - \frac{Q^2}{4} - 4m^2A\phi'^2 + 8m^2U(\phi) = 0 \tag{4.141}$$

denklemi bulunur. Hareket denklemlerinin tam olarak çözülebilmeleri için $U(\phi)$ skaler alan potansiyel fonksiyonunun açık ifadesinin bilinmesi gerekir. Bu nedenle, Noether Simetri yaklaşımı yardımı kullanılarak etkileşme potansiyeli belirlenecektir.

Teğet konfigürasyon uzayı (TM uzayı), $(A, \phi, Q, a', \phi', Q')$ koordinatları ile temsil edilir. Buna göre, Denklem (3.29) ile verilen vektör alanı,

$$\begin{aligned}\widetilde{X} = \alpha(A,\phi,Q)\frac{\partial}{\partial A} + \alpha'(A,\phi,Q)\frac{\partial}{\partial A'} + \beta(A,\phi,Q)\frac{\partial}{\partial Q} \\ +\beta'(A,\phi,Q)\frac{\partial}{\partial Q'} + \gamma(A,\phi,Q)\frac{\partial}{\partial \phi} + \gamma'(A,\phi,Q)\frac{\partial}{\partial \phi'}\end{aligned} \tag{4.142}$$

şeklinde tanımlanır. Burada,

$$\alpha'(A,\phi,Q) = A'\frac{\partial\alpha(A,\phi,Q)}{\partial A} + Q'\frac{\partial\alpha(A,\phi,Q)}{\partial Q} + \phi'\frac{\partial\alpha(A,\phi,Q)}{\partial \phi},$$

$$\beta'(A,\phi,Q) = A'\frac{\partial\beta(A,\phi,Q)}{\partial A} + Q'\frac{\partial\beta(A,\phi,Q)}{\partial Q} + \phi'\frac{\partial\beta(A,\phi,Q)}{\partial \phi},$$

$$\gamma'(A,\phi,Q) = A'\frac{\partial\gamma(A,\phi,Q)}{\partial A} + Q'\frac{\partial\gamma(A,\phi,Q)}{\partial Q} + \phi'\frac{\partial\gamma(A,\phi,Q)}{\partial \phi}$$

kısaltmaları kullanıldı. Bu durumda, Denklem (3.30) ile verilen $\pounds_{\widetilde{X}}L{=}0$ Noether simetri koşulundan $A'^2, Q'^2, \phi'^2, A'\phi', A'Q', Q'\phi', A', Q', \phi'$ terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesi sonucu aşağıdaki diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

$$\frac{\partial\beta(A,\phi,Q)}{\partial A} = 0, \tag{4.143}$$

$$\frac{\partial\alpha(A,\phi,Q)}{\partial Q} = 0, \tag{4.144}$$

$$A\frac{\partial\gamma(A,\phi,Q)}{\partial \phi} + \frac{\alpha(A,\phi,Q)}{2} = 0, \tag{4.145}$$

$$\frac{\beta(A,\phi,Q)}{8m^2} + \left(\frac{Q}{8m^2} - 1\right)\frac{\partial\alpha(A,\phi,Q)}{\partial A} = 0, \tag{4.146}$$

$$\left(\frac{Q}{8m^2} - 1\right)\frac{\partial\alpha(A,\phi,Q)}{\partial Q} = 0, \tag{4.147}$$

$$\left(\frac{Q}{8m^2}-1\right)\frac{\partial\alpha\left(A,\phi,Q\right)}{\partial\phi}=0, \tag{4.148}$$

$$\frac{\partial\alpha\left(A,\phi,Q\right)}{\partial A}+\frac{\partial\beta\left(A,\phi,Q\right)}{\partial Q}=0, \tag{4.149}$$

$$\frac{\partial\beta\left(A,\phi,Q\right)}{\partial\phi}-8m^2A\frac{\partial\gamma\left(A,\phi,Q\right)}{\partial A}=0, \tag{4.150}$$

$$\frac{\partial\alpha\left(A,\phi,Q\right)}{\partial\phi}-8m^2A\frac{\partial\gamma\left(A,\phi,Q\right)}{\partial Q}=0, \tag{4.151}$$

$$\frac{Q\beta\left(A,\phi,Q\right)}{16m^2}-\gamma\left(A,\phi,Q\right)\frac{dU(\phi)}{d\phi}=0. \tag{4.152}$$

(4.143)-(4.151) arasında bulunan denklemlerinin ortak çözümünden,

$$\alpha\left(A,\phi,Q\right)=0,\ \beta\left(A,\phi,Q\right)=0,\ \gamma\left(A,\phi,Q\right)=\gamma_0$$

elde edilir. Burada γ_0 integral sabitidir. Buna göre Denklem (4.152)' den potansiyel ifadesi

$$U(\phi)=U_0 \tag{4.153}$$

sabit bir fonksiyon olarak bulunur. Elde edilen bu sonuçlar kullanılarak alan denklemlerinin çözümleri

$$A(r)=\pm m\sqrt{4\Lambda+2U_0}r^2+C_0r+C_1, \tag{4.154}$$

$$\phi(r)=\phi_0 \tag{4.155}$$

olarak bulunur. Burada, ϕ_0, C_0 ve C_1 birer integral sabitidir. $A(r)$ fonksiyonunun bir karadeliği temsil edip etmediğini kontrol edelim.

-Eğer $A(r)=m\sqrt{4\Lambda+2U_0}r^2+C_0r+C_1$

ise, Ricci skaleri,

$$R=-\frac{6m\sqrt{4\Lambda+2U_0}r+2C_0}{r}$$

olur. Buna göre, $C_0\neq 0$ ve $C_0^2>4mC_1\sqrt{4\Lambda+2U_0}$ olmak üzere, $r=0$' da tekilliği (singularity) olan,

$$r_+=\frac{1}{2m\sqrt{4\Lambda+2U_0}}\left[\sqrt{C_0^2-4mC_1\sqrt{4\Lambda+2U_0}}-C_0\right]$$

yarıçaplı dış olay ufkuna ve

$$r_-=-\frac{1}{2m\sqrt{4\Lambda+2U_0}}\left[\sqrt{C_0^2-4mC_1\sqrt{4\Lambda+2U_0}}+C_0\right]$$

yarıçaplı iç olay ufkuna sahip bir kara delik çözümüdür.

-Eğer $A(r) = -m\sqrt{4\Lambda + 2U_0}r^2 + C_0 r + C_1$

ise, Ricci skaleri,

$$R = \frac{6m\sqrt{4\Lambda + 2U_0}r - 2C_0}{r}$$

olmak üzere ve $C_0 \neq 0$ koşuluyla, $r = 0$' da bir tekilliği ve

$$r_+ = \frac{1}{2m\sqrt{4\Lambda + 2U_0}}\left[C_0 + \sqrt{C_0^2 + 4mC_1\sqrt{4\Lambda + 2U_0}}\right]$$

yarıçaplı dış olay ufkuna ve

$$r_- = \frac{1}{2m\sqrt{4\Lambda + 2U_0}}\left[C_0 - \sqrt{C_0^2 + 4mC_1\sqrt{4\Lambda + 2U_0}}\right]$$

yarıçaplı iç olay ufkuna sahip bir kara delik çözümü elde edilmiş olur.

Bu çözümler, yeni-tip kara delik benzeri çözümlerdir. (4.154) denklemine göre, metrik, gravitonun kütlesine, kozmolojik sabite ve skaler alanın sabit potansiyeline bağlıdır.

4.6.2. Gravitasyonel alanın fermiyonik alanla çiftlenimi

Spin-$1/2$ parçacıklarının davranışlarını temsil eden Dirac denklemi, parçacık fiziği, yoğun madde fiziği, grafen gibi iki boyutlu katmanların fiziğinin anlaşılmasında önemli rol oynadığı gibi, astrofiziksel ve kozmolojik ölçeklerde de önemli uygulamaları mevcuttur. Bu bağlamda, (2+1) boyutlu kütleli gravitasyon kuramı kapsamında, gravitasyonel alan ile fermiyonik alanın çiftleniminin kozmolojik etkileri incelenecektir.

Eğri uzay-zamanda Dirac fermiyonlarını temsil eden Lagrangjiyen,

$$L_D = \frac{i}{2}\left[\overline{\psi}\sigma^\mu(x)D_\mu\psi - \left(\overline{D}_\mu\overline{\psi}\right)\sigma^\mu(x)\psi\right] - m_0\Psi - V(\Psi) \tag{4.156}$$

şeklindedir. Burada, $D_\mu \to \partial_\mu + \Gamma_\mu$ kovaryant türevi, m_0 Dirac fermiyonunu kütlesini, $V(\Psi)$ fermiyonların birbirleriyle etkileşmelerini temsil eden potansiyel, $\overline{\psi} = \psi^+\sigma^3$ Dirac spinorünün adjoint Spinorü, $\Psi = \overline{\psi}\psi$ spinor alanın bilinear formu ile tanımlanan skaler nicelik ve σ^μ eğri uzay-zamanda Dirac matrisleridir. Buna göre, Dirac spinor alanının yeni kütleli gravitasyon kuramı kapsamında gravitasyonel alanı ile minimal çiftlenimi ile oluşan sistemin eylem fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} S_{toplam} = &\int d^3x\sqrt{|g|}\left[\frac{i}{2}\left[\overline{\psi}\sigma^\mu(x)D_\mu\psi - \left(\overline{D}_\mu\overline{\psi}\right)\sigma^\mu(x)\psi\right] - m_0\Psi - V(\Psi)\right] \\ &+ \int d^3x\sqrt{|g|}\left[R - 2\Lambda - \frac{1}{m^2}\left(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{3}{8}R^2\right)\right] \end{aligned} \tag{4.157}$$

Denklem (4.115) ile verilen homojen, izotropik ve uzaysal olarak düz (2+1)-boyutlu FRW uzay-zaman metriği ve bu metrik için hesaplanan R Ricci skaleri ve $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ terimi (4.157) denkleminde kullanılırsa, sistemi tanımlayan Lagranjiyen fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur.

$$L = -2\left[\dot{a}^2 + a^2\Lambda\right] + \frac{\dot{a}^4}{6ma^2} + i\frac{a^2}{2}\left[\overline{\psi}\sigma^3\dot{\psi} - \dot{\overline{\psi}}\sigma^3\psi\right] - a^2\left[m_0\Psi + V(\Psi)\right]. \quad (4.158)$$

Buna göre, sistemin hareket denklemleri Denklem (4.119) ile verilen Euler-Lagranj denklemi kullanılarak şu şekilde bulunur. Sırasıyla, adjoint Dirac denklemi,

$$\dot{\overline{\psi}} + H\overline{\psi} - i\overline{\psi}\sigma^3\left[m_0 + \frac{dV(\Psi)}{d\Psi}\right] = 0, \quad (4.159)$$

Dirac denklemi,

$$\dot{\psi} + H\psi + i\sigma^3\psi\left[m_0 + \frac{dV(\Psi)}{d\Psi}\right] = 0 \quad (4.160)$$

ve Friedmann denklemi,

$$\frac{\ddot{a}}{a}\left[\frac{2H^2}{m^2} - 4\right] = -4\Lambda + \frac{H^4}{m^2} + i\left[\overline{\psi}\sigma^3\dot{\psi} - \dot{\overline{\psi}}\sigma^3\psi\right] - 2\left[m_0\Psi + V(\Psi)\right] \quad (4.161)$$

olarak bulunur. Bunun yanısıra, Denklem (4.122) ile verilen Hamilton kısıtlama denklemi burada kullanılan sistem için,

$$E_L = \dot{a}\frac{\partial L}{\partial \dot{a}} + \dot{\overline{\psi}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{\psi}}} + \dot{\psi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - L = 0,$$

şeklinde olur ve buradan,

$$H^2 = \Lambda + \frac{H^4}{4m^2} + \frac{1}{2}\left[m_0\Psi + V(\Psi)\right] \quad (4.162)$$

ikinci Friedmann denklemi elde edilmiş olur. Denklem (4.161) ile verilen birinci Friedmann denklemi, Denklem (4.159) ve Denklem (4.160) kullanılarak,

$$\frac{\ddot{a}}{a}\left[\frac{2H^2}{m^2} - 4\right] = -4\Lambda + \frac{H^4}{m^2} + 2\left[m_0 + \frac{dV(\Psi)}{d\Psi}\right] - 2\left[m_0\Psi + V(\Psi)\right] \quad (4.163)$$

şeklinde yazılabilir. Öte yandan, Denklem (4.159) ve Denklem (4.160) kullanılarak Dirac spinörünün bilineer formu için

$$\dot{\Psi} + 2H\Psi = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü de, Ψ_0 integrasyon sabiti olmak üzere

$$\Psi = \frac{\Psi_0}{a^2}$$

şeklinde olur.

Alan denklemlerinin çözülebilmesi için, $V(\Psi)$ etkileşim potansiyelinin formu bilinmelidir. Bunun için Noether teoremi kullanılarak potansiyelin uygun bir formu belirlenecektir. Öncelikle, Denklem (4.158) ile verilen lagranjiyen, $\psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$ ve $\epsilon_k=\begin{cases} 1 & k=1 \\ -1 & k=2 \end{cases}$ olmak üzere,

$$L = -2\left[\dot{a}^2 + a^2\Lambda\right]+\frac{\dot{a}^4}{6ma^2}+i\frac{a^2}{2}\sum_{k=1}^{2}\left[\psi_k^+\dot{\psi}_k - \dot{\psi}_k^+\psi_k\right]-a^2\left[m_0\sum_{k=1}^{2}\varepsilon_k\psi_k^+\psi_k + V(\Psi)\right] \tag{4.164}$$

olarak yazılabilir. Bu durumda, teğet konfigürasyon uzayının (TM uzayı) koordinatları, $(a, \psi_k, \psi_k^+, \dot{a}, \dot{\psi}_k, \dot{\psi}_k^+)$ ile temsil edilir. O halde, vektör alanı,

$$\widetilde{X} = C_0\frac{\partial}{\partial a} + \dot{C}_0\frac{\partial}{\partial \dot{a}} + \sum_{k=1}^{2}\left[C_k\frac{\partial}{\partial \psi_k^+} + \dot{C}_k\frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_k^+} + D_k\frac{\partial}{\partial \psi_k} + \dot{D}_k\frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_k}\right] \tag{4.165}$$

şeklinde yazılır. Burada,

$$\dot{C}_0 = \dot{a}\frac{\partial C_0}{\partial a} + \sum_{k=1}^{2}\left[\dot{\psi}_k^+\frac{\partial C_0}{\partial \psi_k^+} + \dot{\psi}_k\frac{\partial C_0}{\partial \psi_k}\right],$$

$$\dot{C}_k = \dot{a}\frac{\partial C_k}{\partial a} + \sum_{m=1}^{2}\left[\dot{\psi}_m^+\frac{\partial C_k}{\partial \psi_m^+} + \dot{\psi}_m\frac{\partial C_k}{\partial \psi_m}\right],$$

$$\dot{D}_k = \dot{a}\frac{\partial D_k}{\partial a} + \sum_{m=1}^{2}\left[\dot{\psi}_m^+\frac{\partial D_k}{\partial \psi_m^+} + \dot{\psi}_m\frac{\partial D_k}{\partial \psi_m}\right]$$

kısaltmaları kullanıldı. Denklem (3.30) ile verilen $\pounds_{\widetilde{X}}L=0$ Noether simetri koşulu kullanılarak aşağıdaki denklem sistemi elde edilmiş olur.

$$2a\frac{\partial C_0}{\partial a} - C_0 = 0, \tag{4.166}$$

$$\psi_k^+C_0 + \frac{a}{2}C_k - \frac{a}{2}\sum_{m=1}^{2}\left[\psi_k\frac{\partial C_k}{\partial \psi_m} - \psi_k^+\frac{\partial D_k}{\partial \psi_m}\right] = 0, \tag{4.167}$$

$$\psi_k C_0 + \frac{a}{2} D_k + \frac{a}{2} \sum_{m=1}^{2} \left[\psi_k \frac{\partial C_k}{\partial \psi_m^+} - \psi_k^+ \frac{\partial D_k}{\partial \psi_m^+} \right] = 0, \tag{4.168}$$

$$\frac{\partial C_0}{\partial a} = 0, \tag{4.169}$$

$$\frac{\partial C_0}{\partial \psi_k} = 0, \tag{4.170}$$

$$\frac{\partial C_0}{\partial \psi_k^+} = 0, \tag{4.171}$$

$$\psi_k \frac{\partial C_k}{\partial a} - \psi_k^+ \frac{\partial D_k}{\partial a} = 0, \tag{4.172}$$

$$C_0 \left[4\Lambda + 2 \left(m_0 \sum_{k=1}^{2} \varepsilon_k \psi_k^+ \psi_k + V(\Psi) \right) \right] + a \left(\frac{dV}{d\Psi} + m_0 \right) \sum_{k=1}^{2} \varepsilon_k \left[\psi_k C_k + \psi_k^+ D_k \right] = 0. \tag{4.173}$$

Denklem (4.166) ve (4.169)-(4.171) denklemlerinin ortak çözümlerinden $C_0 = 0$ olduğu görülür. Diğer taraftan, (4.167), (4.168) ve (4.172) bağıntıları birlikte çözüldüğünde, $C_k = \psi_k^+$ ve $D_k = \psi_k^+ - \psi_k$ elde edilir. Bu sonuçlar (4.171) denkleminde kullanılırsa potansiyel formu için,

$$V(\Psi) = -m_0 \Psi \tag{4.174}$$

şeklinde bir sonuç bulunur. Bulunan potansiyel ifadesi, Denklem (4.162) ve Denklem (4.163)' da yerine yazılırsa,

$$\frac{\ddot{a}}{a} \left[\frac{2}{m^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - 4 \right] = -4\Lambda + \frac{1}{m^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^4,$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \Lambda + \frac{1}{4m^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^4$$

şeklinde indirgenir. Bu iki denklemin ortak çözümünden, $m^2 > \Lambda$ olmak üzere aşağıdaki sonuçlar elde edilir. $K^2 = 2m^2 \pm 2m\sqrt{m^2 - \Lambda}$ olmak üzere,

$\Lambda > 0$ ise;

$$a(t) = e^{K(t - t_0)} \tag{4.175}$$

evrenin genişlemesini tasvir eden de Sitter uzay-zamanı çözümü elde edilir. Bu sonuç literatürdeki sonuçlarla uyumludur (Gabadadze vd, 2012). Öte yandan,

$\Lambda < 0$ ise;

$$a(t) = e^{iK_1(t - t_0)} \tag{4.176}$$

çözümü elde edilir ki, bu çözüm evrenin salınım (oscillating universe) hareketi yaptığını gösterir. Burada, $K_1 = \sqrt{2m\sqrt{m^2 - \Lambda} - 2m^2}$.

4.6.3. Gravitasyonel alanın vektör alanla çiftlenimi

Eğri uzay-zamanda kütleli spin-1 vektör bozon alanını temsil eden Lagrangjiyen yoğunluğu,

$$L_{DKP} = \frac{i}{2}\left[\overline{\psi}\beta^{\mu}D_{\mu}\psi - \left(\overline{D_{\mu}\overline{\psi}}\right)\beta^{\mu}\psi\right] - m_0\Psi - V(\Psi) \tag{4.177}$$

ile verilir. Burada β^{μ} Denklem (2.22) ile verilen eğri uzay-zamanda tanımlanan Kemmer matrisleri, D_{μ} kovaryant türev ve $D_{\mu} \to \partial_{\mu} - \Sigma_{\mu}$ şeklinde tanımlanır. $\overline{\psi}$ adjoınt spinordür ve $\eta^0{=}2\left(\beta^0\right)^2 - I$ olmak üzere $\overline{\psi}{=}\psi^{+}\eta^0$ ile verilir. $V(\Psi)$ vektör bozonlarının etkileşim potansiyeli ve $\Psi{=}\overline{\psi}\psi$ ise spinor alanın bilinear formu ile tanımlanan skaler niceliktir. Bu tanımlara dayanarak, kütleli spin-1 vektör bozon alanının yeni kütleli gravitasyon kuramı kapsamında gravitasyonel alanı ile minimal bir şekilde kuplajından oluşan sistem için eylem fonksiyonu,

$$\begin{aligned} S_{toplam} = & \int d^3x\sqrt{|g|}\left[\frac{i}{2}\left[\overline{\psi}\beta^{\mu}D_{\mu}\psi - \left(\overline{D_{\mu}\overline{\psi}}\right)\beta^{\mu}\psi\right] - m_0\Psi - V(\Psi)\right] \\ & + \int d^3x\sqrt{|g|}\left[R - 2\Lambda - \frac{1}{m^2}\left(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{3}{8}R^2\right)\right] \end{aligned} \tag{4.178}$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla, Denklem (4.115) ile verilen homojen, izotropik ve uzaysal olarak düz (2+1)-boyutlu FRW uzay-zaman metriği ve bu metrik için hesaplanan R Ricci skaleri ve $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ terimi (4.178) denkleminde yerine yazılıp gerekli işlemler yapıldıktan sonra, sistemi tanımlayan Lagranjiyeni

$$L = -2\left[\dot{a}^2 + a^2\Lambda\right] + \frac{\dot{a}^4}{6ma^2} + i\frac{a^2}{2}\left[\overline{\psi}\beta^0\dot{\psi} - \dot{\overline{\psi}}\beta^0\psi\right] - a^2\left[m_0\Psi + V(\Psi)\right] \tag{4.179}$$

şeklinde elde edilir. Buna göre, Denklem (4.119) kullanılarak, Euler-Lagrange hareket denklemleri aşağıdaki gibi bulunabilir;

$$\frac{\ddot{a}}{a}\left[\frac{2H^2}{m^2} - 4\right] = -4\Lambda + \frac{H^4}{m^2} + i\left[\overline{\psi}\beta^0\dot{\psi} - \dot{\overline{\psi}}\beta^0\psi\right] - 2\left[m_0\Psi + V(\Psi)\right], \tag{4.180}$$

$$(\dot{\overline{\psi}} + H\overline{\psi})\beta^0 - i\overline{\psi}\left[m_0 + \frac{dV(\Psi)}{d\Psi}\right] = 0, \tag{4.181}$$

$$\beta^0(\dot{\psi} + H\psi) + i\psi\left[m_0 + \frac{dV(\Psi)}{d\Psi}\right] = 0. \tag{4.182}$$

Bunların dışında, Denklem (4.122) ile verilen Hamilton kısıtlama veya enerji koşulu denklemi,

$$E_L = \dot{a}\frac{\partial L}{\partial \dot{a}} + \dot{\overline{\psi}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{\psi}}} + \dot{\psi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - L = 0$$

kullanılarak,

$$H^2 = \Lambda + \frac{H^4}{4m^2} + \frac{1}{2}\left[m_0\Psi + V(\Psi)\right] \tag{4.183}$$

Friedmann denklemi elde edilir. Denklem (4.181) ve Denklem (4.182) kullanılarak, Denklem (4.180) daha sade bir şekilde,

$$\frac{\ddot{a}}{a}\left[\frac{2H^2}{m^2} - 4\right] = -4\Lambda + \frac{H^4}{m^2} + 2\Psi\left[m_0 + \frac{dV(\Psi)}{d\Psi}\right] - 2\left[m_0\Psi + V(\Psi)\right] \tag{4.184}$$

olarak yazılabilir.

Alan denklemlerinin çözülebilmesi için, daha önce yapıldığı gibi, Noether simetri yaklaşımı metodu kullanılark etkileşme potansiyeli belirlenecektir. Bunun için, vektor parçacıklarını temsil eden dalga fonksiyonunu

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_2 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

şeklinde alıp Lagrange fonksiyonu,

$$\begin{aligned} L = -2\left[\dot{a}^2 + a^2\Lambda\right] + \frac{\dot{a}^4}{6ma^2} + i\frac{a^2}{2}\left[\psi_1^+\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_1^+\psi_1 - \psi_4^+\dot{\psi}_4 + \dot{\psi}_4^+\psi_4\right] \\ -a^2\left[V(\Psi) + m_0\left(\psi_1^+\psi_1 - 2\psi_2^+\psi_2 + \psi_4^+\psi_4\right)\right] \end{aligned} \tag{4.185}$$

olarak yeniden yazılabilir. Bu durumda, teğet uzayının (TM uzayı) koordinatları $(a, \psi_1, \psi_2, \psi_4, \psi_1^+, \psi_2^+, \psi_4^+, \dot{a}, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2, \dot{\psi}_4, \dot{\psi}_1^+, \dot{\psi}_2^+, \dot{\psi}_4^+)$ olacaktır. Dolayısıyla, vektör alanı

$$\begin{aligned} \widetilde{X} = C_0\frac{\partial}{\partial a} + \dot{C}_0\frac{\partial}{\partial \dot{a}} + C_1\frac{\partial}{\partial \psi_1} + \dot{C}_1\frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_1} + C_2\frac{\partial}{\partial \psi_2} + \dot{C}_2\frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_2} + C_3\frac{\partial}{\partial \psi_4} \\ +\dot{C}_3\frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_4} + C_4\frac{\partial}{\partial \psi_1^+} + \dot{C}_4\frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_1^+} + C_5\frac{\partial}{\partial \psi_2^+} + \dot{C}_5\frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_2^+} + C_6\frac{\partial}{\partial \psi_4^+} + \dot{C}_6\frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_4^+} \end{aligned} \tag{4.186}$$

şeklinde olacaktır. Burada $\dot{C}_0$ ve $\dot{C}_1$ için,

$$\dot{C}_0 = \dot{a}\frac{\partial C_0}{\partial a} + \dot{\psi}_1\frac{\partial C_0}{\partial \psi_1} + \dot{\psi}_2\frac{\partial C_0}{\partial \psi_2} + \dot{\psi}_4\frac{\partial C_0}{\partial \psi_4} + \dot{\psi}_1^+\frac{\partial C_0}{\partial \psi_1^+} + \dot{\psi}_2^+\frac{\partial C_0}{\partial \psi_2^+} + \dot{\psi}_4^+\frac{\partial C_0}{\partial \psi_4^+},$$

$$\dot{C}_1 = \dot{a}\frac{\partial C_1}{\partial a} + \dot{\psi}_1\frac{\partial C_1}{\partial \psi_1} + \dot{\psi}_2\frac{\partial C_1}{\partial \psi_2} + \dot{\psi}_4\frac{\partial C_1}{\partial \psi_4} + \dot{\psi}_1^+\frac{\partial C_1}{\partial \psi_1^+} + \dot{\psi}_2^+\frac{\partial C_1}{\partial \psi_2^+} + \dot{\psi}_4^+\frac{\partial C_1}{\partial \psi_4^+}$$

kısaltmaları kullanılmıştır. Benzer kısaltmalar, $\dot{C}_2$, $\dot{C}_3$, $\dot{C}_4$, $\dot{C}_5$ ve $\dot{C}_6$ için söz konusudur. Buna göre, $\pounds_{\tilde{X}} L = 0$ Noether simetri koşulu kullanılarak aşağıdaki denklem sistemi elde edilmiş olur.

$$2a\frac{\partial C_0}{\partial a} - C_0 = 0, \tag{4.187}$$

$$\frac{\partial C_0}{\partial a} = 0,\ \frac{\partial C_0}{\partial \psi_1} = 0,\ \frac{\partial C_0}{\partial \psi_2} = 0,\ \frac{\partial C_0}{\partial \psi_4} = 0,\ \frac{\partial C_0}{\partial \psi_1^+} = 0,\ \frac{\partial C_0}{\partial \psi_2^+} = 0,\ \frac{\partial C_0}{\partial \psi_4^+} = 0, \tag{4.188}$$

$$\psi_1^+\frac{\partial C_1}{\partial \psi_2} + \psi_4\frac{\partial C_6}{\partial \psi_2} - \psi_4^+\frac{\partial C_3}{\partial \psi_2} - \psi_1\frac{\partial C_4}{\partial \psi_2} = 0, \tag{4.189}$$

$$\psi_1^+\frac{\partial C_1}{\partial \psi_2^+} + \psi_4\frac{\partial C_6}{\partial \psi_2^+} - \psi_4^+\frac{\partial C_3}{\partial \psi_2^+} - \psi_1\frac{\partial C_4}{\partial \psi_2^+} = 0, \tag{4.190}$$

$$\psi_1^+\frac{\partial C_1}{\partial a} + \psi_4\frac{\partial C_6}{\partial a} - \psi_4^+\frac{\partial C_3}{\partial a} - \psi_1\frac{\partial C_4}{\partial a} = 0, \tag{4.191}$$

$$C_0\psi_1^+ + \frac{a}{2}\left[\psi_1^+\frac{\partial C_1}{\partial \psi_1} + \psi_4\frac{\partial C_6}{\partial \psi_1} - \psi_4^+\frac{\partial C_3}{\partial \psi_1} - \psi_1\frac{\partial C_4}{\partial \psi_1} + C_4\right] = 0, \tag{4.192}$$

$$C_0\psi_1 - \frac{a}{2}\left[\psi_1^+\frac{\partial C_1}{\partial \psi_1^+} + \psi_4\frac{\partial C_6}{\partial \psi_1^+} - \psi_4^+\frac{\partial C_3}{\partial \psi_1^+} - \psi_1\frac{\partial C_4}{\partial \psi_1^+} - C_1\right] = 0, \tag{4.193}$$

$$C_0\psi_4^+ - \frac{a}{2}\left[\psi_1^+\frac{\partial C_1}{\partial \psi_4} + \psi_4\frac{\partial C_6}{\partial \psi_4} - \psi_4^+\frac{\partial C_3}{\partial \psi_4} - \psi_1\frac{\partial C_4}{\partial \psi_4} - C_6\right] = 0, \tag{4.194}$$

$$C_0\psi_4 + \frac{a}{2}\left[\psi_1^+\frac{\partial C_1}{\partial \psi_4^+} + \psi_4\frac{\partial C_6}{\partial \psi_4^+} - \psi_4^+\frac{\partial C_3}{\partial \psi_4^+} - \psi_1\frac{\partial C_4}{\partial \psi_4^+} + C_3\right] = 0, \tag{4.195}$$

$$\begin{aligned} a\left(m_0 + \frac{dV}{d\Psi}\right)&\left[-C_1\psi_1^+ + 2C_2\psi_2^+ - C_3\psi_4^+ - C_4\psi_1 + C_2\psi_2 - C_6\psi_4\right] \\ &+C_0\left[-4\Lambda - 2V - 2m_0\left(\psi_1^+\psi_1 - 2\psi_2^+\psi_2 + \psi_4^+\psi_4\right)\right] = 0. \end{aligned} \tag{4.196}$$

Denklem (4.187) ve Denklem (4.188)'den C_0 katsayısının sıfır olduğu görülür. Bu durumda, Denklem (4.196) eşitliğinden de potansiyel fonsiyonu için,

$$m_0 + \frac{dV}{d\Psi} = 0$$

ise,

$$V = -m_0\Psi$$

elde edilir. Bulunan potansiyel ifadesi için, Denklem (4.183) ve Denklem (4.184) hareket denklemlerinin,

$$\frac{\ddot{a}}{a}\left[\frac{2}{m^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - 4\right] = -4\Lambda + \frac{1}{m^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^4 \tag{4.197}$$

ve

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \Lambda + \frac{1}{4m^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^4 \tag{4.198}$$

şeklinde indirgendiği görülür. Bu iki denklemin ortak çözümünden, $m^2 > \Lambda$ olmak üzere ve $K^2 = 2m^2 \pm 2m\sqrt{m^2 - \Lambda}$ kısaltması için aşağıdaki çözümler bulunur.

$\Lambda > 0$ ise;

$$a(t) = e^{K(t-t_0)} \tag{4.199}$$

evrenin genişlemesini tasvir eden de Sitter uzay-zamanı çözümü elde edilir. Öte yandan,

$\Lambda < 0$ ise;

$$a(t) = e^{iK_1(t-t_0)} \tag{4.200}$$

çözümü elde edilir ki, bu çözüm evrenin salınım (oscillating universe) hareketi yaptığını gösterir. Burada, $K_1 = \sqrt{2m\sqrt{m^2 - \Lambda} - 2m^2}$.

5. TARTIŞMA

Tezin birinci kısmında, yeni-tip kara deliği ve warped-AdS$_3$ Kara deliğinin Hawking radyasyonu relativistik parçacıkların kuantum mekaniksel olarak tünelleme yöntemi kullanılarak iki farklı aşamada incelendi: Birinci aşamada kuantum kütleçekim etkiler ihmal edildi. İkinci aşamada ise kuantum kütleçekim etkiler hesaba katıldı.

Yeni-tip kara deliğinin Hawking radyasyonu spin-0, spin-1/2 ve spin-1 parçacıklarının kuantum mekaniksel olarak bu kara delikten tünelleme yöntemi kullanılarak incelendi. Kuantum kütleçekim etkiler ihmal edilerek, spin-0, spin-1/2 ve spin-1 parçacıklarının kara delikten tünelleme olasılıkları hesaplandı. Her bir parçacık için bulunan tünelleme olasılıkları kullanılarak hesaplanan Hawking sıcaklıkları eşit çıkmıştır. Elde edilen sonuçlar klasik yüzey çekimi (surface gravity) yöntemi ile heaplanan değerlerle aynıdır. Ayrıca, Hamilton-Jacobi yöntemi ile elde edilen tünelleme olasılıklarına ve Hawking sıcaklıklarına, parçacıkların spin etkilerinin yansımadığı görülür. Öte yandan, Çizelge 2.1'deki veriler kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$f^{'}(r_+) = r_+ - r_- = \sqrt{b^2 - 4c}$$

olmak üzere;

- DURUM 1 (b^2=$4c$): Bu, Yeni-tip kara deliğin extremal durumuna karşılık gelir. (4.35), (4.45) ve (4.54) denklemlerine göre tünelleme olayı gerçekleşmez, yani Dirac, skaler ve vektör parçacıkları kara delikten kaçamaz. Dolayısıyla, Hawking sıcaklığı, T_H, sıfır olur.

- DURUM 2 (b<0 ve c>0): b^2>$4c$ olması koşulu ile Dirac, skaler ve vektör parçacıkları kara delikten tünelleme yapabilirler ve dolayısıyla Hawking radyasyonuna neden olurlar. Her üç çeşit parçacığın tünelleme olasılıkları ve Hawking radyasyonları sırasıyla,

  $$\Gamma = \exp\left[-\frac{4\pi E}{\hbar\sqrt{b^2 - 4c}}\right] \quad \text{ve} \quad T_H = \hbar\frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{4\pi}$$

  şeklindedir.

- DURUM 3 (b<0 ve c=0): Bu durumda kara deliğin iç olay ufku kaybolur, yani r_-=0. Buna göre, tünelleme olasılığı ve Hawking radyasyonu, sırasıyla,

  $$\Gamma = \exp\left[-\frac{4\pi E}{\hbar\,|b|}\right] \quad \text{ve} \quad T_H = \hbar\frac{|b|}{4\pi}$$

  olur.

- DURUM 4 (b<0 ve c<0): Her üç çeşit parçacığın tünelleme olasılıkları ve Hawking radyasyonları sırasıyla

$$\Gamma = \exp\left[-\frac{4\pi E}{\hbar\sqrt{b^2-4c}}\right] \quad \text{ve} \quad T_H = \hbar\frac{\sqrt{b^2-4c}}{4\pi}$$

  şeklindedir.

- DURUM 5 (b=0 ve c<0): Denklem-(2.8) ile verilen Yeni-tip karadelik metriği, durağan BTZ kara delik metriğine indirgenir. Bu durumda, tünelleme olasılığı ve Hawking radyasyonu sırasıyla exp $\left[-\frac{2\pi E}{\hbar\sqrt{|c|}}\right]$ ve $T_H = \hbar\frac{\sqrt{|c|}}{2\pi}$ olacaktır.

- DURUM 6 (b>0 ve c<0): Bu durumda, b and c parametrelerinin bütün değerleri için parçacıkların tünelleme olasılıkları ve Hawking radyasyonları sırasıyla

$$\Gamma = \exp\left[-\frac{4\pi E}{\hbar\sqrt{b^2-4c}}\right] \quad \text{ve} \quad T_H = \hbar\frac{\sqrt{b^2-4c}}{4\pi}$$

  şeklindedir.

Öte yandan, kuantum kütleçekim etkiler hesaba katılarak, spin-0 ve spin-1/2 parçacıklarının Yeni-tip kara delikten tünelleme olasılıkları hesaplandı. Spin-0 parçacıklarının tünellemesi durumu için, Denklem (4.35) ile Denklem (4.62) karşılaştırdığımızda, kuantum kütleçekim etkilerinin Hawking sıcaklğının azalmasına sebep olduğu ortaya çıkar. Aynı şekilde, spin-1/2 parçacıklarının tünelleme olayında, Denklem (4.45) ile Denklem (4.70) karşılaştırdığımızda, kuantum kütleçekim etkilerinin Hawking sıcaklğının azalmasına sebep olduğu ortaya çıkar. Ayrıca, bu sonuçlar bize, spin-0 parçacıklarının Denklem (4.62) ile verilen radyasyon sıcaklığının, spin-1/2 parçacıklarının Denklem (4.70) ile verilen radyasyon sıcaklığından daha düşük olduğunu göstermektedir. Bu durumda, kuantum kütleçekim etkileri, parçacıkların sahip oldukları spin değerlerinin Hawking sıcaklığına olan etkileri açığa çıkardığını söyleyebiliriz.

Warped-AdS$_3$ kara deliğinin Hawking radyasyonu ise spin-0, spin1/2 ve spin-1 relativistik parçacıklarının kuantum mekaniksel tünellemesi yoluyla, kuantum kütleçekimsel etkiler ihmal edildiğinde, Denklem (4.75), Denklem (4.83) ve Denklem (4.92)' den görülebileceği gibi her üç parçacık türü aynı tünelleme olasılık değerlerine ve dolayısıyla aynı Hawking sıcaklık değerlerine sahip olduğu görülür. Öte yandan, warped-AdS$_3$ kara deliği, ω parametresinin farklı değerleri için farklı fiziksel ve matematiksel özellikler sergilemektedir. ω parametresi $\frac{2r_0}{3}$ ifadesine göre alacağı değerlere göre Warped-AdS$_3$ kara deliği için kritik bir öneme sahip olduğunu ve Hawking sıcaklığı üzerinde önemli etkilere neden olduğunu gördük. Örneğin, $\omega<\frac{2r_0}{3}$ ise Denklem (4.75) ve Denklem (4.83) Hawking sıcaklığının arttığı, fakat $\omega>\frac{2r_0}{3}$ ise sıcaklığın azaldığı gözlemlendi. Hawking radyasyonundaki bu farklı davranışların, Warped-AdS_3 kara deliğinin kararsızlığı ile açıklanabileceğini gördük. Çünkü, $\omega < \frac{2\, r_0}{3}$ değerleri için dış olay ufkunun açısal hızı pozitif iken ($\Omega_+ > 0$), iç olay ufkunun açısal hızı negatif olur ($\Omega_- < 0$). Ayrıca, kara deliğin açısal momentumu (J) da negatif olur. Bu durum akışkan yıldızların yapısına benzemektedir. Kararsız bir akışkan yıldız CFS mekanızması yolu ile gravitasyonel dalga yayımlar ve buna bağlı olarak açısal momentum kaybeder. Bu benzerlik doğrultusunda, kararsız olan Warped-AdS_3 kara deliğinin, akışkan yıldızlardaki gibi, gravitasyonel dalga yayımladığı ve buna bağlı olarak açısal momentum kaybettiği görülür. Dalayısıyla, Hawking ışımasındaki artışın, karadelik tarafından salınan bu gravitasyonel dalgaların neden olduğu söylenebilir. Böylece, sadece akışkan yıldızlarda geçerli olduğu kabul edilen CFS mekanizmasının durağan olmayan kara delikler için de geçerli olduğu görülmektedir.

Warped-AdS_3 kara deliği $r_0 = 0$'da exremal olur ve bu durum özel bir öneme sahiptir. Çünkü, $r = 0$'da çift olay ufku olur ve klasik anlamda yüzey kütleçekimi sıfırdır, dolayısıyla Hawking sıcaklığının da sıfır olduğu görülür. Fakat, $r_0 = 0$ extremal durum için Dirac denklemi yeniden yazılıp, Dirac parçacıklarının bu extremal kara delikten tünellemesi hesaplanırsa sıfırdan farklı bir sonuç bulunur ki, bu sonuç extremal kara deliğin $T_H = \frac{\hbar\sqrt{3}}{8\pi}$ ile verilen sabit, hem parçacığın hem de kara deliğin özelliklerinden bağımsız bir Hawking sıcaklığına tekabül eder. Bu sonuca göre, extremal warped-AdS_3 kara deliği kuantum mekaniksel olarak ışıma yapabileceğini göstermektedir. Ayrıca, Hawking sıcaklığı ve yüzey kütleçekimi arasındaki $T_H = \hbar\frac{\kappa}{2\pi}$ bağıntısından, yüzey kütleçekimi için $\kappa = \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$ değeri bulunur. Bu değer, extremal warped-AdS_3 kara deliğinin kuantize olmuş yüzey kütleçekiminin taban durum değeri olarak yorumlanabilir (Geçim ve Sucu, 2014). Aslında bu durum, durağan olmayan, dönen yada yüklü bütün kara delik sistemleri için söz konusudur. Einstein standart yüzey kütleçekimi ile Hawking sıcaklığının eşitliği, ancak, durağan dönmeyen ve nötral kara delikler için mümkündür.

Diğer yandan, kuantum kütleçekim etkiler hesaba katılarak, spin-0 ve spin-1/2 parçacıklarının warped-AdS_3 kara deliğinden tünelleme olasılıkları hesaplandığında, kuantum kütleçekim etkilerin ihmal edildiği durumdan farklı sonuçlar elde edilmiştir. Denklem (4.75) ve (4.103) karşılaştırıldığında, spin-0 skaler parçacıklarının warped-AdS_3 kara deliğinden tünellemeleri sırasında kuantum kütleçekimsel etkiler nedeniyle oluşturdukları Hawking sıcaklığının azaldığı görülür. Benzer şekilde, spin-1/2 Dirac parçacıklarının warped-AdS_3 kara deliğinden tünellemeleri sırasında kuantum kütleçekimsel etkiler nedeniyle Hawking sıcaklığının azaldığı da Denklem (4.83) ve (4.111) karşılaştırdığında görülebilir. Kuantum kütleçekim etkiler nedeniyle, Hawking sıcaklığının sadece kara deliğin özelliklerine değil, aynı zamanda kuantum mekaniksel olarak tünelleme yapan parçacıkların sahip oldukları kütle, enerji ve açısal momentum gibi özelliklerine de bağlı olduğu görülür. Bunların dışında, kuantum kütleçekim etkilerin hesaba katılması ile tünelleme yapan parçacıkların sahip oldukları spin değerlerinin de Hawking radyasyonuna etki ettiği gözlemlenir.

Tezin ikinci kısmında, yeni kütleli gravitasyon kuramı çerçevesinde, gravitasyon alan eylem fonksiyonu ile sırasıyla skaler alan, fermiyonik alan ve vektör alan eylem fonksiyonları minimal bir şekilde çiftlenim edilerek, bu alanların kozmik etkileri araştırıldı. Skaler alanın varlığında kara delik çözümleri incelenmiş ve literatürde yer alan yeni-tip kara delik benzeri çözümlere ulaşılmıştır.

Kozmolojik açıdan ise, yeni kütleli gravitasyon kuramı çerçevesinde, ayrı ayrı çiftlenim edilen, skaler alanının, fermiyonik alanın ve vektör alanının varlığında benzer çözümler elde edilmiştir. Bu çözümlerden biri literatürdeki çalışmalarla uyumlu olan de Sitter uzay-zamanı, diğeri ise yeni kütleli gravitasyon kuramı çerçevesinde yeni bir çözüm olan salınımlı evren (oscillating universe) çözümüdür.

Elde edilen bu kozmolojik çözümler kullanılarak, gravitonun kütlesi ve dalga boyu için bir sınırlama getirilebilir. $\Lambda>0$ koşulu ile elde edilen ve evrenin genişlemesini betimleyen

$$a\left(t\right)=e^{K(t-t_0)}$$

de Sitter çözümünü ele alalım. Burada $K^2=2m^2\pm 2m\sqrt{m^2-\Lambda}$ veya

$$K=m\sqrt{2-2\sqrt{1-\frac{\Lambda}{m^2}}}$$

şeklinde yazılabilir. Yeni kütleli gravitasyon kuramı $m^2\to\pm\infty$ limitinde standart Einstein kuramına indirgenmektedir. Dolayısıyla, bu limit değerinde de Sitter çözümü de,

$$\lim_{m^2\to\pm\infty} a(t)=\lim_{m^2\to\pm\infty} e^{(t-t_0)m\sqrt{2-2\sqrt{1-\frac{\Lambda}{m^2}}}}\to 1$$

şeklinde statik Minkowski evren çözümüne veya

$$\lim_{m^2\to\pm\infty} a(t)=\lim_{m^2\to\pm\infty} e^{(t-t_0)m\sqrt{2+2\sqrt{1-\frac{\Lambda}{m^2}}}}\to e^{2m(t-t_0)}$$

şeklinde yine de Sitter tipi bir çözüme indirgenir. Bu çözüme dayanarak, $e^{2mt}\propto e^{2H_0t}$ ve dolayısıyla, $m\propto H_0$ alınabilir. Burada H_0 Hubble sabitidir ve değeri $67,8km/sn/Mpc$. Eğer Hubble sabitini, gravitona eşlik eden de Broglie dalgasının frekansı olarak ele alırsak, yani, $H_0{=}f_{graviton}=21,94.10^{-19}sn^{-1}$ olarak alırsak, enerji bağıntısından gravitonun kütlesi için bir değer elde edilir. h Planck sabiti ve c ışık hızı olmak üzere enerji bağıntısı

$$E=hf_{graviton}=mc^2$$

ise gravitonun kütlesi için,

$$m=16,15.10^{-69}kg$$

şeklinde bir değer bulunur. Bu değer literatürdeki limit değerlerle uyuşmaktadır (Alves vd 2011, Beringer vd 2012, Finn ve Sutton 2002, Visser 1998). Öte yandan, gravitona eşlik eden dalganın de Broglie dalga boyu ise,

$$\lambda_{graviton} = \frac{h}{m_{graviton} c}$$

formülünden

$$\lambda_{graviton} = 0,136.10^{27} m = 4400 Mpc$$

bulunur. Bulunan bu değer literatürde var olan limit değerler içindedir (Alves vd 2011, Beringer vd 2012, Finn ve Sutton 2002, Visser 1998).

6. SONUÇ

Kuramsal fiziğin en büyük hayali doğadaki dört etkileşmeyi açıklayan tek bir kuramı, yani kuantum kütleçekim kuramını oluşturmaktır. Ciddi kuantum kütleçekim kuramı adayları oluşturulmasına rağmen, hala kütleçekimin kuantizasyonundan ne anladığımız ve bunun sonuçlarından beklentilerimiz hakkında ciddi problemlerimiz var. Fakat, kuantum kütleçekimi hakkındaki düşüncelerimizi test edebileceğimiz bir ortam var; kara delikler. Kara delikler, Hawking'in kuantum mekaniği kurallarını kullanarak termal ışıma yapabildiklerini göstermesiyle birlikte kuantum gravitasyon kuramları üzerinde çalışanların fikirlerini test edebilecekleri kozmik bir laboratuvara dönüştü.

Tezin ilk bölümünde, 2+1 boyutlu kara deliklerin ısısal radyasyonları, kuantum mekaniksel olarak relativistik spinli ve spinsiz parçacıkların tünellemeleri yöntemi kullanılarak incelenmiş ve 2+1 boyutlu kara deliklerin de, analog oldukları 3+1 boyutlu kara delikler gibi, fiziksel niceliklere sahip olabilecekleri görüldü. Bu bölümde ayrıca, parçacıkların noktasal değil cisimsi (extended) yapılar oldukları fikrine dayanan modifiye relativistik dalga denklemleri kullanılarak kuantum kütleçekim etkilerin, kara delikten tünelleme yapan parçacığın spin özelliklerinin Hawking ışıması üzerindeki etkilerini/katkılarını ortaya çıkardığı görüldü.

Tezin ikinci bölümünde, 3+1 boyutlu boyutlu gravitasyon kuramlarının çözümleri olan bazı evren modellerinin (de Sitter ve salınım yapan evren modelleri) 2+1 boyutlu yeni kütleli gravitasyon kuramı kapsamında, farklı spin durumlarına sahip alanların gravitasyon ile çiftleniminden elde edilebileceği görülmüştür. Elde edilen çözümler kullanılarak, standart parçacık modelinin ön gördüğü kütleçekimin aracı parçacığı olan gravitonun kütle ve dalga boyu için literatürdeki verilerle uyumlu değerler bulundu.

Bu sonuçlar doğrultusunda, 2+1 boyutlu gravitasyon kuramlarının, 3+1 boyutlu gravitasyon kuramları ile benzer matematiksel ve fiziksel sonuçlara sahip olduğu gerçeği doğar. 2+1 boyutlu kuramlar kapsamında yapılan bu ve benzeri çalışmaların, 3+1 boyutlu kuramlarda incelenmesi zor bazı problemlerin, 2+1 boyutta incelenmesi konusunda aydınlatıcı rol oynayacaklarını umuyoruz.

7. KAYNAKLAR

ACCIOLY, A., NETO, H.J., SCATENA, E., MORAIS, J., TURCATI, R. and DIAS, B.P. 2011. Some interesting features of new massive gravity. *Class. Quantum Grav.*, 28: 225008.

AHMEDOV, H. and ALIEV, A.N. 2011. Exact solutions in 3D new massive gravity. *Phys. Rev. Let.*, 106: 021301.

ALVES, M.E.S., MIRANDA, O.D. and De ARAUJO, J.C.N. 2011. Can massive gravitons be an alternative to dark energy. *Phys. Lett. B*, 700: 283-288.

AMATI, D., CIAFALONI, M. and VENEZIANO, G. 1989. Can spacetime be probed below the string size? *Phys. Lett. B*, 216: 41.

ASCHIERI, P., DIMITRIJEVIC, M., KULISH, P., LIZZI, F. and WESS, J. 2009. Noncommutative Spacetimes: Symmetries in Noncommutative Geometry and Field Theory. Springer, Berlin, 199 p.

BAKAS, I. and SOURDIS, C. 2011. Homogeneous vacua of (generalized) new massive gravity. *Class. Quantum Grav.*, 28: 015012.

BANADOS, M., TEITELBOIM, C. and ZANELLI, J. 1992. The black hole in three-dimensional spacetime. *Phys. Rev. Let.*, 69: 1849.

BANADOS, M., HENNEAUX, M., TEITELBOIM, C. and ZANELLI, J. 1993. Geometry of the 2+1 black hole. *Phys. Rev. D*, 48: 1506.

BARDEEN, J.M., CARTER, B. and HAWKING, S.W. 1973. The four laws of black hole mechanics. *Commun. Math. Phys.* 31: 161-170.

BARROW, J.D., BURD, A.B. and LANCASTER, C. 1986. Three-dimensional classical spacetimes. *Class. Quantum Grav.*, 3: 551.

BARUT, A.O. and DURU, I.H. 1987. Exact solution of Dirac equation in spatially flat FRW spacetime. *Phys. Rev. D*, 36: 3705.

BEKENSTEIN, J.D. 1973. Black holes and entropy. *Phys. Rev. D*, 7: 2333-2346.

BERGSHOEFF, E.A., HOHM, O. and TOWNSEND, P.K. 2009a. Massive gravity in three dimensions. *Phys. Rev. Let.*, 102: 201301.

BERGSHOEFF, E.A., HOHM, O. and TOWNSEND, P.K. 2009b. More on massive 3D gravity. *Phys. Rev. D*, 79: 124042.

BERINGER, J. et al. 2012. Review of particle physics (Particle Data Group). *Phys. Rev. D*, 86: 010001.

BIRREL, N.D. and DAVIES, P.C.W. 1982. Quantum Fields in Curved Space. Cambridge Univ. Pres., 340p.

BLUMAN, G.W. and KUMAI, S. 1989. Symmetries and Differential Equations. Springer-Verlag, New York, 412 p.

BOUCHAREB, A. and CLEMENT, G. 2007. Black hole mass and angular momentum in topologically massive gravity. *Class. Quantum Grav.*, 24: 5581.

BOULWARE, D., STROMINGER, A. and TOMBOULIS, E.T. 1984. Quantization of higher derivative theories of gravity. In: S. Christensen (Editor), Quantum Theory of Gravity, Adam Hilger Ltd., pp.267-294, Bristol.

BRILL, D. 2000. Black holes and wormholes in 2+1 dimensions. In: S. Cotsakis G.W. Gibbons (Editors), Mathematical and Quantum Aspects of Relativity and Cosmology, Springer, pp. 143-179, Berlin.

BRILL, D.R. and WHEELER, J.A. 1957. Interaction of neutrinos and gravitational fields. *Rev. Mod. Phys.*, 29: 465.

CAMPBELL, W.B. Angular momentum loss by gravitational radiation. *Phys. Rev. D*, 2: 2123.

CAMPOS, A. and VERDAGUER, E. 1992. Production of spin-1/2 particles in inhomogeneous cosmologies. *Phy. Rev. D*, 45: 4428.

CAPOZZIELLO, S., De RITIS, R., RUBANO, C. and SCUDELLARO, P. 1996. Nöther symmetries in cosmology. *Riv.Nuovo Cim.*, 19 (4): 1.

CARAZZA, B. and KRAGH, H. 1995. Heisenberg's lattice word: The 1930 theory sketch. *Am. J. Phys.*, 63: 7.

CARLIP, S. 2004. Black hole thermodynamics. *Int. J. Mod. Phys. D*, 23 (11): 1430023.

CARLIP, S. 2005a. Quantum gravity in (2+1) dimensions; the case of a closed universe. *Living Rev. Relativity*, 8.

CARLIP, S. 2005b. Conformal field theory, (2+1)-dimensional gravity and the BTZ black hole. *Class. Quantum Grav.*, 22: 85-123.

CHAN, K.C.K. and MANN, R.B. 1994. Static charged black holes in 2+1-dimensional dilaton gravity. *Phys. Rev. D.*, 50: 6385.

CHANDRASEKHAR, S. 1970. Solutions of two problems in the theory of gravitational radiation. *Phys. Rev. Lett.*, 24: 611.

CHANDRASEKHAR, S. ve DETWEILER, S. 1975. The quasi-normal modes of the Schwarzschild black hole. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 344: 441-452.

CHEN, B. and NING, B. 2010. Self-dual warped AdS3 black holes. *Phy. Rev. D*, 82: 124027.

CHEN, D., WU, H. and YANG, H. 2013a. Fermion's tunnelling with effects of quantum gravity. *Advances in High Energy Phys.*, 2013 (432412): 1-6.

CHEN, D., WU, H., YANG, H. and YANG, S. 2014a. Effects of guantum gravity on black holes. *Int. J. Modern Phys. A*, 29 (26): 1430054.

CHEN, D., WU, H. and YANG, H. 2014b. Observing remnants by fermions' tunneling. *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, 03: 036.

CHEN, D., JIANG, Q.Q., WANG, P. and YANG, H. 2013b. Remnants, fermions' tunnelling and effects of quantum gravity. *J. High Energy Phys.*, 11: 176.

CHRISTODOULAKIS, T. and PAPADOPOULOS, C.G. 1988. Quantization of Robertson Walker geometry coupled to spin 3/2 field. *Phys. Rev. D*, 38: 1063.

CLEMENT, G. 1994. Particle-like solutions to topologically massive gravity. *Class. Quantum Grav.*, 11: L115.

CLEMENT, G. 2009. Warped AdS3 black holes in new massive gravity. *Class. Quantum Grav.*, 26: 105015.

CONNES, A. and MARCOLLI, M. 2008. Noncommutative Geometry, Quantum Fields and Motives. American Mathematical Society, Hindustan Book Agency, 704 p.

DAVIES, P.C.W. 1975. Scalar particle production in Schwarzschild and Rindler metrics. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 8: 609.

De RITIS, R., MARMO, G., PLATANIA, G., RUBANO, C., SCUDELLARO, P. and STORNAIOLO, C. 1990. New approach to find exact solutions for cosmological models with a scalar field. *Phys. Rev. D*, 42: 1091.

De SOUZA, R.C. and KREMER, G.M. 2011. Cosmic expansion from boson and fermion fields. *Class. Quantum Grav.*, 28: 125006.

Del CASTILLO, G.F.T. and ORTIGOZA, G.S. 1990. Rarita-Schwinger fields in the Kerr geometry. *Phys. Rev. D*, 42: 4082.

DERNEK, M. 2009. Yüksek Spinli Parçacıklar için Yeni Göreli Bir Denklem Önerilmesi. Doktora Tezi, Akdeniz Üniversitesi.

DERNEK, M., SUCU, Y. and UNAL, N. 2015. 2+1 dimensional relativistic quantum mechanical spin-1 wave equation. *Acta Polonica*, under review.

DESER, S. and JACKIW, R. 1984. Three-dimensional cosmological gravity. *Ann. Phys.*, 153: 405-416.

DESER, S., JACKIW, R. and 'tHooft G. 1984. Three-dimensional Einstein gravity; dynamics of flat space. *Ann. Phys.*, 152: 220-235.

DESER, S., JACKIW, R. and TEMPLETON, S. 1982. Three-dimensional massive gauge theories. *Phys. Rev. Let.*, 48: 975.

DESER, S. and YANG, Z. 1990. Is topologically massive gravity renormalizable. *Class. Quantum Grav.*, 7: 1603.

DIRAC, P.A.M. 1928a. The quantum theory of the electron. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 117: 610-624.

DIRAC, P.A.M. 1928b. The quantum theory of the electron, Part-II. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 118: 351-361.

FERNANDO, S. and CORREA, J. 2012. Quasinormal modes of the Bardeen black hole: scalar perturbations. *Phys. Rev. D*, 86: 064039.

FINN,L.S. and SUTTON, P.J. 2002. Bounding the mass of the graviton using binary pulsar observations. *Phys. Rev. D*, 65: 044022.

FOCK, W. 1929. Geometrisierung der diracschen theorie des elektrons. *Z. Phys.*, 57: 261.

FRIEDMAN, J.L. and SCHUTZ, B.F. Secular instability of rotating Newtonian stars. *Astrophys. J.*, 222: 281.

GABADADZE, G., GIRIBET, G. and Iglesias, A. 2012. New massive gravity on de Sitter Space and black holes at the special point, arXiv:1212.6279v1 [hep-th].

GAMBINI, R. and PULLIN, J. 2011. A First Course in Loop Quantum Gravity. Oxford University Press., New York, 183 p.

GEÇİM, G. and SUCU, Y. 2013. Tunnelling of relativistic particles from new type black hole in new massive gravity. *J. Cosmol. Astropart. Phys*, 02: 023.

GEÇİM, G. and SUCU, Y. 2014. Hawking radiation of topological massive warped-AdS3 black holes via particles tunnelling. arXiv:1406.0290v1 [gr-qc].

GEÇİM, G. and SUCU, Y. 2015a. Dirac and scalar particles tunnelling from topological massive warped-AdS3 black hole. *Astrophys. Space Sci.*, 357: 105.

GEÇİM, G., KÜÇÜKAKÇA, Y. and SUCU, Y. 2015b. Noether gauge symmetry of Dirac field in (2+1)-dimensional gravity. *Advan. in High Energy Phys.*, 2015 (567395): 1-7.

GIBBONS, G.W. 1976. A note on the Rarita-Schwinger equation in a gravitational background. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 9: 145.

GIDDINGS, S., ABBOTT, J. and KUCHAR, K. 1984. Einstein theory in a three dimensional spacetime. *Gen. Rel. Grav.*, 16: 751.

GIRIBET, G., OLIVA, J., TEMPO, D. and TRONCOSO, R. 2009. Microscopic entropy of the three-dimensional rotating black hole of Bergshoeff-Hohm-Townsend massive gravity. *Phys. Rev. D*, 80: 124046.

GOLDSTEIN, H. 1980. Classical Mechanics. Addison-Wesley Publishing Company, New York, 672 p.

GREIF, J.M. 1969. Junior thesis, unpublished, Princeton University.

GREINER, W. 2000. Relativistic Quantum Mechanics. Springer Pub., 3.Ed., Berlin, 424 p.

GÜRTAŞ, S. 2012. Spin-1 ve Spin-1/2 Relativistik Parçacıklarının Çeşitli Potansiyeller için (2+1) Boyutta Kuantum Mekaniksel Davranışlarının İncelenmesi. Yüksek Lisans Tezi, Akdeniz Üniversitesi.

HARRIOTT, T.A. and WILLIAMS, J.G. 2001. Solution of Klein-Gordon equation in (2+1) curved spacetime. *Modern Phy. Lett. A*, 16: 1151-1156.

HARTLE, J.B. and HAWKING, S.W. 1976. Path-integral derivation of black-hole radiance. *Phys. Rev. D*, 13: 2188.

HAWKING, S.W. 1972. Black holes in general relativity. *Commun. Math. Phys.*, 25: 152-166.

HAWKING, S.W. 1974. Black hole explosions. *Nature*, 248: 30-31.

HAWKING, S.W. 1975. Particle creation by black holes. *Commun. Math. Phys.*, 43: 199-220.

HORTACSU, M. 2013. Heun functions and their uses in physics. arXiv:1101.0471v5 [gr-qc].

HOSSENFELDER, S., BLEICHER, M., HOFMANN, S., RUPPERT, J., SCHERER, S. and STOCKER, H. 2003. Signatures in the Planck regime. *Phys. Lett. B*, 575: 85-99.

HOSSENFELDER, S. 2006. A note on theories with a minimal length. *Class. Quantum Grav.*, 23: 1815.

HOSSENFELDER, S. 2013. Minimal length scale scenarios for quantum gravity. *Living Rev. Relativity*, 16: 2.

HUSAIN, V. 1994. Radiation collapse and gravitational waves in three dimension. *Phys. Rev. D*, 50: R2361.

KEMPF, A., MAGNANO, G. and MANN, R.B. 1995. Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation. *Phys. Rev. D*, 52: 1108.

KERNER, R. and MANN, R.B. 2008. Fermions tunnelling from black holes. *Class. Quantum Grav.*, 25: 095014.

KESZTHELYI, B. and KLEPPE, G. 1992. Renormalizability of D=3 topologically massive gravity. *Phys. Lett. B*, 281: 33.

KIEFER, C. 2007. Quantum Gravity. Oxford University Press, New York, 374 p.

KONISHI, K., PAFFUTI, G. and PROVERO, P. 1990. Minimum physical length and the generalized uncertainty principle in string theory. *Phys. Lett. B*, 234: 276.

KOSINSKI, S., MASLANKA, P., SLAWINSKA, J. and ZASADA, I. 2012. QED 2+1 in graphene; symmetries of Dirac equation in 2+1dimensions. *Prog. Theor. Phys.*, 128: 727.

KRAUS, P. and WILCZEK, F. 1994. A simple stationary line element for the Schwarzschild geometry and some applications. [gr-qc/9406042].

KWON, Y., NAM, S., PARK, J.D. and YI, S.H. 2011. Quasinormal modes for new type black holes in new massive gravity. *Class. Quantum Grav.*, 28: 145006.

LI, R. and REN, J.R. 2008. Dirac particles tunneling from BTZ black hole. *Phy. Lett. B*, 661: 370.

LI, R., REN, J.R. and SHI,D.F. 2008. Fermions tunneling from apparent horizon of FRW universe. *Phys. Lett. B*, 670: 446-448.

LI, R., REN, J.R. and WEI,S.W. 2008. Hawking radiation of Dirac particles via tunneling from the Kerr black hole. *Class. Quantum Grav.*, 25: 125016.

LI, G. ve ZU, X. 2015. Scalar particles tunneling and effect of quantum gravity. *Journal of Applied Mathematics and Phys.*, 3: 134.

LIU, Z.Y. and REN, J.R. 2014. Fermions tunnelling with quantum gravity correction. *Commun. Theor. Phys.*, 62: 819-823.

LOTZE, K.H. 1986. Production of massive spin-1/2 particles in anisotropic spacetimes. *Class. Quan. Grav.*, 3: 81.

MACIAS, A. and CAMACHO, A. 2005. Kerr-Schild metric in topological massive 2+1 gravity. *Gen. Rel. Grav.*, 37: 759.

MAEDA, H. 2011. Black-hole dynamics in BHT massive gravity. *J. High Energy Phys.*, 02: 039.

MORADI, S. 2008. Creation of scalar and dirac particles in asymptotically flat Robertson-Walker spacetimes. *Int. J. Theor. Phys.*, 47: 2807.

MOUSSA, K.A., CLEMENT, G. and LEYGNAC, C. 2003. The black holes of topologically massive gravity. *Class. Quantum Grav.*, 20: L277-L283.

MU, B., WANG, P. and YANG, H. 2015. Minimal length effects on tunnelling from spherically symmetric black holes. *Advances in High Energy Phys.*, 2015 (898916): 1-8.

MYUNG, Y.S. and MOON, T. 2012. Quasinormal frequencies and thermodynamic quantities for the Lifshitz black holes. *Phys. Rev. D*, 86: 024006.

NAM, S., PARK, J.D. and Yi, S.H. 2010. AdS black hole solutions in the extended new massive gravity. *J. High Energy Phys.*, 07: 058.

NUTKU, Y. Y. 1993. Exact solutions of topologically massive gravity with a cosmological constant. *Class. Quantum Grav.*, 10: 2657.

ODA, I. 2009. Renormalizability of topologically massive gravity. *J.High Energy Phys.* 05: 064.

PARIKH, M. K. and WILCZEK, F. 2000. Hawking radiation as tunnelling. *Phys. Rev. Lett.*, 85: 5042.

PARKER, L. 1968. Particle creation in expending universe. *Phys. Rev. Lett.*, 21: 562.

PARKER, L. 1969. Quantized fields and particle creation in expanding universe-I. *Phys. Rev. D*, 183: 1057.

PARKER, L. 1971. Quantized fields and particle creation in expanding universe-II. *Phys. Rev. D*, 3: 346.

PERLMUTTER, S. et al. 1999. Measurements of omega and lambda from 42 high-redshift supernovae. *The Astronomical Journal*, 517: 565-586.

POISSON, E. 2004. A Relativist's Toolkit; The Mathematics of Black-Hole Mechanics. Cambridge Univ. Press, New York, 233 p.

RAMEZAN, L. and KHORRAMI, M. 2010. Spin-0 and spin-1/2 particles in a spherically symmetric static gravity and a Coulomb field. *Int. J. Theor. Phys.*, 49: 2918.

RIBAS, M.O., DEVECCHI, F.P. and KREMER, G.M. 2005. Fermions as sources of accelerated regimes in cosmology. *Phy. Rev. D*, 72: 123502.

RIES, A.G. et al. 1998. Observational evidence form supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 116: 1009-1038.

RONVEAUX, A. 1995. Heun's Differential Equations. Oxford University Press., New York, 374 p.

ROSS, M. 1997. Introduction to Cosmology. John Wiley and Sons Press., Second Ed., 287 p.

SANYAL, A.K. and MODAK, B. 2002. Quantum cosmology with $R + R^2$ gravity. *Class. Quantum Grav.*, 19: 515-525.

SHANKARANARAYANAN,S., SRINIVASAN, K. and PADMANABHAN, T. 2001. Method of complex paths and general covariance of Hawking radiation. *Mod. Phys. Lett. A*, 16: 571-578.

SUCU, Y. and ÜNAL, N. 2002. Solution of massless spin one wave equation in Robertson-Walker space-time. *Int. J. Modern Phys. A*, 17: 1137-1147.

SUCU, Y. and ÜNAL, N. 2004. Dirac equation in Euclidean Newman-Penrose formalism with applications to instanton metrics. *Class. Quantum Grav.*, 21: 1443-1451.

SUCU, Y. and ÜNAL, N. 2007. Exact solution of Dirac equation in 2+1 dimensional gravity. *Journal of Math. Phys.*, 48: 052503.

SUCU, Y. and ÜNAL, N. 2005. Vector bosons in the expanding universe. *Eur. Phys. J. C*, 44: 287-291.

SUCU, Y. and ÜNAL, N. 2012. Symmetry and integrability in the classical model of zitterbewegung. *Foundations of Physics*, 42 (8): 1067-1077.

SRINIVASAN, K. and PADMANABHAN, T. 1999. Particle production and complex path analysis. *Phys. Rev. D*, 60: 024007.

STARUSKIEWICZ, A. 1963. Gravitation theory in three-dimensional space. *Acta Phys. Pol.*, 6: 734.

STEPHANI, H. 1989. Differential Equations; Their Solutions Using Symmetries. Cambridge Univ. Press, New York, 269 p.

SZERESZEWSKI, A. and TAFEL, J. 2002. Solutions of the Rarita-Schwinger equation in Einstein spaces. *Phys. Lett. A*, 297: 359.

TETRODE, H. 1928. Allgemein-relativistische quantentheorie des elektrons. *Z. Phys.*, 50: 336.

TOWNSEND, P.K. 1977. Small-scale structure of spacetime as the origin of the gravitational constant. *Phys. Rev. D*, 15: 2795.

ÜNAL, N. 1997. Kernel of the classical zitterbewegung. *Foundations of Physics*, 27 (5): 747-758.

VILLABA, V. and GREINER, W. 2001. Creation of Dirac and scalar particles in the presence of a time varying electric field in an anisotropic Bianchi-I universe. *Phys. Rev. D*, 65: 025007.

VILLALBA, V.M. 1995. Creation of spin 1/2 particles by an electric field in de Sitter space. *Phys. Rev. D*, 52(6): 3742.

VILLALBA, V.M. Creation of scalar particles in the presence of a constant electric field in anisotropic cosmological universe. *Phys. Rev. D*, 60: 127501.

VISSER, M. 1998. Mass for the graviton. *General Relativity and Gravitation*, 30: 12.

VOLOVIK, G.E. Exotic Properties of Superfluid 3He. World Scientific, Singapore, 232 p.

WITTEN, E. 2+1 dimensional gravity as an exactly soluble system. *Nucl. Phys. B*, 311: 46.

WITTEN, E. Quantum field theory and the Jones polynomial. *Commun. Math. Phys.*, 121: 351.

XIONG, Z.X. and QIANG, L. 2009. On particles tunneling from the Taub-NUT-AdS black hole. *Chinese Phy. B*, 18: 1674.

YALE, A. 2011. Exact Hawking radiation of scalars, fermions, and bosons using the tunneling method without back-reaction. *Phys. Lett. B*, 697: 398-403.

YALE, A. and MANN, R.B. 2009. Gravitinos tunneling from black holes. *Phy. Lett. B*, 673: 168.

ZECCA, A. 1997. Scalar field equation in Robertson-Walker spacetime. *Int. J. Theoretical Phy.*, 36: 1387.

ZWIEBACH, B. 2009. A First Course in String Theory. Cambridge University Press., New York, 673 p.

ÖZGEÇMİŞ

1978 Hatay/Antakya doğumluyum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Antakya iline bağlı Serinyol beldesinde tamamladım. 1998 yılında katıldığım ÖSS-ÖYS sonucunda Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik bölümünü kazandım. 2002 yılında bölümden mezun oldum. 2002-2003 eğitim öğretim yılında Çukurova üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı yüksek lisans giriş sınavını kazanarak bir yıl ingilizce hazırlık okudum.

2004-2006 yılları arasında Mustafa Kemal Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimini tamamladım. 2007-2009 yılları arasında Çanakkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı'nda Doktora öğrenimi gördüm. 2009 yılında ise Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı'nda Doktoraya başladım. 2010 yılından beri aynı Enstitü'de Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktayım.

BİLİMSEL FAALİYETLER:

Katıldığım Ulusal/Uluslararası Toplantılar:

1- Alternative Solutions in Astrophysics-II, 10-14 September 2007, ÇOMU Terzioğlu Campus, Physics Depertman, Çanakkale.

2- Yüksek Enerji Astrofiziği Lisansüstü Yaz Okulu, 4-13 Ağustos 2008, Boğaziçi Üniversitesi, Fizik Bölümü, İstanbul.

3- International Workshop on Observational Cosmology, 16-18 October 2009, TUBİTAK National Observatory, Saklıkent/ Antalya.

4- 7th International Balkan School on Nuclear Physics; 15-22 September 2010, Antalya.

5- 13th Regional Conference on Mathematical Physics; 27-31 October 2010, Antalya.

6- Turkish Physical Society 31th International Physical Congress, 21-24 July 2014, Bodrum.

Yayınlar-SCI:

1- Geçim, G. ve Sucu, Y., Tunnelling of relativistic particles from new type black hole in new massive gravity, JCAP, 02, 023, (2013).

2- Geçim, G. ve Sucu, Y., Dirac and scalar particles tunnelling from topological massive warped-AdS3 black hole, Astrophys. Space Sci., 357, 105, (2015).

3- Geçim, G., Küçükakça, Y. ve Sucu, Y., Noether Gauge Symmetry of Dirac Field in (2+1)-Dimensional Gravity, Advan. in High Energy Phys., Vol. 2015, Article ID 567395, (2015).