T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KÜBİK THETA FONKSİYONLARINDA BAZI ÖZDEŞLİKLER ÜZERİNE

Didem AYKUT ŞAHİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2013

KÜBİK THETA FONKSİYONLARINDA BAZI ÖZDEŞLİKLER ÜZERİNE

Didem AYKUT ŞAHİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2013

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KÜBİK THETA FONKSİYONLARINDA BAZI ÖZDEŞLİKLER ÜZERİNE

Didem AYKUT ŞAHİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez ... / ... / 2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği / Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Veli KURT ....

Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK ....

Yrd. Doç. Dr.Şerafettin YALTKAYA ....

ÖZET

KÜBİK THETA FONKSİYONLARINDA BAZI ÖZDEŞLİKLER ÜZERİNE

Didem AYKUT ŞAHİN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Veli KURT

Ekim 2013, 27 Sayfa

Bu çalışmada ilk olarak Weierstrass $\wp(z|2\Omega)$ fonksiyonunun temel özellikleri incelenmiş ve sağladığı teoremler verilmiştir. Sonra Jacobi Theta fonksiyonları verilip gerçeklediği bağıntılar ispatlanmıştır. Theta fonksiyonları yardımıyla Jacobi $sn(z,k)$, $cn(z,k)$ ve $dn(z,k)$ fonksiyonları incelenmiştir.

Bulgular bölümünde $\theta_i(z|\tau)$ $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ fonksiyonlarının sonlu toplamları ve bunlarla ilgili bazı özdeşlikler incelenmiştir. $a(y_1, y_2|\tau)$ kübik fonksiyonlarında iki teorem ve iki sonuç ispatlanmıştır.

ANAHTAR KELİMELER : Ω periyot latisi, Weierstrass $\wp(z)$ fonksiyonu,
Theta fonksiyonları, Jacobi fonksiyonları,
Kübik theta fonksiyonları

JÜRİ : Prof. Dr. Veli KURT (Danışman)
Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK
Yrd. Doç. Dr. Şerafettin YALTKAYA

ABSTRACT

SOME IDENTITIES ON THE CUBIC THETA FONCTIONS

Didem AYKUT ŞAHİN

MSc Thesis in Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Veli KURT

October 2013, 27 pages

In this study, firstly, the Weierstrass function $\wp(z|2\Omega)$ is studied and also some theorems related to the Weierstrass function $\wp(z|2\Omega)$ is given. The Jacobi theta functions $\theta_i(z|\tau)$ are given. By using these functions, Jacobi theta functions $sn(z,k)$, $cn(z,k)$ ve $dn(z,k)$ is investigated.

Finally, the finite summation formulas for the functions $\theta_i(z|\tau)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ and some identities are proved. Two teorems and two corollary for the cubic theta functions $a(y_1, y_2|\tau)$ is proved.

KEYWORDS : Ω period lattice, Weierstrass $\wp(z)$ function,
Theta functions, Jacobi functions,
Kübic theta functions

COMMITTEE : Prof. Dr. Veli KURT (Supervisor)
Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK
Asst. Prof. Dr. Şerafettin YALTKAYA

ÖNSÖZ

Bu tez esas olarak üç kısımdan oluşmuştur. Giriş bölümünde eliptik fonksiyonları konusu hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde eliptik fonksiyonların temel bilgileri, Weierstrass $\wp(z)$ fonksiyonu, sonra klasik theta fonksiyonları yardımıyla Jakobi snz, cnz, dnz fonksiyonları tanımlanmış ve bunların gerçekledikleri teoremler verilmiştir.

Bulgular bölümünde Theta Fonksiyonlarının gerçeklediği sonlu toplamlarla, Kübik theta fonksiyonları incelenerek teoremler ve sonuçlar ispatlanmıştır.

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Eliptik fonksiyonlar kavramı, eliptik integraller dönüşümünden elde edilen fonksiyonlardır. Esas olarak üç tipi olan eliptik integral bir elipsin yay uzunluğunu bulma probleminden çıkmıştır (Dutta 1965). Eliptik integral yardımıyla Eliptik Fonksiyonlar hakkında önemli çalışma yapan matematikçilerden biri Jakobi' dir. Çalışmaları 1920' de 6 cilt halinde yayınlanmıştır. 19. yy ' ın ve 20. yy 'ın ilk yarısında bazı matematikçiler (Jakobi, Weierstrass, Hancock, Cayley, Gaus, Leipnitz) oldukça yoğun çalışmalar yapmışlardır. Çalışmalar makale ve kitap olarak yayınlanmıştır. Hintli matematikçi 1920' li yıllarda hayatının son zamanlarında Ramanujuan theta fonksiyonlarını ve Moch theta fonksiyonlarını tanımlayarak bazı özelliklerini ispatlamıştır. Zamanımızda Ramajuan theta fonksiyonları üzerinde matematikçiler tarafından çalışılmaktadır. Bu konuda Bernt, Bernt ve arkadaşları 4 ciltlik kitap yazarak yayınlamışlardır. Hollanda da bir grup, Yeni Zelanda da başka bir grup konu hakkında çalışmalarına devam etmektedirler (Duval 1965). Eliptik fonksiyonları, Jakobi fonksiyonları, Jakobi-Glaisher fonksiyonlarını cebirsel yönden (coset) tanımlayarak yeni bir kavram vermiştir. Adı geçen fonksiyonların değerlerini kare, dikdörtgen, rombik, eşkenar dörtgen latislerinde incelenmiştir. Kübik, karesel dönüşümleri vermiştir.

Biz, bu çalışmamız boyunca Jakobi gösterimlerini kullanacağız.

2. ÖNBİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Latis

Tanım 2.1.1 $\mathbb{C}$ karmaşık sayıları cisminin her toplamsal bir altgrubu, $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası üzerinde bir modüldür. Sonlu düzlemde yığılma noktaları olmayan bir modüle **latis** denir.

Sıfırdan farklı her bir yığılma noktası olan her modül için 0' da bir yığılma noktasıdır (Duval 1965). O halde bir Ω latisi için sıfır yığılma noktası değildir. Bu nedenle sıfırdan farklı elemanların mutlak değerce alttan sınırlı olan, toplamaya göre her değişmeli grup bir latis tanımlar.

Latisler 0, 1 ve 2 boyutlu olmak üzere üç sınıfa ayrılır.
$\mathrm{L}_0 = \{0\}$, $0-$boyutlu en basit latis,

$$L = \{mw : w \neq 0, m\ \epsilon\mathbb{Z}\}$$

1-boyutlu latis,

$$\Omega = \{mw_1 + nw_2 : m, n\epsilon\mathbb{Z} w_1, w_2\epsilon\mathbb{C},\ \frac{w_1}{w_2} \notin \mathbb{R}\}$$

2-boyutlu latistir.

w_1, w_2 doğrusal bağımsız iki karmaşık sayıdır ve $(w_1,\ w_2)$ ikilisine Ω' nın bir bazı denir. a, b, c, $d\ \epsilon\mathbb{Z}$ olmak üzere $ad - bc = \pm 1$ ise $(w_1,\ w_2)$ ve $(w_1^{'},\ w_2^{'})$ Ω' nın denk birer bazıdır. $\mathrm{Im}\left(\frac{w_1}{w_2}\right) > 0$ ise $\mathrm{Im}\left(\frac{w_1^{'}}{w_2^{'}}\right) > 0$ olması için $ad - bc = 1$ olmalıdır (Dutta 1965).

Ω bir latis olmak üzere $u - u_0 \in \Omega$ ise u ve u_0 karmaşık sayıları Ω modülüne göre denktir ve $u \equiv u_0 \pmod{\Omega}$ olarak yazılır. Her $a \in \mathbb{C}$ için

$$a + \Omega = \{w \in \Omega : a + w\}$$

kümesi a' ya denk olan bütün noktaların kalan sınıfıdır. Her kalan sınıfına ait yalnız bir noktayı içine alan basit bağımlı bir bölgeye Ω' nın temel bölgesi denir. $\Omega = L_0$ ise her kalan sınıfı yalnız bir u değerini içine aldığından temel bölge bütün düzlemdir. $\Omega = L$ ise temel bölge paralel iki doğru ile sınırlanan sonsuz bir şerittir. İki boyutlu Ω latisi için bir temel bölge bir çok şekilde seçilebilir.

$$H = \{pw_1 + qw_2 : 0 \leq p, q < 1\}$$

temel periyot paralelkenarıdır.

2.2. Eliptik Fonksiyonlara Ait Temel Teoremler

Sabit olmayan periyodik bir fonksiyonun periyotları bir latis oluşturmaktadır (Duval 1965). Periyot latisi $2-$boyutlu olan fonksiyona çifte periyodik, çifte periyodik ve meromorf bir fonksiyona da eliptiktir denir. Periyot latisinin herhangi bir temel bölgesine periyot paralelkenarı adı verilir.

$$H = \{pw_1 + qw_2 : 0 \leq p, q < 1\}$$

bölgesi esas periyot paralelkenarıdır.

Bir eliptik fonksiyonunun herhangi bir periyot paralelkenarında belli sayıda kutbu vardır. Kutupları sayısının toplamına fonksiyonun mertebesi denir. Aşağıda ispatsız olarak verilen teoremlerden bir eliptik fonksiyonun en az ikinci mertebeden olduğu görülür (Dutta1965, Wittaker 1954).

Teorem 2.2.1 (Liouville) Çifte periyodik her tam fonksiyon sabittir.

Teorem 2.2.2 Periyot latisi Ω olan bir eliptik fonksiyonu için $a_1 + \Omega, ..., a_k + \Omega$ kalan sınıfları, m_1, $m_2, ..., m_k$ katlı birer sıfır yeri; $b_1 + \Omega$, ..., $b_k + \Omega$ kalan sınıfları n_1, $n_2, ..., n_k$ katlı birer kutup noktası ve bu kutuplardaki kalıntıları $A_1, A_2, ..., A_k$ ise

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = 0$$

$$\sum m_k = \sum n_k$$

ve

$$\sum m_k a_k - \sum n_k b_k \equiv 0 (\operatorname{mod} \Omega)$$

bağıntıları vardır.

Teorem 2.2.3 Periyot latisleri ortak olan iki eliptik fonksiyonun kutupları ve sıfırları, katlılıkları ile birlikte aynı ise bu iki fonksiyonun oranı sıfırdan farklı sabittir.

Teorem 2.2.4 Periyot latisleri ortak olan iki eliptik fonksiyonun kutupları ve her kutup için esas kısımları aynı ise bu iki fonksiyonun farkı sabittir.

2.3. Weierstrass $\wp(z|2\Omega)$ Fonksiyonu

Tanım 2.3.1 : (Dutta 1965, Wittaker 1954) Weierstrass $\wp(z)$ fonksiyonu

$$\wp(z) = \wp(z, \Omega_{mn}) = \frac{1}{z^2} + \sum \sum_{m,n \in \mathbb{Z}}' \left\{ \frac{1}{[z - (m2w_1 + n2w_2)]^2} - \frac{1}{(m2w_1 + n2w_2)^2} \right\} \tag{2.1}$$

$$= \frac{1}{z^2} + \sum \sum' \left\{ \frac{1}{(z - \Omega_{mn})^2} - \frac{1}{(\Omega_{mn})^2} \right\}$$

ifadeleri ile verilir. m, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere " ' " m ve n aynı anda sıfır olamazdır.

$$\Omega_{mn} \neq 0 \text{ ve } \Omega_{mn} = m2w_1 + n2w_2 \equiv 0 \bmod(2w_1, 2w_2)$$

dir.

Weierstrass $\wp(z)$ fonksiyonu 2. mertebeden $(2w_1, 2w_2)$ ile çifte periyodik, -2. dereceden homojen bir fonksiyondur. $\wp(z)$ çifte periyodik ve meromorf olduğundan eliptik bir fonksiyondur.

$\wp(z)$ fonksiyonun w_1, w_2, w_3 yarı-periyot değerlerinde aldığı değerler sırasıyla e_1, e_2, e_3 ile gösterilip $\wp(w_1) = e_1$, $\wp(w_2) = e_2$, $\wp(w_3) = e_3$ yazılır. Burada $w_1+w_2+w_3 = 0 \bmod(2w_1, 2w_2)$' dir. Aşağıdaki teoremler Weierstrass $\wp(z)$ fonksiyonunun sağladığı temel teoremlerdir (Dutta vd 1965).

Teorem 2.3.2 $\wp(z)$ fonksiyonunun z=0' ın komşuluğunda

$$\wp(z|\Omega_{mn}) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} z^{2k}$$

eşitliği ile ifade edilebilir. Burada

$$a_{2k} = (2k+1) \sum \sum_{m,n \in \mathbb{Z}}{}' \, \Omega_{mn}^{-(2k+2)}$$

dır.

İspat: (2.1)' den

$$\begin{aligned}
\wp(z) - \frac{1}{z^2} &= \sum {\sum}' \left\{ \frac{1}{[z-(m2w_1+n2w_2)]^2} - \frac{1}{(m2w_1+n2w_2)^2} \right\} \\
&= \sum {\sum}' \left\{ \frac{1}{[\Omega_{mn}^2 - (1-\frac{z}{\Omega_{mn}^2})^2} - \frac{1}{\Omega_{mn}^2} \right\} \\
&= \sum {\sum}' \left\{ \frac{1}{\Omega_{mn}^2} \left(1 + \frac{2z}{\Omega_{mn}} + \frac{3z^2}{\Omega_{mn}^2} + ... \right) - \frac{1}{\Omega_{mn}^2} \right\} \\
&= \sum {\sum}' \left\{ \frac{2z}{\Omega_{mn}^3} + \frac{3z^2}{\Omega_{mn}^4} + ... \right\} \\
&= \sum {\sum}' \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \frac{z^k}{\Omega_{mn}^{k+2}} \right\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (k+1) \sum {\sum}' \frac{1}{\Omega_{mn}^{k+2}} \right\} z^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k .
\end{aligned}$$

k yerine $2k$ yazarsak teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 2.3.3 $\wp(z)$ fonksiyonu

$$[\wp'(z)]^2 = 4\ (\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_3)$$

cebirsel diferensiyel denklemini gerçekler.

İspat:

$$\wp'(z) = \frac{-2}{z^3} + 2a_2 z + 4a_4 z^3 + ...$$

$$[\wp'(z)]^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{4a_2}{z^2} - 16a_4 + b_1 z + b_2 z^2 + ...$$

$$\begin{aligned}
\wp(z) - e_1 &= \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4^2 z^4 + ... - e_1 \\
\wp(z) - e_2 &= \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4^2 z^4 + ... - e_2 \\
\wp(z) - e_3 &= \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4^2 z^4 + ... - e_3
\end{aligned}$$

taraf tarafa çarpalım.

$$(\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_3) = \frac{1}{z^6} + \frac{1}{z^2}(a_2 + a_3 + ...)$$

dır. Teorem 2.2.3 gereğince

$$\frac{\wp'^2(z)}{(\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_3)} = c$$

gibi bir sabite eşit olmalır. Gerekli işlemleri yaparsak c=4 bulunur.

Teorem 2.3.4 $\wp(z)$ fonksiyonu

$$[\wp'(z)]^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$$

diferensiyel denklemini gerçekler. Burada g_2 ve g_3 sırasıyla

$$\begin{aligned}
g_2 &= 20a_2 = 60 \sum \sum_{m,n\in\mathbb{Z}}{}' \Omega_{mn}^{-4} \\
g_3 &= 28a_4 = 140 \sum \sum_{m,n\in\mathbb{Z}}{}' \Omega_{mn}^{-6}
\end{aligned}$$

dır. Buradaki g_2 ve g_3 Weierstrass sabitleri 4 ve 6 ağırlık Einsenstein serileridir. Açık olarak ifadesi

$$\begin{aligned}
g_2 &= 60 \sum \sum_{m,n\in\mathbb{Z}}{}' \Omega_{mn}^{-4} = 60 \sum_{m,n\epsilon\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{(2mw_1 + 2nw_2)^4} \\
g_3 &= 140 \sum \sum_{m,n\in\mathbb{Z}}{}' \Omega_{mn}^{-6} = 140 \sum_{m,n\epsilon\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{(2mw_1 + 2nw_2)^6}
\end{aligned}$$

dır.

İspat:

$$[\wp'(z)]^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{4a_2}{z^2} - 16a_4 + b_1 z + b_2 z^2 + ...$$

$$\wp^3(z) = \frac{1}{z^6} - \frac{3a_2}{z^2} + 3a_4 + ...$$

$$20a_2\wp(z) = \frac{20a_2}{z^2} + 20a_2^2 z^2 + 20a_2 a_4^2 z^4 + ...$$

ifadeleri teoremdeki bağıntıda yerine yazarsak

$$\begin{aligned} &\left(\frac{4}{z^6} - \frac{4a_2}{z^2} - 16a_4 + b_1 z + b_2 z^2 + ...\right) - \left(\frac{4}{z^6} - \frac{12a_2}{z^2} + 12a_4 + ...\right) \\ = \; &-\left(\frac{20a_2}{z^2} + 20a_2^2 z^2 + 20a_2 a_4^2 z^4 + ...\right) + 28a_4 \end{aligned}$$

olduğunu görürüz.

Teorem 2.3.5 e_1, e_2, e_3, g_2, g_3 sabitleri arasında

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

$$e_1e_2 + e_2e_3 + e_1e_3 = \frac{-1}{4} g_2$$

$$e_1e_2e_3 = \frac{1}{4} g_3$$

$$\Delta = 16(e_1 - e_2)^2(e_3 - e_1)^2(e_3 - e_2)^2 = g_2^3 - 27g_3^2$$

bağıntıları vardır.

2.4. Theta Fonksiyonları

Theta fonksiyonları Weierstrass $\wp(z)$ fonksiyonu ve Weierstrass $\sigma(z)$, $\sigma_r(z)$, $\zeta(z)$

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum \sum_{m,n\in\mathbb{Z}}{}' \left\{ \frac{1}{(z - \Omega_{mn})} + \frac{1}{\Omega_{mn}} + \frac{z}{\Omega_{mn}^2} \right\}$$

$$\frac{d}{dz} \log \sigma(z) = \zeta(z)$$

$$\sigma_r(z) = e^{-\mu_r z} \frac{\sigma(z + w_r)}{\sigma(w_r)}$$

fonksiyonları yardımıyla tanımlanır (Wittaker 1954).

Tanım 2.4.1 (Dutta 1965, Wittaker 1954) $\theta_i(z|\tau)$ $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ fonksiyonları aşağıdaki ifadeler ile tanımlanır. $|q| < 1$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}\theta_1(z|\tau) &= -i.\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n\ +1)iz} \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\sin(2n+1)z\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}\theta_2(z|\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n\ +1)iz} \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\cos(2n+1)z\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\theta_3(z|\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2niz} \\ &= 1+2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos 2nz\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\theta_4(z|\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{(n+1)} q^{(n+1)^2} e^{2(n+1)iz} \\ &= 1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2nz\end{aligned} \tag{2.5}$$

dir.

$\theta_i(z|\tau)$ $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ fonksiyonlarının yarı periyot ve çeyrek periyot dönüşümleri çizelge olarak

Çizelge 2.4.1 $\theta_i(z|\tau)$ $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ fonksiyonlarının çeyrek periyot dönüşümleri

	$z+\frac{\pi}{2}$	$z+\frac{\pi\tau}{2}$	$z+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\tau}{2}$
$\theta_1(z)$	$\theta_2(z)$	$i.q^{\frac{-1}{4}}e^{-iz}\theta_4(z)$	$q^{\frac{-1}{4}}e^{-iz}\theta_3(z)$
$\theta_2(z)$	-$\theta_1(z)$	$q^{\frac{-1}{4}}e^{-iz}\theta_3(z)$	$-i.q^{\frac{-1}{4}}e^{-iz}\theta_4(z)$
$\theta_3(z)$	$\theta_4(z)$	$q^{\frac{-1}{4}}e^{-iz}\theta_2(z)$	$i.q^{\frac{-1}{4}}e^{-iz}\theta_1(z)$
$\theta_4(z)$	$\theta_3(z)$	$i.q^{\frac{-1}{4}}e^{-iz}\theta_1(z)$	$q^{\frac{-1}{4}}e^{-iz}\theta_2(z)$

Çizelge 2.4.2 $\theta_i(z|\tau)$ $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ fonksiyonlarının yarı periyot dönüşümleri

	$z+\pi$	$z+\pi\tau$
$\theta_1(z)$	$-\theta_1(z)$	$-q^{-1}e^{-2iz}\theta_1(z)$
$\theta_2(z)$	$-\theta_2(z)$	$q^{-1}e^{-2iz}\theta_2(z)$
$\theta_3(z)$	$\theta_3(z)$	$q^{-1}e^{-2iz}\theta_3(z)$
$\theta_4(z)$	$\theta_4(z)$	$-q^{-1}e^{-2iz}\theta_4(z)$

$\theta_1(z), \theta_2(z), \theta_3(z), \theta_4(z)$ fonksiyonlarının tanımını kullarak dönüşümlerden birkaçını gösterelim.

(2.2)' deki tanımdan dolayı

$$\begin{aligned}
\theta_1(z+\pi) &= -i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n\ +1)i(z+\pi)} \\
&= -i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{2n} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n\ +1)iz} e^{2ni\pi} e^{i\pi} \\
&= i\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n\ +1)iz} \\
&= -\theta_1(z)
\end{aligned}$$

dır. (2.4)' deki tanımı kullanırsak;

$$\begin{aligned}
\theta_3(z+\pi\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2ni(z+\pi\tau)} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2niz} e^{2ni\pi\tau} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2niz} q^{2n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2+2n} e^{2niz} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+1)^2} e^{2(n+1)iz} e^{-2iz} q^{-1} \\
&= q^{-1} e^{-2iz}\theta_3(z)
\end{aligned}$$

dir. (2.5)' deki tanımdan dolayı;

$$\begin{aligned}
\theta_4\left(z+\frac{\pi\tau+\pi}{2}\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+1} q^{(n+1)^2} e^{2i(n+1)\left(z+\frac{\pi\tau+\pi}{2}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+1} q^{(n+1)^2} e^{2(n+1)iz} e^{(n+1)i\pi} e^{(n+1)i\pi\tau} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+1} q^{n^2+2n+1} e^{2(n+1)iz} e^{in\pi} e^{i\pi} e^{ni\pi\tau} e^{i\pi\tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2+3n+2} e^{2(n+1)iz} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(n+\frac{3}{2}\right)^2} q^{\frac{-1}{4}} e^{2\left(n+1+\frac{1}{2}\right)} e^{-iz} = q^{\frac{-1}{4}} e^{-iz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}+1\right)^2} e^{2\left(n+1+\frac{1}{2}\right)iz}.
\end{aligned}$$

Yukarıdaki bağıntıda $n+1$ yerine n yazarsak

$$\begin{aligned}
\theta_4\left(z+\frac{\pi\tau+\pi}{2}\right) &= q^{\frac{-1}{4}} e^{-iz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{2\left(n+\frac{1}{2}\right)iz} \\
&= q^{\frac{-1}{4}} e^{-iz}\theta_2(z)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.4.1' den $\theta_1(z)$, $\theta_2(z)$, $\theta_3(z)$, $\theta_4(z)$ fonksiyonlarının sıfırları sırasıyla 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi\tau+\pi}{2}$, $\frac{\pi\tau}{2}$ olduğu görülür.

Teorem 2.4.2 (Dutta 1965) $\theta_r(z)$, $(r = 1, 2, 3, 4)$ fonksiyonlarının kareleri aşağıdaki bağıntıları gerçekler.

$$\theta_2^2(z)\theta_4^2(0) = \theta_4^2(z)\theta_2^2(0) - \theta_1^2(z)\theta_3^2(0)$$

$$\theta_3^2(z)\theta_4^2(0) = \theta_4^2(z)\theta_3^2(0) - \theta_1^2(z)\theta_2^2(0)$$

$$\theta_1^2(z)\theta_4^2(0) = \theta_3^2(z)\theta_2^2(0) - \theta_3^2(z)\theta_3^2(0)$$

$$\theta_4^2(z)\theta_4^2(0) = \theta_3^2(z)\theta_3^2(0) - \theta_2^2(z)\theta_2^2(0).$$

İspat: $\theta_1^2(z)\theta_2^2(z)\theta_3^2(z)\theta_4^2(z)$ $(\pi, \pi\tau)$' da çarpımsal periyodiktir.

$$\theta_r^2(z+\pi\tau) = N^2\theta_r^2(z)$$

$$N = \pm q^{-1}e^{-2iz}$$

$$\begin{aligned}
\emptyset(z) &= \frac{a\theta_1^2(z) + b\theta_4^2(z)}{\theta_2^2(z)} \\
\Psi(z) &= \frac{c\theta_1^2(z) + d\theta_4^2(z)}{\theta_3^2(z)} \\
\emptyset(z+\pi) &= \frac{a\theta_1^2(z+\pi) + b\theta_4^2(z+\pi)}{\theta_2^2(z+\pi)} = \emptyset(z) \\
\Psi(z+\pi) &= \frac{c\theta_1^2(z+\pi) + d\theta_4^2(z+\pi)}{\theta_3^2(z+\pi)} = \Psi(z)
\end{aligned}$$

dir.

$\emptyset(z)$, $\Psi(z)$ $(\pi , \pi\tau)$' da çifte periyodiktir. Bu durumda a, b, c, d' yi öyle seçelim ki

$$\begin{aligned}
\emptyset(z) &= 1 \\
\Psi(z) &= 1
\end{aligned}$$

olsun.

$$\begin{aligned}
a\theta_1^2(z) + b\theta_4^2(z) &= \theta_2^2(z) \\
c\theta_1^2(z) + d\theta_4^2(z) &= \theta_3^2(z).
\end{aligned}$$

Yukarıdaki bağıntıda $z=0$ alırsak,

$$\begin{aligned} b &= \frac{\theta_2^2(0)}{\theta_4^2(0)} \\ d &= \frac{\theta_3^2(0)}{\theta_4^2(0)} \end{aligned}$$

bulunur.

$z=\frac{\pi\tau}{2}$ alırsak,

$$\begin{aligned} a &= -\frac{\theta_2^2\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}{\theta_1^2\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)} = -\frac{\theta_3^2(0)}{\theta_4^2(0)} \\ c &= -\frac{\theta_3^2\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}{\theta_1^2\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)} = -\frac{\theta_2^2(0)}{\theta_4^2(0)} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \theta_2^2(z) &= -\frac{\theta_2^2\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}{\theta_1^2\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)}\theta_1^2(z) + \frac{\theta_2^2(0)}{\theta_4^2(0)}\theta_4^2(z) \\ \theta_2^2(z)\theta_1^2\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)\theta_4^2(0) &= \theta_2^2\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)\theta_1^2(z)\theta_4^2(0) + \theta_2^2(0)\theta_1^2\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)\theta_4^2(z). \end{aligned}$$

Çizelge 2.4.1' den yardım alarak dönüşüm yapalım.

$$\theta_2^2(z)\theta_4^2(0) = \theta_2^2(0)\theta_4^2(z) - \theta_1^2(z)\theta_3^2(0)$$

bulunur. Diğerlerini de teoremde ilk iki bağıntıda $z=z+\frac{\pi}{2}$ yazarak bulabiliriz.

Teorem 2.4.3 (Dutta 1965) Theta fonksiyonları aşağıdaki sanal dönüşüm ifadelerini gerçekler.

$$\theta_1(z|\tau) = -i(-i\tau)^{\frac{-1}{2}}\exp\left(\frac{i\tau' z^2}{\pi}\right)\theta_1(z\tau'|\tau')$$

$$\theta_2(z|\tau) = (-i\tau)^{\frac{-1}{2}}\exp\left(\frac{i\tau' z^2}{\pi}\right)\theta_4(z\tau'|\tau')$$

$$\theta_3(z|\tau) = (-i\tau)^{\frac{-1}{2}}\exp\left(\frac{i\tau' z^2}{\pi}\right)\theta_3(z\tau'|\tau')$$

$$\theta_4(z|\tau) = (-i\tau)^{\frac{-1}{2}}\exp\left(\frac{i\tau' z^2}{\pi}\right)\theta_2(z\tau'|\tau').$$

Burada $\tau' = \frac{-1}{\tau}$, $(-i\tau)^{\frac{-1}{2}}$, $|\arg(-i\tau)| < \frac{\pi}{2}$ bölgesinde tanımlanmıştır.

Teorem 2.4.4 (Du Val 1965) Theta fonksiyonları aşağıdaki Landen dönüşümü olarak bilinen gerçel dönüşüm ifadelerini sağlar.

$$\frac{\theta_3(z|\tau)\theta_4(z|\tau)}{\theta_4(2z|2\tau)} = \frac{\theta_3(0|\tau)\theta_4(0|\tau)}{\theta_4(0|2\tau)}$$

$$\frac{\theta_2(z|\tau)\theta_1(z|\tau)}{\theta_1(2z|2\tau)} = \frac{\theta_3(0|\tau)\theta_4(0|\tau)}{\theta_4(0|2\tau)} \ .$$

Teorem 2.4.5 (Dutta 1965) Weierstrass $\wp(z)$ fonksiyonu ile $\theta_r(z)$ $r = 1, 2, 3, 4$ fonksiyonları arasında aşağıdaki bağıntılar vardır :

$$\sqrt{\wp(z) - e_1} = \frac{\theta_1'(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_2(z)}{\theta_1(z)}$$

$$\sqrt{\wp(z) - e_2} = \frac{\theta_1'(0)}{\theta_4(0)}\frac{\theta_4(z)}{\theta_1(z)}$$

$$\sqrt{\wp(z) - e_3} = \frac{\theta_1'(0)}{\theta_3(0)}\frac{\theta_3(z)}{\theta_1(z)} \ .$$

2.5. Jakobi snz, cnz, dnz Fonksiyonları

Jakobi eliptik fonksiyonu olarak bilinen snz, cnz, dnz fonksiyonları aşağıdaki ifadelerle tanımlanır.

Tanım 2.5.1 (Dutta 1965) z $\in \mathbb{C}$ olsun. Jakobi eliptik fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$sn(z,k) = \frac{\theta_3(0|\tau)}{\theta_2(0|\tau)}\frac{\theta_1(z\theta_3^{-2}(0|\tau)|\tau)}{\theta_4(z\theta_3^{-2}(0|\tau)|\tau)} \tag{2.6}$$

$$cn(z,k) = \frac{\theta_4(0|\tau)}{\theta_2(0|\tau)}\frac{\theta_2(z\theta_3^{-2}(0|\tau)|\tau)}{\theta_4(z\theta_3^{-2}(0|\tau)|\tau)} \tag{2.7}$$

$$dn(z,k) = \frac{\theta_4(0|\tau)}{\theta_3(0|\tau)}\frac{\theta_3(z\theta_3^{-2}(0|\tau)|\tau)}{\theta_4(z\theta_3^{-2}(0|\tau)|\tau)} \ . \tag{2.8}$$

Burada

$$k^2 = \frac{\theta_2^4(0|\tau)}{\theta_3^4(0|\tau)} = \frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2}$$

dir ve k' ya eliptik fonksiyonun modülü denir. Ayrıca

$$(k')^2 = \frac{e_1 - e_3}{e_1 - e_2}$$

tamamlayan modülüdür. Ve

$$k^2 + (k')^2 = 1$$

$$K = \frac{\pi}{2}\theta_3^2(0)$$

$$iK' = \frac{\pi\tau}{2}\theta_3^2(0)$$

dır.

Teorem 2.5.2 snz, cnz, dnz fonksiyonları sırasıyla $4K$, $2iK'$; $4K$, $2K + iK'$; $2K$, $4iK'$ çiftleri ile periyodik fonksiyonlardır.

İspat: Jakobi eliptik fonksiyonları snz, cnz, dnz' nin tanımlarından (2.6)' ya göre

$$\begin{aligned} sn(z+4K) &= \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_1((z+2\pi)\theta_3^{-2})}{\theta_4((z+2\pi)\theta_3^{-2})} \\ &= \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_1(z\theta_3^{-2})}{\theta_4(\theta_3^{-2})} \\ &= snz \end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned} sn(z+2iK') &= sn(z+\pi\tau\theta_3^2) = \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_1((z+\pi\tau\theta_3^2)\theta_3^{-2})}{\theta_4((z+\pi\tau\theta_3^2)\theta_3^{-2})} \\ &= \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_1(z\theta_3^{-2}+\pi\tau)}{\theta_4(\theta_3^{-2}+\pi\tau)} \\ &= \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\frac{-q^{-1}e^{-2iz}\theta_1(z\theta_3^{-2})}{-q^{-1}e^{-2iz}\theta_4(\theta_3^{-2})} \\ &= snz \end{aligned}$$

dir.

Teorem 2.5.3 snz, cnz, dnz fonksiyonlarının 0-temel periyot paralelkenarında sırasıyla sıfır yerleri ve kutup noktaları, bu kutup noktalarındaki kalıntıları aşağıdadır.

$$\begin{aligned} &snz\text{' nin sıfır yerleri } 0,\ 2K \\ &cnz\text{' nin sıfır yerleri } K,\ 3K \\ &dnz\text{' nin sıfır yerleri } K+iK',\ K+3iK'. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &snz\text{' nin kutup noktaları } iK',\ 2K+iK' \\ &cnz\text{' nin kutup noktaları } iK',\ 2K+iK' \\ &dnz\text{' nin kutup noktaları } iK',\ 3iK'\ . \end{aligned}$$

Belirtilen kutuplardaki kalıntıları

$$\begin{aligned} &snz\text{' nin } iK',\ 2K+iK' \text{ kalıntıları sırasıyla } \frac{1}{k},\ \frac{-1}{k} \\ &cnz\text{' nin } iK',\ 2K+iK' \text{ kalıntıları sırasıyla } \frac{-i}{k},\ \frac{i}{k} \\ &dnz\text{' nin } iK',\ 3iK' \text{ kalıntıları sırasıyla } -i,\ i\ . \end{aligned}$$

İspat: Jacobi fonksiyonlarının sıfırları ve kutupları tanım 2.5.1' den hemen bulunur.

snz' nin $2K$' daki sıfır yerini bulalım. (2.6)' daki tanımdan dolayı

$$\begin{aligned} sn(z+2K) &= sn(z+\pi\theta_3^2(0)) \\ &= \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_1((z+\pi\theta_3^2)\theta_3^{-2})}{\theta_4((z+\pi\theta_3^2)\theta_3^{-2})} \\ &= \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_1(z\theta_3^{-2}+\pi)}{\theta_4(z\theta_3^{-2}+\pi)} = \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_1(z\theta_3^{-2})}{\theta_4(z\theta_3^{-2})}. \end{aligned}$$

Burada $z=0$ yazarsak;

$$\frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_1(0)}{\theta_4(0)}$$

bulunur. $\theta_1(0)=0$ olduğundan $2K$ snz' nin sıfır yeridir.

snz' nin kutup noktasını bulalım.

$$\begin{aligned} sn(z+iK') &= sn\left(z+i\frac{\pi\tau}{2}\theta_3^2(0)\right) \\ &= \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_1[\left(z+i\frac{\pi\tau}{2}\theta_3^2(0)\right)\theta_3^{-2}]}{\theta_4[\left(z+i\frac{\pi\tau}{2}\theta_3^2(0)\right)\theta_3^{-2}]} \\ &= \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_4(z\theta_3^{-2})}{\theta_1(z\theta_3^{-2})}. \end{aligned}$$

Burada $z=0$ yazalım.

$$sn(iK') = \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_4(0)}{\theta_1(0)}.$$

Burada $\theta_1(0)=0$ olduğundan iK' snz' nin kutup noktasıdır.

snz' nin iK'' deki kalıntısını bulalım.

Kalıntı teoreminden

$$\begin{aligned} res(snz,iK') &= \lim_{z\longrightarrow iK'}(z-iK')snz \\ &= \lim_{z\longrightarrow iK'}(z-iK')\frac{\theta_3(0:\tau)}{\theta_2(0:\tau)}\frac{\theta_1(z\theta_3^{-2}(0:\tau):\tau)}{\theta_4(z\theta_3^{-2}(0:\tau):\tau)} \\ &= \lim_{z\longrightarrow iK'} z'\frac{\theta_3}{\theta_2}\frac{\theta_1\left(z'\theta_3^{-2}+\frac{\pi\tau}{2}\right)}{\theta_4\left(z'\theta_3^{-2}+\frac{\pi\tau}{2}\right)} \\ &= \frac{\theta_3}{\theta_2}\theta_1\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)\lim_{z'\longrightarrow 0}\frac{z'}{\theta_4\left(z'\theta_3^{-2}+\frac{\pi\tau}{2}\right)} \\ &= \frac{\theta_3}{\theta_2}\theta_1\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)\lim_{z'\longrightarrow 0}\frac{z'(-iq^{\frac{1}{4}})}{\theta_1(z'\theta_3^{-2})} \\ &= \frac{\theta_3}{\theta_2}\theta_1\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)(-i)q^{\frac{1}{4}}\frac{\theta_3^2}{\theta_1'(0)} \\ &= \frac{\theta_3}{\theta_2}\frac{\theta_4}{-iq^{\frac{1}{4}}}(-iq^{\frac{1}{4}})\frac{\theta_3^2}{\theta_2\theta_3\theta_4} \\ &= \frac{\theta_3^2}{\theta_2^2} = \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Diğerleri de benzer olarak bulunur.

Teorem 2.5.4 (Witteker 1954) Jakobi snz, cnz, dnz fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$\begin{aligned} sn^2z + cn^2z &= 1 \\ dn^2z + k^2sn^2z &= 1 \\ dn^2z - k^2cn^2z &= (k')^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}snz &= cnzdnz \\ \frac{d}{dz}cnz &= -snzdnz \\ \frac{d}{dz}dnz &= -k^2snzcnz. \end{aligned}$$

İspat:

$$\theta_4^2(z\theta_3^{-2})\theta_2^2 = \theta_1^2(z\theta_3^{-2})\theta_3^2 + \theta_2^2(z\theta_3^{-2})\theta_4^2.$$

Yukarıdaki bağıntıda her iki tarafı da

$$\theta_4^2(z\theta_3^{-2})\theta_2^2$$

ile bölersek (2.6) ve (2.7)' deki tanımdan

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\theta_1^2(z\theta_3^{-2})\theta_3^2}{\theta_4^2(z\theta_3^{-2})\theta_2^2} + \frac{\theta_2^2(z\theta_3^{-2})\theta_4^2}{\theta_4^2(z\theta_3^{-2})\theta_2^2} \\ &= sn^2z + cn^2z \end{aligned}$$

bulunur.

snz' nin türevini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\left\{\frac{\theta_1(z\theta_3^{-2})\theta_3}{\theta_4(z\theta_3^{-2})\theta_2}\right\} &= \theta_4^2\frac{\theta_3}{\theta_2}\frac{\theta_2(z\theta_3^{-2})\theta_3(z\theta_3^{-2})}{\theta_4(z\theta_3^{-2})\theta_4(z\theta_3^{-2})} \\ &= cnzdnz \end{aligned}$$

bulunur. Diğerleri de benzer olarak hesaplanabilir.

Teorem 2.5.5 (Dutta 1965) Weierstrass $\wp(z)$ fonksiyonu ile Jacobi snz, cnz ve dnz fonksiyonları arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:

$$sn^2(z,k) = \frac{e_1 - e_2}{\wp\left(\frac{z}{\sqrt{e_1-e_2}}\right) - e_2}$$

$$cn^2(z,k) = \frac{\wp\left(\frac{z}{\sqrt{e_1-e_2}}\right) - e_1}{\wp\left(\frac{z}{\sqrt{e_1-e_2}}\right) - e_2}$$

$$dn^2(z,k) = \frac{\wp\left(\frac{z}{\sqrt{e_1-e_2}}\right) - e_3}{\wp\left(\frac{z}{\sqrt{e_1-e_2}}\right) - e_2}.$$

İspat: $sn^2(z,k)$' yi gösterelim.

$$sn(z,k) = \frac{\theta_1\left(\frac{z}{\theta_3^2}\right)}{\theta_4\left(\frac{z}{\theta_3^2}\right)}\frac{\theta_3}{\theta_2}$$

$$= \frac{\theta_3}{\theta_2}\frac{\theta_1\left(\frac{z}{\sqrt{e_1-e_2}}\right)}{\theta_4\left(\frac{z}{\sqrt{e_1-e_2}}\right)}$$

dir. $z' = z\theta_3^{-2}(0)$ alalım.

$$\frac{\theta_1(z')}{\theta_4(z')} = \frac{\theta_1'(0)}{\theta_4(0)}\frac{1}{\sqrt{\wp(z)-e_2}}.$$

$$\begin{aligned} sn(z,k) &= \frac{\theta_3}{\theta_2}\frac{\theta_1'(0)}{\theta_4(0)}\frac{1}{\sqrt{\left\{\wp(\frac{z}{\sqrt{e_1-e_2}}) - e_2\right\}^{\frac{1}{2}}}} \\ &= \frac{\theta_3^2}{\sqrt{\left\{\wp(\frac{z}{\sqrt{e_1-e_2}}) - e_2\right\}^{\frac{1}{2}}}} \\ &= \left\{\frac{e_1-e_2}{\wp(\frac{z}{\sqrt{e_1-e_2}}) - e_2}\right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$sn^2(z,k) = \frac{e_1-e_2}{\wp\left(\frac{z}{\sqrt{e_1-e_2}}\right) - e_2}$$

bulunur.

Teorem 2.5.6 (Dutta 1965) snz, cnz ve dnz fonksiyonları aşağıdaki toplama teoremlerini gerçekler.

$$sn(z_1+z_2) = \frac{snz_1cnz_2dnz_2 + snz_3cnz_1dnz_1}{1-k^2sn^2z_1sn^2z_2}$$

$$cn(z_1+z_2) = \frac{cnz_1cnz_2 - snz_1snz_2dnz_1dnz_2}{1-k^2sn^2z_1sn^2z_2}$$

$$dn(z_1+z_2) = \frac{dnz_1dnz_2 - k^2snz_1snz_2cnz_1cnz_2}{1-k^2sn^2z_1sn^2z_2}.$$

3. BULGULAR

3.1. Theta Fonksiyonlarının Sonlu Toplamları

$q = \exp(i\pi\tau)$ olmak üzere q' ya bağlı olarak Theta fonksiyonlarının tanımı aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tanım 3.1.1 (Zeng -F.Xien 2009) Jakobi theta fonksiyonları $\theta_k(z|\tau)$ $k = 1, 2,$ $3, 4$ için

$$\theta_1(z|\tau) = -iq^{\frac{1}{4}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+1)} e^{(2n+1)iz} \tag{3.1}$$

$$\theta_2(z|\tau) = q^{\frac{1}{4}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(n+1)} e^{(2n+1)iz} \tag{3.2}$$

$$\theta_3(z|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2niz} \tag{3.3}$$

$$\theta_4(z|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2niz} \tag{3.4}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.1.2 k, n, a, b pozitif tamsayı k=a+b için

$$\sum_{s=0}^{kn-1} \theta_3^a\left(\frac{z}{kn} + \frac{y}{a} + \frac{\pi s}{kn}|\frac{\tau}{kn^2}\right)\theta_3^b\left(\frac{z}{kn} - \frac{y}{b} + \frac{\pi s}{kn}|\frac{\tau}{kn^2}\right) = knH_{a,b}\left(\frac{y}{ab}, \frac{\tau}{kn^2}\right)\theta_3(z|\tau) \tag{3.5}$$

Burada

$$H_{a,b}(y,\tau) = \sum_{\substack{m_1+m_2+...+m_a+n_1+...+n_b=0 \\ m_1,m_2...,n_b=-\infty}}^{\infty} q^{m_1^2+m_2^2+...+m_a^2+n_1^2+...+n_b^2} e^{2kiy(m_1+m_2+....+m_a)} \tag{3.6}$$

dır.

İspat: (3.3)' den

$$\theta_3(z+\pi|\tau) = \theta_3(z|\tau) \tag{3.7}$$

$$\theta_3(z+\pi\tau|\tau) = q^{-1}e^{-2iz}\theta_3(z|\tau) \tag{3.8}$$

elde olunur. (3.5)' in sol tarafına $f(z)$ diyelim.

$$f(z+\pi) = \sum_{s=0}^{kn-1} \theta_3^a(\frac{z}{kn} + \frac{y}{a} + \frac{\pi(s+1)}{kn}|\frac{\tau}{kn^2})\theta_3^b(\frac{z}{kn} - \frac{y}{b} + \frac{\pi(s+1)}{kn}|\frac{\tau}{kn^2})$$

elde olunur. $s+1$ yerine s alınarak ve (3.7)' deki özdeşlikleri kullanarak

$$f(z+\pi) = f(z) \tag{3.9}$$

elde olunur. (3.8) özdeşliği kullanılarak

$$\theta_3(z+n\pi\tau|\tau)=q^{-n^2}e^{-2niz}\theta_3(z|\tau) \tag{3.10}$$

elde olunur. (3.10)' daki özdeşlikten

$$\begin{aligned}&\theta_3^a\left(\frac{z}{kn}+\frac{y}{a}+\frac{\pi s}{kn}+n\frac{\pi\tau}{kn^2}|\frac{\tau}{kn^2}\right)\theta_3^b\left(\frac{z}{kn}-\frac{y}{b}+\frac{\pi s}{kn}+n\frac{\pi\tau}{kn^2}|\frac{\tau}{kn^2}\right)\\ &=q^{-1}e^{-2iz}\theta_3^a\left(\frac{z}{kn}+\frac{y}{a}+\frac{\pi s}{kn}|\frac{\tau}{kn^2}\right)\theta_3^b\left(\frac{z}{kn}-\frac{y}{b}+\frac{\pi s}{kn}|\frac{\tau}{kn^2}\right)\end{aligned}$$

elde olunur. Buradan

$$f(z+\pi\tau|\tau)=q^{-1}e^{-2iz}f(z|\tau) \tag{3.11}$$

olduğunu bulduk. (3.5) ve (3.11)' dan $\frac{f(z)}{\theta_3(z|\tau)}$ fonksiyonu π ve $\pi\tau$ periyotlarında eliptik fonksiyon olduğunu elde ettik. $\frac{f(z)}{\theta_3(z|\tau)}$, periyot paralelkenarında $z=\frac{\pi+\pi\tau}{2}$ basit kutbu vardır. $\frac{f(z)}{\theta_3(z|\tau)}$ fonksiyonu z' den bağımsızdır. Buna $c_{a,b}(y|\tau)$ diyelim. Periyot paralelkenarında basit kutba sahip bir eliptik fonksiyon sabite eşit olmalıdır. Böylece

$$\sum_{s=0}^{kn-1}\theta_3^a\left(\frac{z}{kn}+\frac{y}{a}+\frac{\pi s}{kn}|\frac{\tau}{kn^2}\right)\theta_3^b\left(\frac{z}{kn}-\frac{y}{b}+\frac{\pi s}{kn}|\frac{\tau}{kn^2}\right)=c_{a,b}(y|\tau)\theta_3(z|\tau) \tag{3.12}$$

elde edilir. (3.3)' deki $\theta_3(z|\tau)$ tanımını kullanarak (3.12) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}&\sum_{s=0}^{kn-1}\sum_{\substack{m_1,m_2\ldots+m_a\\ n_1,n_2\ldots,n_b=-\infty}}^{\infty} q^{\frac{m_1^2+m_2^2+\ldots+m_a^2+n_1^2+\ldots+n_b^2}{kn^2}}e^{2i\left(\frac{m_1+m_2+\ldots+m_a+n_1+n_2+\ldots+n_b}{kn}\right)z}\\ &e^{2i\left(\frac{m_1+m_2\ldots+m_a}{a}-\frac{n_1+n_2\ldots+n_b}{b}\right)y}w^{\left(\frac{m_1+m_2+\ldots+m_a+n_1+n_2+\ldots+n_b}{kn}\right)s}\\ =\;&c_{a,b}(y|\tau)\sum_{m=-\infty}^{\infty}q^{m^2}e^{2miz}\end{aligned}$$

bulunur. Burada $w=e^{\frac{2i\pi}{kn}}$ dir. İki taraftaki sabitleri eşitleyerek

$$\begin{aligned}c_{a,b}(y|\tau)&=\sum_{s=0}^{kn-1}\sum_{\substack{m_1+m_2\ldots+m_a\\ n_1+n_2\ldots+n_b=0}}^{\infty}q^{\frac{m_1^2+m_2^2+\ldots m_a^2+n_1^2+\ldots n_b^2}{kn^2}}e^{2i\left(\frac{m_1+m_2\ldots+m_a}{a}-\frac{n_1+n_2\ldots+n_b}{b}\right)y}\\ &=kn\sum_{\substack{m_1+m_2\ldots+m_a\\ n_1+n_2\ldots+n_b=0}}^{\infty}q^{\frac{m_1^2+m_2^2+\ldots m_a^2+n_1^2+\ldots n_b^2}{kn^2}}e^{2ik\left(\frac{m_1+m_2\ldots+m_a}{ab}\right)y}\\ &=kn\;H_{ab}\left(\frac{y}{ab},\frac{\tau}{kn^2}\right)\end{aligned}$$

ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.3 k ve n pozitif tamsayısı için

$$\sum_{s=0}^{kn-1}\theta_3^k\left(\frac{z}{kn}+\frac{y}{a}+\frac{\pi s}{kn}|\frac{\tau}{kn^2}\right)=knG_k(\frac{\tau}{kn^2})\theta_3(z|\tau).$$

Burada

$$G_k(\tau) = \sum_{\substack{m_1+m_2+....m_k=0 \\ m_1,m_2...=-\infty}}^{\infty} q^{m_1^2+m_2^2+....m_k^2}$$

dır.

Teorem 3.1.4 k, n, a, b pozitif tamsayısı k=a+b için

$$\sum_{s=0}^{kn-1} \theta_3^a \left(by + \frac{\pi s}{kn} | \frac{\tau}{kn^2}\right) \theta_3^b \left(ay - \frac{\pi s}{kn} | \frac{\tau}{kn^2}\right) = knH_{a,b}\left(y, \frac{\tau}{kn^2}\right) \theta_3(0|\tau)$$

dır.

İspat: (3.5)' de sırasıyla $y = 0$, $z = 0$ aldığımızda teorem 3.1.3 ve teorem 3.1.4 elde edilir.

Teorem 3.1.5 k, n pozitif tamsayı olsun.

i) kn tek ise

$$\sum_{s=0}^{kn-1} (-1)^s \theta_1^k \left(z + \frac{\pi s}{kn} | \tau\right) = knG_k(\tau)(-1)^{\frac{n+k-2}{2}} \theta_1(knz|kn^2\tau)$$

dır.

ii) kn çift ve n tek olduğunda

$$\sum_{s=0}^{kn-1} (-1)^s \theta_1^k \left(z + \frac{\pi s}{kn} | \tau\right) = knG_k(\tau)(-1)^{\frac{k}{2}} \theta_2(knz|kn^2\tau)$$

dır.

Teorem 3.1.6

i) n, k tek ve pozitif tamsayı

$n = 1$ ise

$$\sum_{s=0}^{kn-1} (-1)^s 2^k \sin^k \left(z + \frac{\pi s}{k}\right) = 2(-1)^{\frac{k-1}{2}} k \sin kz$$

dir.

$n \neq 1$ ise

$$\sum_{s=0}^{kn-1} (-1)^s 2^k \sin^k \left(z + \frac{\pi s}{k}\right) = 0$$

dır.

ii) n tek, k çift olsun.

n=1 ise

$$\sum_{s=0}^{k-1}(-1)^s 2^k \sin^k\left(z+\frac{\pi s}{k}\right)=2(-1)^{\frac{k}{2}}k\cos kz$$

elde olur.

Sonuç 3.1.7 ((3.5)' de $a=2$, $b=2$, $k=4$ alalım. Bu durumda

$$\sum_{s=0}^{4n-1}\theta_3^2\left(\frac{z}{4n}+\frac{y}{2}+\frac{\pi s}{4n}|\frac{\tau}{4n^2}\right)\theta_3^2\left(\frac{z}{4n}-\frac{y}{2}+\frac{\pi s}{4n}|\frac{\tau}{4n^2}\right)=4nH_{2,2}\left(\frac{y}{4},\frac{\tau}{4n^2}\right)\theta_3(z|\tau)$$

dır. Burada

$$H_{2,2}(y|\tau)=\theta_3^2(0|2\tau)\theta_3(8y|4\tau)+\theta_2^2(0|2\tau)\theta_2(8y|4\tau)$$

dır.

İspat : (3.6)' dan

$$\begin{aligned}
H_{2,2}(y,\tau) &= \sum_{\substack{m_1+m_2+n_1+n_2=0\\ m_1,m_2,n_1,n_2=-\infty}}^{\infty} q^{m_1^2+m_2^2+n_1^2+n_2^2}e^{8iy(m_1+m_2)}\\
&= \sum_{m,l,n=-\infty}^{\infty} q^{2[m^2+l^2+n^2+(m+n)l]}e^{8ily}\\
&= \sum_{m,l,n=-\infty}^{\infty} q^{2[(m+l)^2+(n+l)^2+2l^2]}e^{16ily}\\
&\quad + \sum_{m,l,n=-\infty}^{\infty} q^{2[(m+l)^2+(n+l)^2+2l^2+(m+l)+(n+l)+2l+1]}e^{8i(2l+1)y}\\
&= \theta_3^2(0|2\tau)\theta_3(8y|4\tau)+\theta_2^2(0|2\tau)\theta_2(8y|4\tau)
\end{aligned}$$

bulunur.

3.2. Kübik Theta Fonksiyonları

$q=e^{2i\pi\tau}$, $\tau\in H$ olsun. $\theta_k(z|\tau)$ $k=1,\,2,\,3,\,4$ fonksiyonları aşağıdaki ifadelerle tanımlanır.

Tanım 3.2.1 (Chan vd 2010)

$$\begin{aligned}
\theta_1(z) &= 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{(2n+1)^2}{8}}\sin(2n+1)z\\
&= -iq^{\frac{1}{8}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}e^{(2n+1)iz}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_2(z) &= 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{(2n+1)^2}{8}} \cos(2n+1)z \\ &= q^{\frac{1}{8}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}} e^{(2n+1)iz}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_3(z) &= 1+2\sum_{n=1}^{\infty} q^{\frac{n^2}{2}} \cos 2nz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n^2}{2}} e^{2niz}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_4(z) &= 1+2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n^2}{2}} \cos 2nz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n^2}{2}} e^{2niz}.\end{aligned}$$

Teorem 3.2.2 y_1, y_2,..., y_n n tane $y_1 + y_2 + ... + y_n = 0$ olacak şekilde kompleks sayılar olsun. Bu durumda

$$\sum_{k=0}^{mn-1} \prod_{j=1}^{n} \theta_3 \left(z + y_j + \frac{\pi k}{mn} | \tau \right) = G_{m,n}(y_1, y_2, ..., y_n | \tau) \theta_3(mnz | m^2 n \tau) \tag{3.13}$$

$G_{m,n}(y_1, y_2, ..., y_n | \tau)$ sayısı öyle ki

$$G_{m,n}(y_1, y_2, ..., y_n | \tau) = mn \sum_{\substack{s_1+...+s_n=0 \\ s_1,...,s_n=-\infty}}^{\infty} q^{\frac{s_1^2+...+s_n^2}{2}} e^{2i(s_1 y_1 + ... + s_n y_n)} \tag{3.14}$$

dir.

İspat: a, b iki pozitif tamsayı ise a+b=n olsun ve $y_1 = y_2 = ... = y_a = \frac{y}{a}$ ve $y_{a+1} = y_{a+2} = ... = y_n = \frac{-y}{b}$ alalım. θ_3' ün tanımından

$$\theta_3(z|\tau) = \theta_3(z + \pi|\tau) = q^{\frac{1}{2}} e^{2iz} \theta_3(z + \pi\tau)$$

bağıntısı kolayca bulunur. Burada $z \to \frac{z}{mn}$, $\tau \to \frac{\tau}{m^2 n}$ alırsak

$$\sum_{k=0}^{mn-1} \prod_{j=1}^{n} \theta_3 \left(\frac{z}{mn} + y_j + \frac{\pi k}{mn} | \frac{\tau}{m^2 n} \right) = G_{m,n} \left(y_1, y_2, ..., y_n | \frac{\tau}{m^2 n} \right) \theta_3(z|\tau)$$

elde edilir. Eşitliğin sol tarafına f(z) diyelim.

$$f(z) = f(z + \pi) = q^{\frac{1}{2}} e^{2iz} f(z + \pi\tau)$$

bulunur. $\frac{f(z)}{\theta_3(z|\tau)}$ eliptik fonksiyonu π, $\pi\tau$ ile çifte periyodiktir. $\theta_3(z|\tau)$, $z = \frac{\pi+\pi\tau}{2}$ de sıfırı olduğu için $\frac{f(z)}{\theta_3(z|\tau)}$ z' den bağımsızdır. Böylece bir sabite eşit olmalıdır. Buna $C(y_1, y_2, ...y_n|\tau)$ diyelim.

Böylece, yerine yazarsak

$$f(z) = C(y_1, y_2, ..., y_n|\tau)\theta_3(z|\tau) \tag{3.15}$$

bulunur.

(3.15)' de $z \to mnz$ ve $\tau \to m^2n\tau$ yazalım

$$\sum_{k=0}^{mn-1} \prod_{j=1}^{n} \theta_3 \left(z + y_j + \frac{\pi k}{mn} |\tau \right) = C(y_1, y_2, ..., y_n|m^2n\tau)\theta_3(mnz|m^2n\tau)$$

bulunur. Sabit terimleri karşılaştırılarak (3.13)' den

$$G_{m,n}(y_1, y_2, ..., y_n|\tau) = C(y_1, y_2, ..., y_n|m^2n\tau)$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.3 $y_1, y_2, ..., y_n$ n tane kompleks sayı ve $y_1 + y_2 + ... + y_n = 0$ olacak şekilde olsun. Bu durumda

$$\sum_{k=0}^{mn-1} q^{\frac{k^2}{2}} e^{2kiz} \prod_{j=1}^{n} \theta_3(mz + (y_j + km)\pi\tau|m^2n\tau) \tag{3.16}$$
$$= F_{m,n}(y_1, y_2, ..., y_n|\tau)\theta_3(z|\tau)$$

ve burada

$$F_{m,n} = \frac{(-i\tau)^{\frac{(1-n)}{2}}}{(m^2n)^{\frac{n}{2}}} q^{-\frac{y_1^2+...+y_n^2}{2m^2n}} G_{m,n} \left(\frac{y_1\pi}{m^2n}, ..., \frac{y_n\pi}{m^2n} | \frac{-1}{m^2n\tau} \right)$$

dır. Ayrıca, (3.16)' da z' den bağımsız terimlerin eşitliğinden

$$F_{m,n} = \sum_{k=0}^{mn-1} \sum_{s_1+...+s_n=k}^{\infty} q^{\frac{\left(m^2n(s_1^2+...+s_n^2)-(s_1y_1+...+s_ny_n)-k^2m\right)}{2}}$$

olur.

İspat: θ_3 çift fonksiyonuna Jacobi sanal dönüşümü uygulanırsa

$$\theta_3(z|\tau) = (-i\tau)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{iz^2\tau'}{\pi}} \theta_3(z\tau'|\tau')$$

dir. Burada $\tau' = -\frac{1}{\tau}$ olduğundan

$$\theta_3(z|\tau) = (-i\tau)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{iz^2\frac{-1}{\tau}}{\pi}} \theta_3(\frac{-z}{\tau}|\frac{-1}{\tau})$$

$$\theta_3(\frac{z}{\tau}|\frac{-1}{\tau}) = e^{\frac{iz^2}{\pi\tau}}\sqrt{-i\tau}\theta_3(z|\tau) \tag{3.17}$$

ifadesiyle verilir.

(3.13)' de $\tau \to \frac{-1}{m^2n\tau}$, $z \to \frac{z}{mn}$, $y_j \to \frac{y_j\pi}{m^2n}$, $j = 1, 2, ..., n$ yazarsak

$$\sum_{k=0}^{mn-1}\prod_{j=1}^{n}\theta_3\left(\frac{mz+(y_j+km)\pi\tau}{m^2n\tau}|\frac{-1}{m^2n\tau}\right) = G_{m,n}\left(\frac{y_1\pi}{m^2n}, ..., \frac{y_n\pi}{m^2n}|\frac{-1}{m^2n\tau}\right)\theta_3(\frac{z}{\tau}|\frac{-1}{\tau}) \tag{3.18}$$

elde olunur. (3.18)' de iki tarafa da (3.17) uygulanırsa (3.16) elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 3.2.4 m pozitif tamsayısı için

$$\sum_{k=0}^{2m-1}\theta_3\left(z+y+\frac{\pi k}{2m}|\tau\right)\theta_3\left(z-y+\frac{\pi k}{2m}|\tau\right) = 2m\theta_3(2y|2\tau)\theta_3(2mz|2m^2\tau) \tag{3.19}$$

dır.

İspat: (3.13)' de n=2 olduğunda

$$\sum_{k=0}^{2m-1}\theta_3\left(z+y_1+\frac{\pi k}{2m}|\tau\right)\theta_3\left(z-y_2+\frac{\pi k}{2m}|\tau\right) = G_{m,2}(y_1, y_2)\theta_3(2mz|2m^2\tau)$$

Burada

$$y_1 + y_2 = 0 \text{ ve } G_{m,2} = 2m\sum_{\substack{s_1+s_2=0\\ s_1,s_2=-\infty}}^{\infty} q^{\frac{s_1^2+s_2^2}{2}}e^{2i(s_1y_1+s_2y_2)}$$

dır.

Eğer $y_1 = y$ ve $y_2 = -y$ alınırsa

$$G_{m,2} = 2m\sum_{\substack{s_1+s_2=0\\ s_1,s_2=-\infty}}^{\infty} q^{s^2}e^{4iy} = \theta_3(2y|2\tau)$$

olur. Böylece, $G_{m,2}(y, -y|\tau) = 2m\theta_3(2y|2\tau)$ olduğundan (3.19)' da

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2m-1}\theta_3\left(z+y+\frac{\pi k}{2m}|\tau\right)\theta_3\left(z-y+\frac{\pi k}{2m}|\tau\right) &= G_{m,2}(y,-y)\theta_3(2mz|2m^2\tau)\\ &= 2m\theta_3(2y|2\tau)\theta_3(2mz|2m^2\tau)\end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 3.2.4' de $m = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{2m-1} \theta_3 \left(z + y + \frac{\pi k}{2} |\tau \right) \theta_3 \left(z - y + \frac{\pi k}{2} |\tau \right) \\ = \; & 2\theta_3(2y|2\tau)\theta_3(2z|2\tau) \\ = \; & \theta_3(z+y|\tau)\theta_3(z-y|\tau) + \theta_3(z+y+\frac{\pi}{2}|\tau)\theta_3(z-y+\frac{\pi}{2}|\tau) \end{aligned}$$

olur. Eşitliğin her iki tarafına dönüşüm yapılırsa

$$2\theta_3(2y|2\tau)\theta_3(2z|2\tau) = \theta_3(z+y|\tau)\theta_3(z-y|\tau) + \theta_4(z+y|\tau)\theta_4(z-y|\tau)$$

elde edilir.

Tanım 3.2.5 (Chan vd 2010) $a(y_1, y_2|\tau)$ katlı theta serisi

$$a(y_1, y_2|\tau) = \sum_{r_1, r_2 = -\infty}^{\infty} q^{r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2} e^{2i[r_1(2y_1 + y_2) + r_2(2y_2 + y_1)]}$$

ile ifade edilir.

$w = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ile kubik theta fonksiyonları $a(\tau)$, $b(\tau)$, $c(\tau)$ sırasıyla

$$\begin{aligned} a(\tau) &= \sum_{r_1, r_2 = -\infty}^{\infty} q^{r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2} \\ b(\tau) &= \sum_{r_1, r_2 = -\infty}^{\infty} q^{r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2} w^{r_1 - r_2} \\ c(\tau) &= \sum_{r_1, r_2 = -\infty}^{\infty} q^{r_1^2 + r_2^2 + r_1 + r_2 + r_1 r_2} \end{aligned}$$

ile tanımlanır.

Katlı theta ile kübik theta fonksiyonları arasındaki ilişki

$$\begin{aligned} a(0, 0|\tau) &= a(\tau) \\ a(\frac{\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}|\tau) &= b(\tau) \\ a(\frac{\pi\tau}{6}, \frac{\pi\tau}{6}|\tau) &= c(\tau) \end{aligned}$$

şeklindedir, yani, $a(y_1, y_2|\tau)$ katlı theta serisi $a(\tau)$, $b(\tau)$, $c(\tau)$ fonksiyonlarının genelleştirmesidir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} a(\frac{\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}|\tau) &= \sum_{r_1, r_2 = -\infty}^{\infty} q^{r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2} e^{2i\left[r_1\left(2\frac{\pi}{3} + \frac{-\pi}{3}\right) + r_2\left(2\frac{-\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)\right]} \\ &= \sum_{r_1, r_2 = -\infty}^{\infty} q^{r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2} e^{2i\left(r_1 \frac{\pi}{3} - r_2 \frac{\pi}{3}\right)} \\ &= \sum_{r_1, r_2 = -\infty}^{\infty} q^{r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2} w^{r_1 - r_2} \\ &= b(\tau). \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a(\frac{\pi\tau}{6},\frac{\pi\tau}{6}|\tau) &= \sum_{r_1,r_2=-\infty}^{\infty} q^{r_1^2+r_2^2+r_1r_2} e^{2i\left[r_1\left(2\frac{\pi\tau}{6}+\frac{\pi\tau}{6}\right)+r_2\left(2\frac{\pi\tau}{6}+\frac{\pi\tau}{6}\right)\right]} \\
&= \sum_{r_1,r_2=-\infty}^{\infty} q^{r_1^2+r_2^2+r_1r_2} e^{2i\left(r_1\frac{\pi\tau}{2}+r_2\frac{\pi\tau}{2}\right)} \\
&= \sum_{r_1,r_2=-\infty}^{\infty} q^{r_1^2+r_2^2+r_1r_2} e^{i\pi\tau(r_1+r_2)} \\
&= \sum_{r_1,r_2=-\infty}^{\infty} q^{r_1^2+r_2^2+r_1+r_2+r_1r_2} \\
&= c(\tau).
\end{aligned}
$$

Sonuç 3.2.6 *m pozitif tamsayı için (3.19)' da n=3 olduğunda*

$$\sum_{k=0}^{3m-1}\prod_{j=1}^{3}\theta_3\left(z+y_j+\frac{\pi k}{3m}|\tau\right) = G_{m,3}(y_1,y_2,...,y_n|\tau)\theta_3(3mz|3m^2\tau)$$

dir.

İspat: (3.14)' den

$$G_{m,n}(y_1,y_2,...,y_n|\tau) = mn \sum_{\substack{s_1+...+s_n=0 \\ s_1,...,s_n=-\infty}}^{\infty} q^{\frac{s_1^2+...+s_n^2}{2}} e^{2i(s_1y_1+...+s_ny_n)}$$

olduğunu biliyoruz.

n=3 yazılırsa

$$G_{m,3}(y_1,y_2,y_3|\tau) = 3m \sum_{\substack{s_1+...+s_3=0 \\ s_1,...,s_3=-\infty}}^{\infty} q^{\frac{s_1^2+...+s_3^2}{2}} e^{2i(s_1y_1+...+s_3y_3)}$$

dır. Burada

$$y_3 = -y_1 - y_2 \quad \text{ve} \quad s_3 = -s_1 - s_2$$

yazarsak

$$
\begin{aligned}
G_{m,3}(y_1,y_2,-y_1-y_2|\tau) &= 3m \sum_{\substack{s_1+...+s_3=0 \\ s_1,...,s_3=-\infty}}^{\infty} q^{s_1^2+s_2^2+s_1+s_2} e^{2i[y_1(s_1-s_3)+y_2(s_2-s_3)]} \\
&= 3m \sum_{\substack{s_1+...+s_3=0 \\ s_1,...,s_3=-\infty}}^{\infty} q^{s_1^2+s_2^2+s_1+s_2} e^{2i[2y_1s_1+y_1s_2+2y_2s_2+y_2s_1]} \\
&= 3m \sum_{\substack{s_1+...+s_3=0 \\ s_1,...,s_3=-\infty}}^{\infty} q^{s_1^2+s_2^2+s_1+s_2} e^{2i[s_1(2y_1+y_2)+s_2(y_1+2y_2)]} \\
&= 3ma(y_1,y_2|\tau).
\end{aligned}
$$

(3.13)' de $G_{m,3}(y_1, y_2, y_3|\tau)$' yu yerine yazarsak

$$\sum_{k=0}^{3m-1} \theta_3(z + y_1 + \frac{\pi k}{3m}|\tau)\theta_3(z - y_2 + \frac{\pi k}{3m}|\tau)\theta_3(z - y_3 + \frac{\pi k}{3m}|\tau)$$
$$= 3ma(y_1, y_2|\tau)\theta_3(3mz|3m^2\tau)$$

bulunur.

$m = 1$ durumunda Sonuç 3.2.6 aşağıdaki gibi olur.

Sonuç 3.3.7

$$\begin{aligned}
&3a(y_1, y_2|\tau)\theta_3(3z|3\tau) \\
&\quad = \theta_3\left(z + y_1 + \frac{\pi}{3}|\tau\right)\theta_3\left(z + y_2 + \frac{\pi}{3}|\tau\right)\theta_3\left(z + y_3 + \frac{\pi}{3}|\tau\right) \\
&\qquad + \theta_3(z + y_1|\tau)\theta_3(z + y_2|\tau)\theta_3(z + y_3|\tau) \\
&\qquad + \theta_3\left(z + y_1 - \frac{\pi}{3}|\tau\right)\theta_3\left(z + y_2 - \frac{\pi}{3}|\tau\right)\theta_3\left(z + y_3 - \frac{\pi}{3}|\tau\right).
\end{aligned}$$

Sonuç 3.3.7' de $y_1 = y_2 = 0$ alınırsa

$$a(\tau)\ \theta_3(3z|3\tau) = \theta_3^3(z|\tau) + \theta_3^3\left(z + \frac{\pi}{3}|\tau\right) + \theta_3^3\left(z - \frac{\pi}{3}|\tau\right)$$

bulunur.

Önerme 3.3.8 $a(y_1, y_2|\tau)$' yu tanım 3.2.5' deki gibi verilsin ve $y_3 = -y_1 - y_2$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&3a(y_1, y_2|\tau)\theta_3(3z|3\tau) \\
&\quad = \theta_1\left(z + y_1 + \frac{\pi}{3}|\tau\right)\theta_1\left(z + y_2 + \frac{\pi}{3}|\tau\right)\theta_1\left(z + y_3 + \frac{\pi}{3}|\tau\right) \\
&\qquad + \theta_1(z + y_1|\tau)\theta_1(z + y_2|\tau)\theta_1(z + y_3|\tau) \\
&\qquad + \theta_1\left(z + y_1 - \frac{\pi}{3}|\tau\right)\theta_1\left(z + y_2 - \frac{\pi}{3}|\tau\right)\theta_1\left(z + y_3 - \frac{\pi}{3}|\tau\right)
\end{aligned}$$

dır.

İspat: θ_1 ve θ_3' ün tanımından

$$\theta_3\left(z + \frac{\pi + \pi\tau}{2}|\tau\right) = iq^{-\frac{1}{8}}e^{-iz}\theta_1(z|\tau)$$

dır.

Tanım 3.2.1' den

$$
\begin{aligned}
\theta_3\left(z+\frac{\pi+\pi\tau}{2}|\tau\right) &= \sum_{-\infty}^{\infty} q^{\frac{n^2}{2}} e^{2ni\left(z+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\tau}{2}\right)} \\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} q^{\frac{n^2}{2}} e^{2niz} e^{ni\pi} e^{ni\pi\tau} \\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} q^{\frac{n^2}{2}} e^{2niz} (-1)^n q^{\frac{n}{2}} \\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n^2+n}{2}} e^{(2n+1)iz} e^{-iz} \\
&= e^{-iz} q^{\frac{-1}{8}} i \left\{ -iq^{\frac{1}{8}} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n^2+n}{2}} e^{(2n+1)iz} \right\} \\
&= ie^{-iz} q^{\frac{-1}{8}} \theta_1(z|\tau)
\end{aligned}
$$

bulunur. Sonuç 3.3.7' de z yerine $z+\frac{\pi+\pi\tau}{2}$ alarak elde edilen denklem yukarıdaki eşitliği önerme 3.3.8' de kullanarak sonuç 3.3.9 elde edilir.

Önerme 3.3.8' de z=0 alarak $\theta_1(0|3\tau)=0$' dan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.9 $y_1, y_2 \epsilon \mathbb{C}$

$$
\begin{aligned}
&\theta_1(y_1|\tau)\theta_1(y_2|\tau)\theta_1(y_1+y_2|\tau) \\
&\quad = \theta_1\left(y_1+\frac{\pi}{3}|\tau\right)\theta_1\left(y_2+\frac{\pi}{3}|\tau\right)\theta_1\left(y_1+y_2+\frac{\pi}{3}|\tau\right) \\
&\quad\quad +\theta_1\left(y_1-\frac{\pi}{3}|\tau\right)\theta_1\left(y_2-\frac{\pi}{3}|\tau\right)\theta_1\left(y_1+y_2+\frac{\pi}{3}|\tau\right).
\end{aligned}
$$

4. KAYNAKLAR

CHAN, H.S. and LIU, Z-GUO. 2010. On a new circular Summation of Theta functions. *J. Number Theory*, 130: 1190-1196.

CHANG, C-H. SRIVASTAVA, H.M. and WU, T.CHEN. 2008.Some families of Weierstrass type functions and their applications. *Integr. Transf. Spec. F.* , 19 (9): 621-632.

DU, VAL.P. 1965. Elliptic Functions and Elliptic Curves. Math Society Lecture Note Series, 256 p. London.

DUTTA, M and DEBNATH, L. 1965. Elements Of The Theory Elliptic and Associated Functions With Applications. World Press, 290 p. Calcutta.

NEUMAN, E. 2013. Product formulas and Inequalities involving θ-functions. *Integr. Transf. Spec. F.* , 24 (12): 976-981.

SCHIEFERMAYR, K. 2013. Some New Properties of Jakobi theta functions. arxiv: 1306.6220 v1.

SHEN, L-CHIEN. 1999. On the Products of three Theta Functions. *Ramanujan J.* , 3: 343-357.

WHITTAKER, E.T and WATSON, G.N. 1954. A Course Of Modern Analysis. Cambridge Univ.Press, 616 p. London.

WU, T.CHEN, CHANG, C-HAU and SRIVASTAVA, H.M. 2010. A unified presentation of identities involving Weierstrass-type functions and their applications. *Appl. Math. Lett.* , 23: 864-870.

ZENG, X-FENG. 2009. A Generelized circular summation of Theta function and Its application. *J. Math. Anal. Appl.* , 356: 698-703.

ZHU, J-MING. 2012. An Alternate Circular Summation Formula of Theta Functions and its application. *Appl. Anal. Discr. Math.* , 6: 114-125.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Kütahya'da doğdu. ilk, orta ve lise öğrenimini Kütahya' da tamamladı. 2004 yılında girdiği Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2008 yılında matematikçi olarak mezun oldu. Tezsiz Lisans üstü eğitimine 2008 yılında Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde başladı ve 2009 yılında bitirdi. Tezli yüksek lisans eğitimine 2011 Eylül ayında Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim dalında başladı.